Лекция 22. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Задача и теорема Коши. Общее и частное решения. Уравнения с разделяющимися переменными, однородные и сводящиеся к однородным. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли.

Дифференциальные уравнения первого порядка

§ 1. Определение дифференциальных уравнений. Понятие решения дифференциального уравнения.

Определение 1. Уравнение вида

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \tag{1}$$

Связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производные называется обыкновенным дифференциальным уравнением.

Наличие хотя бы одной производной обязательно.

<u>Определение 2.</u> Функция $y = \phi(x)$, n раз дифференцируемая на (a,b) называется решением уравнения (1), если подстановка этой функции в уравнение (1) обращает его в тождество, т.е. $F(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) \equiv 0$.

<u>Пример:</u> $y'' + y = 0$.

Его решение: $y = \sin x$. Убедимся в этом:

$y' = \cos x$,

$y'' = -\sin x$,

Тогда:

$-\sin x + \sin x \equiv 0$.

Определение 3. Порядком дифференциального уравнения (1) называют порядок наивысшей производной , входящей в уравнение (1).

Пример: $y^{IV} + 3y' + xy = \cos x$ имеет четвертый порядок.

Определение 4. Дифференциальное уравнение вида (1) называется разрешенным относительно старшей производной, если оно может быть записано в виде:

$$y^{(n)} = f\,(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n\text{-}1)}(x)) \qquad (2)$$

Пример: $y' + x = 0$.

Разрешим его относительно старшей производной:

$y' = - x$.

Найдем первообразную:

$$y = -\,x^2/2 + c.$$

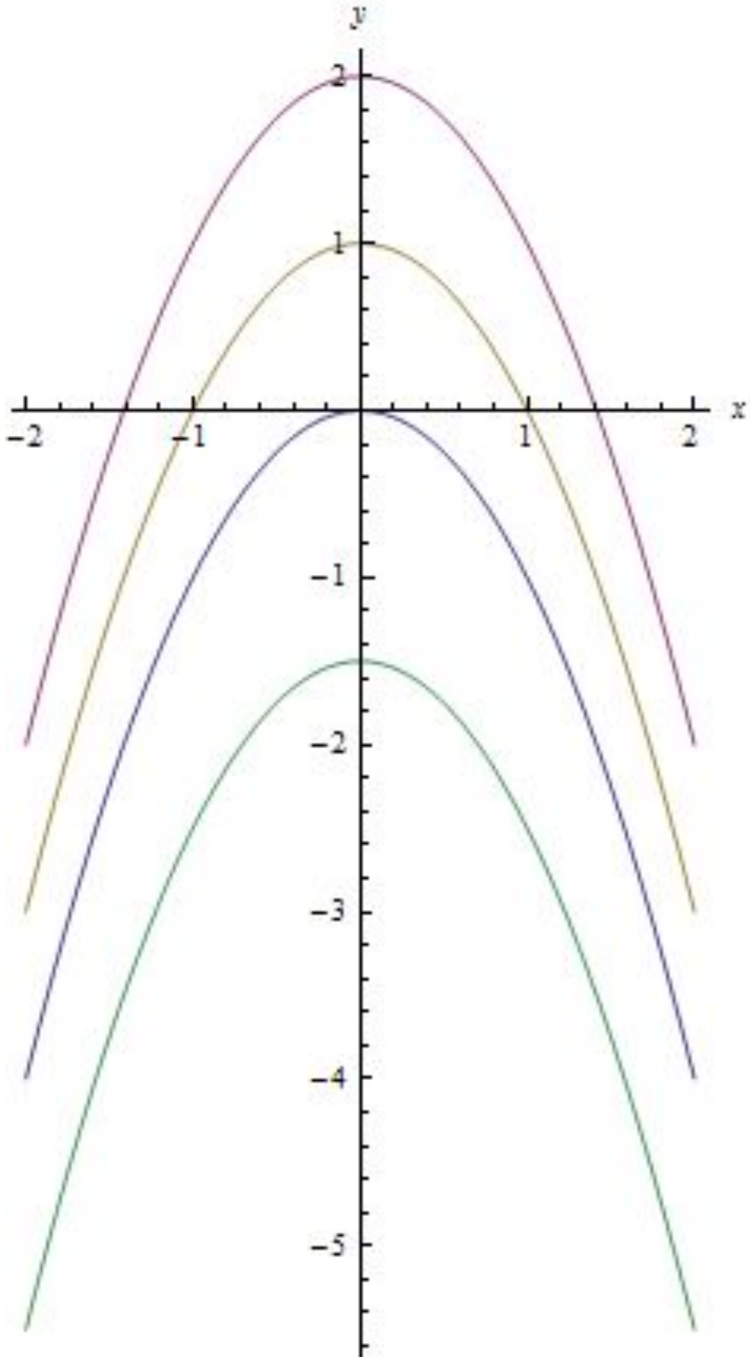
Это выражение дает все решения дифференциального уравнения:

$$y' + x = (-\,x^2/2 + c)' + x = -\,x + x = 0.$$

Определение 5. График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

Пример: для предыдущего примера, построим несколько интегральных кривых:

$y = - x^2/2 + c.$



$c = 2$

$c = 1$

$c = 0$

$c = -1{,}5.$

Для выделения из множества решений дифференциального уравнения единственного, ставится **задача Коши**.

Суть задачи Коши сводится к тому, чтобы найти решения дифференциального уравнения вида $F(x,\ y(x),\ y'(x)) = 0$, удовлетворяющему начальному условию:

$$y(x_0) = y_0 \ \Leftrightarrow\ y\big|_{x = x^0} = y_0.$$

Пример: Решить задачу Коши.

$$\begin{cases} y' + x = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

т.е. при условии, что $y(1) = 1$.

Решение.

1)Находим первообразную:

$$y = -\,x^2/2 + c.$$

2) При помощи начального условия выделим решение задачи Коши:

$$\begin{cases} y(1) = -\dfrac{1}{2} + c \\ y(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

Ответ: $y = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}$

Задача Коши не всегда имеет единственное решение. Единственное решение существует тогда и только тогда, когда выполняются условия теоремы:

<u>Теорема</u> (существования и единственности).

Пусть в области D дано уравнение $y' = f(x,y)$. Если для точки $M(x_0,y_0)$ существует окрестность, такая что:

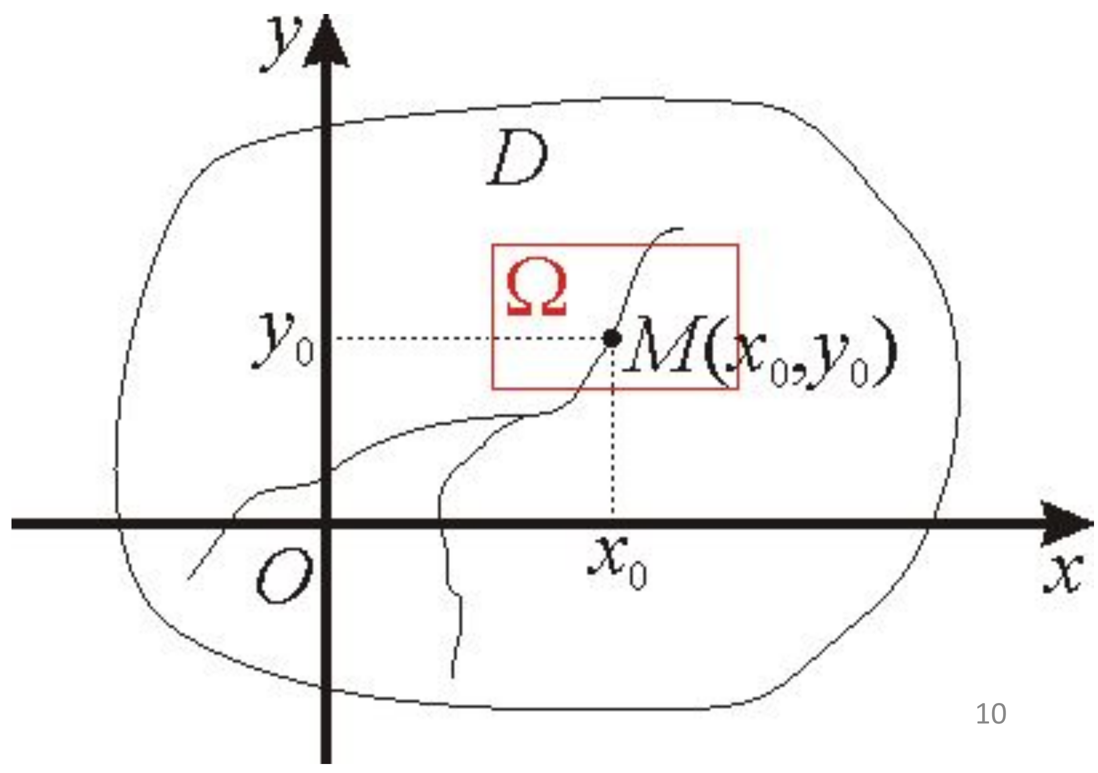
1) $f(x,y)$ непрерывна в ней по аргументам x и y.

2) частная производная $\partial f/\partial y$ ограничена по абсолютной величине, т.е. $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| < +\infty$. Тогда в этой окрестности существует единственное решение задачи Коши: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Геометрический смысл теоремы Коши.

Если выполняется условие теоремы в окрестности Ω точки $M(x_0,y_0)$, то через точку $M(x_0,y_0)$ проходит единственная в окрестности Ω интегральная кривая (см. рис.).

Теорема Коши – локальная теорема, если в окрестности Ω существует единственное решение задачи Коши, то вне окрестности может существовать 2 и более решений.



Определение 6. Решение дифференциального уравнения, в каждой точке которого нарушается единственность называется **особым** решением дифференциального уравнения.

Обычно особое решение – это огибающая всех интегральных кривых дифференциального уравнения.

Общим решением для $y' = f(x,y)$ является $y = \phi(x,c)$, такое, что: $\phi' = f(x,\phi(x,c))$.

Если общее решение записано в виде $\Phi(x,y,c)=0$, то выражение называется общим интегралом дифференциального уравнения.

§ 2. Типы дифференциальных уравнений первого порядка.

$y' = f(x)$ – простейший тип.

Решение его: $y = \int f(x)dx + c$

$p(x)dx = q(y)dy$ дифференциальное уравнение с разделёнными переменными.

Если обозначить: $P(x)$ и $Q(y)$ так, что:

$P'(x) = p(x)$, $Q'(y) = q(y)$, то дифференциальное уравнение с разделенными переменными запишется в виде: $dP = dQ$, тогда: $d(P - Q) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow P - Q = c$, при этом:

$$\begin{cases} P = \int p(x)dx \\ Q = \int q(y)dy \end{cases} \Rightarrow \int p(x)dx - \int q(y)dy = c.$$

<u>Пример:</u> $xdx = y^2dy$. Найти общий интеграл этого дифференциального уравнения.

Решение.

$$\int xdx = \int y^2 dy$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^3}{3} + c$$

$$3x^2 - 2y^3 = 6c = c_1{}^*$$

§ 3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Определение 7. Уравнение вида:

$$f_1(x)\phi_1(y)dx = f_2(x)\phi_2(y)dy \qquad (3)$$

или

$$y'_x = f(x)\phi(y) \qquad (4)$$

называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Очевидно, что (4) $\Rightarrow$ (3), так как (домножим (4) на dx)

$y'_x dx = f(x)\phi(y)dx$, так как: $y'_x dx = dy$, то:

$dy = f(x)\phi(y)dx$.

Уравнение (3) сводится к уравнению с разделенными переменными.

Действительно. Разделим в (3) обе части на $f_2(x)\phi_1(y) \neq 0$, тогда:

$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy$ - уравнение с разделенными переменными. Интегрируя, получаем:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx - \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = c$$

Это выражение является общим интегралом дифференциального уравнения с разделенными переменными.

§ 4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

Предварительное замечание:

<u>Определение 8.</u> Функция $f\ (x,y)$ называется однородной n-го измерения, если $\forall p \neq 0$ имеет место $f\,(px,py) = p^n f\,(x,y)$.

В частности, если $n = 0$, то $f\ (px,py) = f\ (x,y)$ – однородная функция нулевого измерения.

<u>Теорема 1.</u> Если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции одного измерения, то

$$f(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

однородная функция нулевого измерения.

Доказательство.

$\forall p \neq 0$ рассмотрим:

$$f(px, py) = \frac{P(px, py)}{Q(px, py)} = \frac{p^n P(x, y)}{p^n Q(x, y)} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = f(x, y)$$

Ч.т.д.

<u>Теорема 2.</u> Однородная функция нулевого измерения зависит лишь от отношения переменных.

Доказательство.

Пусть $f(px, py) = f(x, y)$ при $\forall p \neq 0$ рассмотрим $p = \frac{1}{x}$ тогда:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ч.т.д.

<u>Определение 9.</u> Уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (5)$$

называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка (в дифференциальной форме), где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ - однородные функции одного измерения.

Действительно. Разделим (5) на $Q(x,y)dx \neq 0$, имеем:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}.$$

Согласно теореме 1: $\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ - однородная функция нулевого измерения и согласно теореме 2:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (6)$$

- однородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Однородные дифференциальные уравнения сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными путём введения новой функции:

$$u(x) = \frac{y}{x}$$

Выразим y:

$$y = u(x) \cdot x.$$

Продифференцируем его:

$$\frac{dy}{dx} = u + x \cdot \frac{du}{dx}$$

Подставим полученное выражение в (6):

$$u + x \cdot \frac{du}{dx} = \varphi(u) \Rightarrow x \cdot \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$$

В полученном уравнении легко разделяются переменные:

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Получили уравнение с разделенными переменными, откуда:

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + \tilde{n}$$

Получили общее решение исходного уравнения, если $\phi(u) - u \neq 0$, $x \neq 0$.

§ 5. Уравнения, приводящиеся к однородному.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

1) Случай: если $c = c_1 = 0$, то

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by}{a_1x+b_1y}\right) = f\left(\frac{a+b\dfrac{y}{x}}{a_1+b_1\dfrac{y}{x}}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Получили однородное уравнение.

2) Случай: если по крайней мере одно из чисел c или $c_1 \neq 0$, и $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ тогда путем введения новых неизвестных:

$$x = X + h$$

$$y = Y + k,$$

где: h и k – решения системы:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$

данное уравнение сводится к однородному.

Покажем это:

$dx = dX$

$dy = dY.$

Подставим в исходное уравнение:

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY + \overbrace{ah + bk + c}^{=0}}{a_1X + b_1Y + \underbrace{a_1h + b_1k + c_1}_{=0}}\right)$$

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY + c}{a_1X + b_1Y + c_1}\right) = \varphi\left(\frac{Y}{X}\right)$$

Получили однородное уравнение относительно неизвестной функции Y и: $u = \frac{Y}{X}$

3) Случай: если одно из чисел c или $c_1 \neq 0$, а

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$$

тогда $ab_1 = a_1 b \Rightarrow \dfrac{a_1}{a} = \dfrac{b_1}{b} = k \Rightarrow a_1 = ak$ и $b_1 = bk$,

тогда: $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{ax + by + c}{k(ax + by) + c_1}\right)$

путём введения новой функции

$$z(x) = ax + by$$

данное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Покажем это:

$$z(x) = ax + by \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right)$$

Подставим все в исходное уравнение:

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f\left(\frac{z+c}{kz+c}\right) \Rightarrow \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = \varphi(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} - a = b\varphi(z) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = b\varphi(z) + a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{b\varphi(z) + a} = dx \Rightarrow \int \frac{dz}{b\varphi(z) + a} = \int dx + c$$

Получили общий интеграл.

§ 6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

__Определение 10.__ Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (7)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - непрерывные функции, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка (относительно неизвестной функции $y(x)$).

Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций:

$$y(x) = u(x)\cdot v(x)$$

где одну функцию можно взять произвольно с таким расчетом, чтобы уравнение упростилось, а вторую подобрать так, чтобы произведение этих двух функций являлось решением.

Найдем:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Подставим всё в (7):

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x) \qquad (*)$$

Подберем функцию u так, чтобы:

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$$

Для этого в качестве u возьмем <u>какое-либо</u> решение уравнения:

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = -P(x)dx \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln u = -\int P(x)dx \Rightarrow u = e^{-\int P(x)dx}$$

Подставим полученное значение u в (*):

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} = Q(x) \Rightarrow dv = Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx \Rightarrow$$

$$\int dv = \int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + c \Rightarrow v = \int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + c$$

Общее решение:

$$y = u \cdot v =$$

$$= \left(e^{-\int P(x)dx}\right) \cdot \left(\int Q(x) e^{-\int P(x)dx} dx + c\right)$$

<u>Замечание:</u> Уравнение вида:

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$$

относительно $x(y)$. Его решение ищется в виде:

$$x(y) = u(y) \cdot v(y)$$

§ 7. Уравнение Бернулли.

<u>Определение 11.</u> Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^{\alpha} \qquad (8)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - непрерывные функции и $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, называется уравнением Бернулли.

Уравнение Бернулли сводится к линейному: делим все члены уравнения на y^{α}:

$$y^{-\alpha}\,\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x) \qquad (**)$$

Обозначим: $y^{1\text{-}\alpha} = z$ и продифференцируем:

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \Rightarrow y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{dz}{dx}$$

Подставим полученное выражение в уравнение (**):

$$\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x)$$

Получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $z(x)$.