

**Лекция 22.** Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Задача и теорема Коши. Общее и частное решения. Уравнения с разделяющимися переменными, однородные и сводящиеся к однородным. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли.

# Дифференциальные уравнения первого порядка

## § 1. Определение дифференциальных уравнений. Понятие решения дифференциального уравнения.

**Определение 1.** Уравнение вида

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (1)$$

Связывающее независимую переменную  $x$ , искомую функцию  $y(x)$  и ее производные называется обыкновенным дифференциальным уравнением.

Наличие хотя бы одной производной обязательно.

**Определение 2.** Функция  $y = \phi(x)$ ,  $n$  раз дифференцируемая на  $(a, b)$  называется решением уравнения (1), если подстановка этой функции в уравнение (1) обращает его в тождество, т.е.  $F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) \equiv 0$ .

**Пример:**  $y'' + y = 0$ .

Его решение:  $y = \sin x$ . Убедимся в этом:

$$y' = \cos x,$$
$$y'' = -\sin x,$$

Тогда:

$$-\sin x + \sin x \equiv 0.$$

**Определение 3.** Порядком дифференциального уравнения (1) называют порядок наивысшей производной, входящей в уравнение (1).

**Пример:**  $y^{IV} + 3y' + xy = \cos x$  имеет четвертый порядок.

**Определение 4.** Дифференциальное уравнение вида (1) называется разрешенным относительно старшей производной, если оно может быть записано в виде:

$$y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (2)$$

**Пример:**  $y' + x = 0$ .

Разрешим его относительно старшей производной:

$$y' = -x.$$

Найдем первообразную:

$$y = -x^2/2 + c.$$

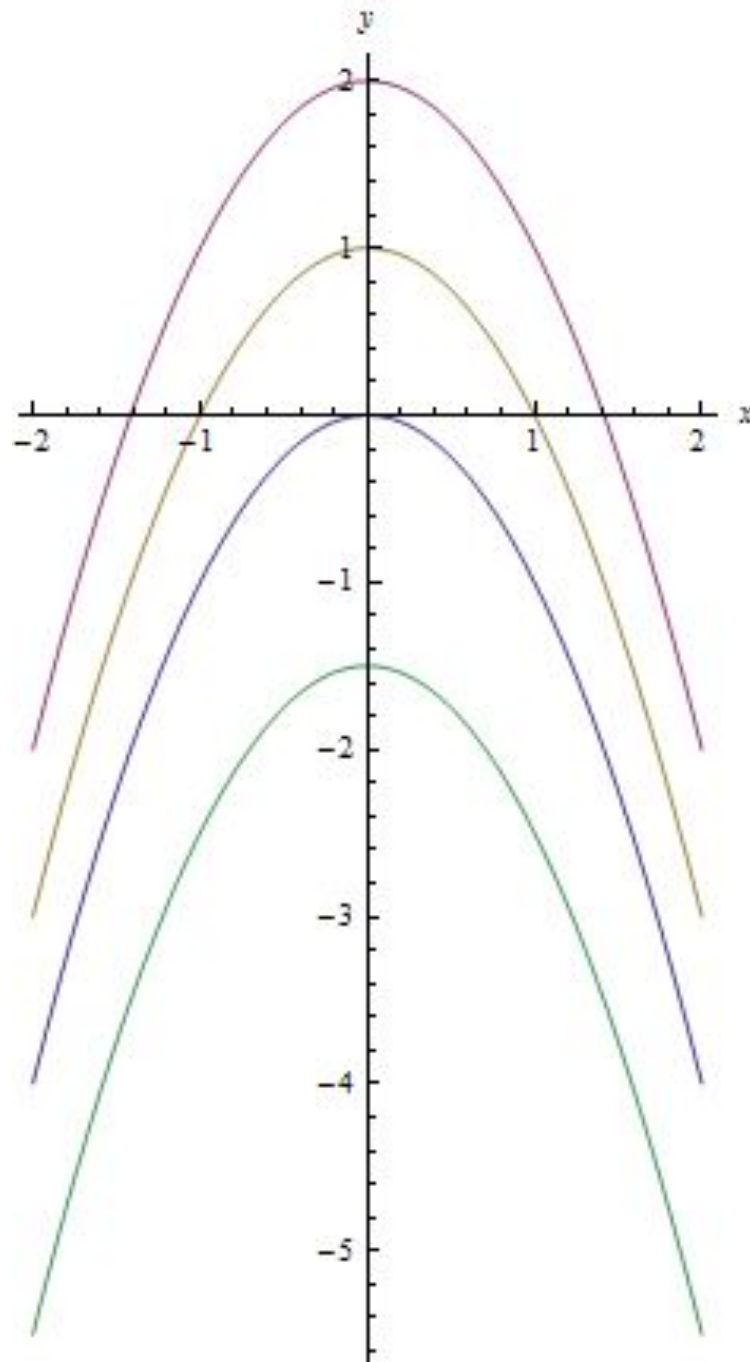
Это выражение дает все решения дифференциального уравнения:

$$y' + x = (-x^2/2 + c)' + x = -x + x = 0.$$

**Определение 5.** График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

**Пример:** для предыдущего примера, построим несколько интегральных кривых:

$$y = -x^2/2 + c.$$



$$c = 2$$

$$c = 1$$

$$c = 0$$

$$c = -1,5.$$

Для выделения из множества решений дифференциального уравнения единственного, ставится **задача Коши**.

**Суть задачи Коши** сводится к тому, чтобы найти решения дифференциального уравнения вида  $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ , удовлетворяющему начальному условию:

$$y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow y|_{x=x_0} = y_0.$$

**Пример:** Решить задачу Коши.

$$\begin{cases} y' + x = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

т.е. при условии, что  $y(1) = 1$ .

Решение.

1) Находим первообразную:

$$y = -x^2/2 + c.$$

2) При помощи начального условия выделим решение задачи Коши:

$$\begin{cases} y(1) = -\frac{1}{2} + c \\ y(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

Ответ:  $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$



Задача Коши не всегда имеет единственное решение. Единственное решение существует тогда и только тогда, когда выполняются условия теоремы:

**Теорема (существования и единственности).**

Пусть в области  $D$  дано уравнение  $y' = f(x, y)$ .

Если для точки  $M(x_0, y_0)$  существует окрестность, такая что:

1)  $f(x, y)$  непрерывна в ней по аргументам  $x$  и  $y$ .

2) частная производная  $\partial f / \partial y$  ограничена по

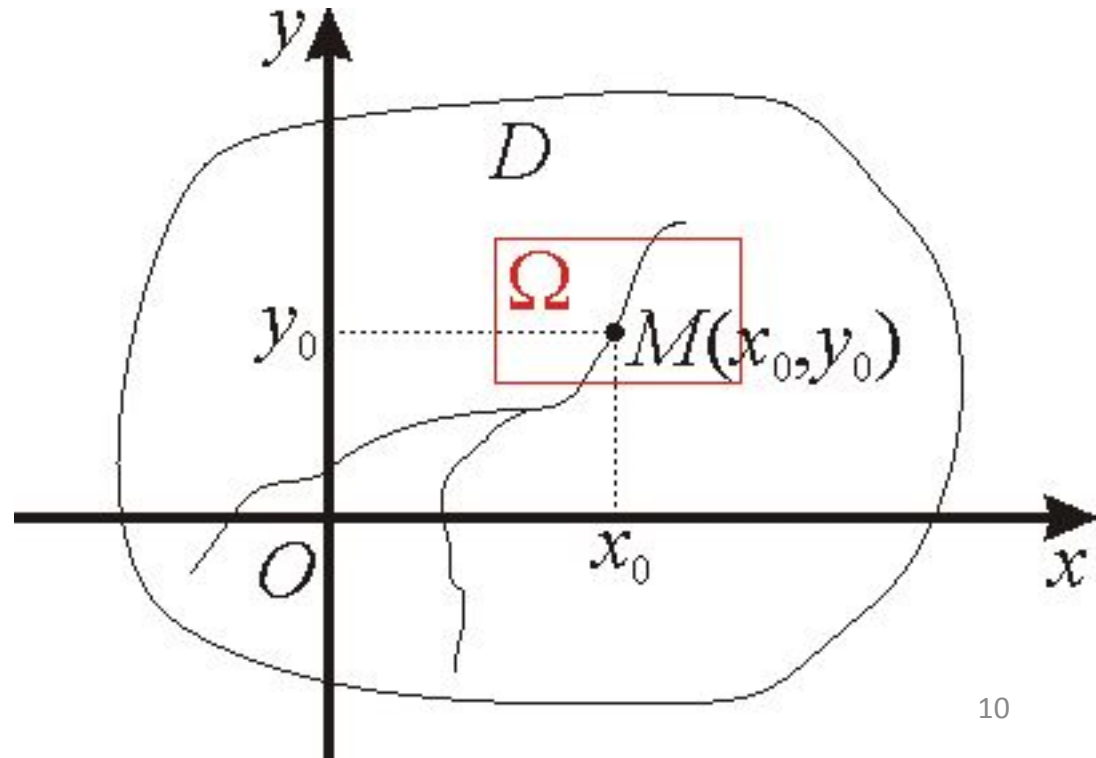
абсолютной величине, т.е.  $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| < +\infty$ . Тогда в этой

окрестности существует  
единственное решение задачи Коши: 
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

# Геометрический смысл теоремы Коши.

Если выполняется условие теоремы в окрестности  $\Omega$  точки  $M(x_0, y_0)$ , то через точку  $M(x_0, y_0)$  проходит единственная в окрестности  $\Omega$  интегральная кривая (см. рис.).

Теорема Коши – локальная теорема, если в окрестности  $\Omega$  существует единственное решение задачи Коши, то вне окрестности может существовать 2 и более решений.



**Определение 6.** Решение дифференциального уравнения, в каждой точке которого нарушается единственность называется **особым** решением дифференциального уравнения.

Обычно особое решение – это огибающая всех интегральных кривых дифференциального уравнения.

Общим решением для  $y' = f(x, y)$  является  $y = \phi(x, c)$ , такое, что:  $\phi' = f(x, \phi(x, c))$ .

Если общее решение записано в виде  $\Phi(x, y, c) = 0$ , то выражение называется общим интегралом дифференциального уравнения.

## § 2. Типы дифференциальных уравнений первого порядка.

$y' = f(x)$  – простейший тип.

Решение его:  $y = \int f(x)dx + c$

$p(x)dx = q(y)dy$  дифференциальное уравнение с разделёнными переменными.

Если обозначить:  $P(x)$  и  $Q(y)$  так, что:

$P'(x) = p(x)$ ,  $Q'(y) = q(y)$ , то дифференциальное уравнение с разделёнными переменными запи-

шется в виде:  $dP = dQ$ , тогда:  $d(P - Q) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow P - Q = c$ , при этом:

$$\begin{cases} P = \int p(x)dx \\ Q = \int q(y)dy \end{cases} \Rightarrow \int p(x)dx - \int q(y)dy = c.$$

**Пример:**  $x dx = y^2 dy$ . Найти общий интеграл этого дифференциального уравнения.

Решение.

$$\int x dx = \int y^2 dy$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^3}{3} + c$$

$$3x^2 - 2y^3 = 6c = c_1^*$$

### § 3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

**Определение 7.** Уравнение вида:

$$f_1(x)\phi_1(y)dx = f_2(x)\phi_2(y)dy \quad (3)$$

или

$$y'_x = f(x)\phi(y) \quad (4)$$

называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Очевидно, что (4)  $\Rightarrow$  (3), так как (умножим (4) на  $dx$ )

$$y'_x dx = f(x)\phi(y)dx, \text{ так как: } y'_x dx = dy, \text{ то:}$$
$$dy = f(x)\phi(y)dx.$$

Уравнение (3) сводится к уравнению с разделенными переменными.

Действительно. Разделим в (3) обе части на

$f_2(x)\phi_1(y) \neq 0$ , тогда:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)} dy - \text{уравнение с разделенными}$$

переменными. Интегрируя, получаем:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx - \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)} dy = c$$

Это выражение является общим интегралом дифференциального уравнения с разделенными переменными.

## § 4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

Предварительное замечание:

**Определение 8.** Функция  $f(x, y)$  называется однородной  $n$ -го измерения, если  $\forall p \neq 0$  имеет место  $f(px, py) = p^n f(x, y)$ .

В частности, если  $n = 0$ , то  $f(px, py) = f(x, y)$  – однородная функция нулевого измерения.

**Теорема 1.** Если  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  – однородные функции одного измерения, то

$$f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

однородная функция нулевого измерения.



## Доказательство.

$\forall p \neq 0$  рассмотрим:

$$f(px, py) = \frac{P(px, py)}{Q(px, py)} = \frac{p^n P(x, y)}{p^n Q(x, y)} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = f(x, y)$$

Ч.т.д.

**Теорема 2.** Однородная функция нулевого измерения зависит лишь от отношения переменных.

## Доказательство.

Пусть  $f(px, py) = f(x, y)$  при  $\forall p \neq 0$  рассмотрим  $p = \frac{1}{x}$   
тогда:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ч.т.д.

**Определение 9.** Уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (5)$$

называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка (в дифференциальной форме), где  $P(x,y)$  и  $Q(x,y)$  - однородные функции одного измерения.

Действительно. Разделим (5) на  $Q(x,y)dx \neq 0$ ,

имеем:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}.$$

Согласно теореме 1:  $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$  - однородная

функция нулевого измерения и согласно теореме 2:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (6)$$

- однородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Однородные дифференциальные уравнения сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными путём введения новой функции:

$$u(x) = \frac{y}{x}$$

Выразим  $y$ :

$$y = u(x) \cdot x.$$

Продифференцируем его:

$$\frac{dy}{dx} = u + x \cdot \frac{du}{dx}$$

Подставим полученное выражение в (6):

$$u + x \cdot \frac{du}{dx} = \varphi(u) \Rightarrow x \cdot \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$$

В полученном уравнении легко разделяются переменные:

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Получили уравнение с разделенными переменными, откуда:

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + \tilde{n}$$

Получили общее решение исходного уравнения, если  $\varphi(u) - u \neq 0$ ,  $x \neq 0$ .

## § 5. Уравнения, приводящиеся к однородному.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$$

1) Случай: если  $c = c_1 = 0$ , то

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by}{a_1x + b_1y}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{y}{x}}{a_1 + b_1\frac{y}{x}}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Получили однородное уравнение.

2) Случай: если по крайней мере одно из чисел

$c$  или  $c_1 \neq 0$ , и  $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$  тогда путем

ВВЕДЕНИЯ НОВЫХ НЕИЗВЕСТНЫХ:

$$x = X + h$$

$$y = Y + k,$$

где:  $h$  и  $k$  – решения системы:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$

данное уравнение сводится к однородному.

Покажем это:

$$dx = dX$$

$$dy = dY.$$

Подставим в исходное уравнение:

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY + \overbrace{ah + bk + c}^{= 0}}{\underbrace{a_1X + b_1Y + a_1h + b_1k + c_1}_{= 0}}\right)$$

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY + c}{a_1X + b_1Y + c_1}\right) = \varphi\left(\frac{Y}{X}\right)$$

Получили однородное уравнение относительно неизвестной функции  $Y$  и:

$$u = \frac{Y}{X}$$

3) Случай: если одно из чисел  $c$  или  $c_1 \neq 0$ , а

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$$

тогда  $ab_1 = a_1b \Rightarrow \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = k \Rightarrow a_1 = ak$  и  $b_1 = bk$ ,

$$\text{тогда: } \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{k(ax + by) + c_1}\right)$$

путём введения новой функции

$$z(x) = ax + by$$

данное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.



Покажем это:

$$z(x) = ax + by \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \left( \frac{dz}{dx} - a \right)$$

Подставим все в исходное уравнение:

$$\frac{1}{b} \left( \frac{dz}{dx} - a \right) = f \left( \frac{z + c}{kz + c} \right) \Rightarrow \frac{1}{b} \left( \frac{dz}{dx} - a \right) = \varphi(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} - a = b\varphi(z) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = b\varphi(z) + a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{b\varphi(z) + a} = dx \Rightarrow \int \frac{dz}{b\varphi(z) + a} = \int dx + c$$

Получили общий интеграл.

## § 6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

**Определение 10.** Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (7)$$

где  $P(x)$  и  $Q(x)$  - непрерывные функции, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка (относительно неизвестной функции  $y(x)$ ).

Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций:

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

где одну функцию можно взять произвольно с таким расчетом, чтобы уравнение упростилось, а вторую подобрать так, чтобы произведение этих двух функций являлось решением.

Найдем:

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Подставим всё в (7):

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$

$$u \frac{dv}{dx} + v \left( \frac{du}{dx} + P(x)u \right) = Q(x) \quad (*)$$

Подберем функцию  $u$  так, чтобы:

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$$

Для этого в качестве  $u$  возьмем какое-либо решение уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} + P(x)u = 0 &\Rightarrow \frac{du}{u} = -P(x)dx \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln u = -\int P(x)dx \Rightarrow u = e^{-\int P(x)dx} \end{aligned}$$

Подставим полученное значение  $u$  в (\*):

$$e^{-\int P(x)dx} \frac{dv}{dx} = Q(x) \Rightarrow dv = Q(x)e^{-\int P(x)dx} dx \Rightarrow$$

$$\int dv = \int Q(x)e^{-\int P(x)dx} dx + c \Rightarrow v = \int Q(x)e^{-\int P(x)dx} dx + c$$

Общее решение:

$$y = u \cdot v = \\ = \left( e^{-\int P(x)dx} \right) \cdot \left( \int Q(x)e^{-\int P(x)dx} dx + c \right)$$

**Замечание:** Уравнение вида:

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$$

относительно  $x(y)$ . Его решение ищется в виде:

$$x(y) = u(y) \cdot v(y)$$

## § 7. Уравнение Бернулли.

**Определение 11.** Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^\alpha \quad (8)$$

где  $P(x)$  и  $Q(x)$  - непрерывные функции и  $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ , называется уравнением Бернулли.

Уравнение Бернулли сводится к линейному:  
делим все члены уравнения на  $y^\alpha$ :

$$y^{-\alpha} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x) \quad (**)$$

Обозначим:  $y^{1-\alpha} = z$  и продифференцируем:

$$(1-\alpha)y^{-\alpha} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \Rightarrow y^{-\alpha} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Подставим полученное выражение в уравнение

(\*\*):

$$\frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x)$$

Получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции  $z(x)$ .