ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. СИСТЕМЫ МНОЖЕСТВ

Равенство вида $A = \bigcup\limits_{n=1} A_n$ будем называть ***разложением множества*** A (***конечным*** или ***бесконечным***), если $\forall i \neq j \ A_i \cap A_j = \varnothing$.

Кольцом K	***Полукольцом*** S
называется непустой класс множеств, если он замкнут относительно объединения и разности.	называется непустой класс множеств, если он замкнут относительно пересечения и разность допускает *конечное* разложение по элементам класса S.

Свойства

Всякое кольцо является полукольцом,	Всякое полукольцо
содержит $\varnothing$, замкнуто относительно операций	содержит $\varnothing$, замкнуто относительно операций
$\cup$, $\setminus$, $\cap$, $\div$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n}$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n}$	$\cap$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n}$

Для любого $M \neq \varnothing$ существует ***наименьшее кольцо*** $K(M)$, ***содержащее*** M.

$K(M)$ содержит те, и только те множества, которые либо входят в M, либо получаются из множеств класса M посредством конечного числа $\cup$, $\setminus$ (а так же $\cap$ и $\div$).

Если S – полукольцо, то $K(S)$, совпадает с системой множеств, допускающих *конечное* разложение по элементам множества S.

1.1. СИСТЕМЫ МНОЖЕСТВ

Непустой класс множеств K называется ***кольцом***, если

$$\forall A, B \in K \quad A \cup B \in K \text{ и } A \setminus B \in K.$$

Свойства колец

1. Всякое кольцо содержит $\varnothing$.

2. Всякое кольцо замкнуто относительно операций $\cap$ и $\div$.

3. Всякое кольцо замкнуто относительно *конечных* объединений и пересечений, т.е. если $\forall i \; A_i \in K$, то $\bigcup_{i=1}^{m} A_i \in K$ и $\bigcap_{i=1}^{m} A_i \in K$.

4. Пересечение любого количества колец является кольцом.

5. Для любого непустого класса M существует ***наименьшее кольцо*** $K(M)$, ***содержащее*** M. Это кольцо включает в себя те, и только те множества, которые либо входят в M, либо получаются из множеств класса M посредством *конечного* числа операций $\cup$, $\setminus$ (а так же, в силу свойства 2, $\cap$ и $\div$).

Непустой класс множеств K называется ***кольцом***, если

$$\forall A, B \in K \quad A \cup B \in K \text{ и } A \setminus B \in K .$$

Свойства колец

1. Всякое кольцо содержит $\varnothing$.

2. Всякое кольцо замкнуто и относительно операций $\cap$ и $\div$.

3. Всякое кольцо замкнуто относительно конечных объединений и пересечений, т.е. если $\forall i \ A_i \in K$, то $\bigcup_{i=1}^{m} A_i \in K$ и $\bigcap_{i=1}^{m} A_i \in K$.

4. Пересечение любого количества колец является кольцом.

◄ 1. $A \setminus A = \varnothing$

2. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

4. Пусть $K = \bigcap_i K_i$, где $\forall i \ K_i$ – кольцо. Тогда:

$K \neq \varnothing$, так как $\varnothing \in K$;

$$A, B \in K \ \Rightarrow \ \forall i \ A, B \in K_i \ \Rightarrow \ \forall i \ A \cup B \in K_i \text{ и } A \setminus B \in K_i \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ A \cup B \in K \text{ и } A \setminus B \in K . ►$$

Равенство вида $A = \bigcup_{n=1} A_n$ будем называть ***разложением множества** A **на элементы класса** S* (***конечным*** или ***бесконечным***), если

$$\forall n\ A_n \in S \quad \text{и} \quad \forall i \neq j\ \ A_i \cap A_j = \varnothing$$

Класс S называется ***полукольцом***, если $\forall A, B \in S \quad A \cap B \in S$ и разность $A \setminus B$ допускает *конечное* разложение $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \in S$.

Свойства полуколец

1. Всякое полукольцо содержит $\varnothing$. $\square\ \ A \setminus A = \varnothing \cup \varnothing$.$\square$

2. Всякое полукольцо замкнуто относительно *конечного* пересечения.

3. Всякое кольцо является полукольцом. Обратное утверждение, в общем случае, неверно.

4. Если S – полукольцо, то наименьшее кольцо $K(S)$, содержащее S, совпадает с системой множеств, допускающих *конечное* разложение на элементы класса S.

Кольцом K	***Полукольцом*** S
называется непустой класс множеств, если он замкнут относительно	
объединения и разности.	пересечения и разность допускает *конечное* разложение по элементам класса S.

Свойства

Всякое кольцо является полукольцом,	Всякое полукольцо
содержит $\varnothing$,	
замкнуто относительно операций	
$\cup$, $\setminus$, $\cap$, $\div$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n}$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n}$	$\cap$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n}$

Для любого $M \neq \varnothing$ существует ***наименьшее кольцо*** $K(M)$, ***содержащее*** M.

$K(M)$ содержит те, и только те множества, которые либо входят в M, либо получаются из множеств класса M посредством конечного числа $\cup$, $\setminus$ (а так же $\cap$ и $\div$).

Если S – полукольцо, то $K(S)$, совпадает с системой множеств, допускающих *конечное* разложение по элементам множества S.

Кольцо K называется σ***-кольцом*** (***борелевским кольцом***), если

$$\forall A_i \in K \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in K .$$

Свойства σ-колец

1-4. Всякое σ-кольцо обладает всеми свойствами колец.

5. Всякое σ-кольцо замкнуто относительно *счетного* пересечения.

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A_1 \setminus A_n \right).$$

6. Пересечение любого количества σ-колец – σ-кольцо.

7. Для любого непустого класса M существует ***наименьшее борелевское кольцо*** (***борелевское замыкание*** класса M), содержащее M. Это кольцо включает в себя те, и только те множества, которые либо входят в M, либо получаются из элементов класса M посредством *конечной* или *счетной* совокупности операции $\cup$, \ (а так же, в силу свойства 2, $\cap$ и $\div$).

Пусть $M \neq \varnothing$.

Множество $A_0 = \bigcup\limits_{A \in M} A$ называют ***единицей*** класса M, если $A_0 \in M$.

Кольцо (σ-кольцо) множеств с единицей называется ***алгеброй*** (σ***-алгеброй***).

Свойства алгебры (σ-алгебры)

1. Всякая алгебра (σ-алгебра) является кольцом (σ-кольцом), а значит, обладает всеми свойствами колец (σ-колец).

2. Если A_0 – единица алгебры K, то $\forall A \in K \;\; A_0 \setminus A \in K$.

Кольцо K называется δ***-кольцом***, если $\forall A_i \in K \ \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in K$.

Свойства δ-колец

1-4. Всякое δ-кольцо обладает всеми свойствами колец.

5а. Всякое σ-кольцо является δ-кольцом.

Следует из 5-го свойства σ-колец.

5б. Обратное в общем случае неверно.

Пусть K – класс всех *ограниченных* множеств пространства $\mathbb{R}^n$. Класс K является δ-кольцом, но не является σ-кольцом, так как счетное объединение орграниченных множеств может быть неограниченным множеством.

5в. δ-кольцо с единицей является σ-кольцом с единицей, а значит, и σ-аглеброй.

Пусть A_0 единца кольца K. Если $\forall A_i \in K$, то

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(A_0 \setminus A_i \right) \in K.$$

6. Пересечение любого количества δ-колец – δ-кольцо.

Примеры:

1. Если $A \neq \varnothing$, то система $\{A, \varnothing\}$ – σ-алгебра с единицей $A_0 = A$.

2. Для любого множества A булеан (система всех его подмножеств) является σ-алгеброй с единицей $A_0 = A$.

3. Система всех конечных (не более чем счетных) подмножеств произвольного фиксированного множества A является кольцом множеств. Это кольцо будет σ-алгеброй тогда и только тогда, когда множество A само конечно (не более чем счетно).

4. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда

– множество всех интервалов (a,b), отрезков $[a,b]$, полуинтервалов $[a,b)$ и $(a,b]$ на числовой прямой[1] является полукольцом, но не является кольцом,

– множество всех интервалов (a,b), отрезков $[a,b]$, полуинтервалов $[a,b)$ и $(a,b]$ на числовой прямой и конечных систем таких полуинтервалов является кольцом,

– множество всех промежутков числовой оси и конечных систем таких промежутков является σ-алгеброй с единицей $\mathbb{R}$.

---

[1] При этом в число интервалов включается «пустой» интервал (a,a), а в число отрезков – отрезок, состоящий из одной точки $[a,a]$.

5. Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Тогда

– множество всех прямоугольников вида $[a,b)\times[c,d)$ является полукольцом, но не является кольцом,

– множество всех прямоугольников вида $[a,b)\times[c,d)$ и конечных систем таких прямоугольников является кольцом.

6. Система всех ограниченных множеств $A \subset \mathbb{R}^n$ является кольцом множеств, не содержащим единицы.

7. Система всех ограниченных подмножеств произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ является кольцом множеств. Это кольцо будет алгеброй тогда и только тогда, когда множество A ограничено.

1.2. КЛАССЫ МНОЖЕСТВ $\sigma(M)$ И $\delta(M)$

Пусть M – непустой класс множеств. Тогда $\sigma(M)$ ($\delta(M)$) – класс всевозможных *счетных* объединений (пересечений) множеств класса M. Множества из класса $\sigma(M)$ ($\delta(M)$) будем называть σ-множествами (δ-множествами).

Свойства классов $\sigma(M)$ и $\delta(M)$

1. Класс $\sigma(M)$ ($\delta(M)$ содержит все *конечные* объединения (пересечения) множеств из M, в частности $M \subset \sigma(M)$, $M \subset \delta(M)$.

2. *Конечное* или *счетное*
– объединение σ-множеств есть σ-множество,
– пересечение δ-множеств есть δ-множество.

3. Если M – кольцо, то *конечное*
– пересечение σ-множеств есть σ-множество,
– объединение δ-множеств есть δ-множество.

Замечание. *Счетное*
– пересечение σ-множеств может **не** быть σ-множеством,
– объединение δ-множеств может **не** быть δ-множеством.
А значит, δ-множество может не быть σ-множеством и наоборот.

Замечание. *Счетное*

– пересечение σ-множеств может **не** быть σ-множеством,

– объединение δ-множеств может **не** быть δ-множеством.

А значит, δ-множество может не быть σ-множеством и наоборот.

Пусть M – кольцо всевозможных полуинтервалов $[\alpha,\beta)$ и конечных систем таких полуинтервалов без общих точек. Тогда

1. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left[c, c+\dfrac{1}{n}\right)=\{c\},\ c\in\mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad \{c\}\in\delta(M)$.

Но $\{c\}\notin\sigma(M)$ (одноточечное множество нельзя представить в виде объединения полуинтервалов).

2. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left[c, (c+2)-\dfrac{1}{n}\right)=[c,\ +2],\ c\in\mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad [c,\ +2]\in\sigma(M)$.

Но $[c,\ +2]\notin\delta(M)$ (отрезок нельзя представить в виде пересечения полуинтеравалов).

4. Если $M_1 \subset M_2$, то $\sigma(M_1) \subset \sigma(M_2)$, $\delta(M_1) \subset \delta(M_2)$.

5. Если M – кольцо, $Q \in \sigma(M)$, $P \in \delta(M)$, то $Q \setminus P \in \sigma(M)$, $P \setminus Q \in \delta(M)$.

6. Пусть M – кольцо. Тогда

а) Всякое $Q \in \sigma(M)$ можно представить в виде счетного разложения

$$Q = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ A_n \in M.$$

б) Всякое $Q \in \sigma(M)$ можно представить в виде $Q = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in M$, где

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots .$$

в) Всякое $P \in \delta(M)$ можно представить в виде $P = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in M$, где

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots .$$

7. Если H – полукольцо, а $M = K(H)$ – кольцо, минимальное над H, то $\sigma(M) = \sigma(H)$.

8. Если M – борелевское кольцо, то $M = \sigma(M) = \delta(M)$.

9. Если $M = \delta(M)$, то $\sigma(M)$ – борелевское кольцо (и притом минимальное над M).

Пусть

$\mathcal{F}$ – класс замкнутых множеств пространства $\mathbb{R}^n$,

$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$ – борелевское замыкание класса $\mathcal{F}$.

Множество $\mathbb{R}^n$ замкнуто и является единицей класса $\mathcal{F}$, следовательно, $\mathcal{B}$ – ***борелевская алгебра***.

Множества, входящие в класс $\mathcal{B}$, называются ***борелевскими множествами*** или $\mathcal{B}$–***множествами***.

Можно доказать, что класс $\mathcal{B}$ одновременно является борелевским замыканием класса $\mathcal{G}$ всех открытых множеств пространства $\mathbb{R}^n$.

Следовательно, все множества, полученные из открытых и замкнутых множеств пространства $\mathbb{R}^n$ с помощью конечного или счетного числа операций $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\div$ являются $\mathcal{B}$–***множествами***.

Примеры борелевских множеств

а) $A=(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]$,

б) $A=[a,+\infty)$,

в) $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(n-\dfrac{1}{3^n},n+\dfrac{1}{2^n}\right]$,

г) $A=\big((0,3]\times[1,2)\big)\setminus(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$,

д) $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,x,y\in\mathbb{R},0\le y\le x^2,\ 1<x<2\right\}$,

1.3. ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВА

Говорят, что на классе K задана ***функция множества*** φ, если для каждого множества $A \in K$ определено число $\varphi(A) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Функция φ называется:

– ***неотрицательной***, если $\forall A \in K \ \ \varphi(A) \geq 0$;

– ***монотонной***, если $A \subset B$, то $\varphi(A) \leq \varphi(B)$;

– ***аддитивной***, если $\forall A, B \in K$ из того, что $A \cap B = \varnothing$, следует

$$\forall A, B \in K \quad A \cap B = \varnothing \ \Rightarrow \ \varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B);$$

– ***счетно-аддитивной*** (или σ-***аддитивной***), если $\forall A_i \in K$ из того, что $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, следует

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i).$$

Теорема 1.1. Всякая аддитивная функция φ, заданная на полукольце (в частности, кольце) K, обладает свойствами:

– ***конечной аддитивности*** – если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно непересекающиеся множества кольца, то $\varphi\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(A_i)$.

– ***субтрактивности*** – $\forall A, B \in K$ если $A \subset B$ и $\varphi(B) < \infty$, то

$$\varphi(B \setminus A) = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Следствия: **1.** $\varphi(\varnothing) = 0$.

2. $\forall A, B \in K \quad \varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(A \cap B)$,

3. $\forall A, B \in K \quad \varphi(B \setminus A) = \varphi(B) - \varphi(A) + \varphi(A \setminus B)$.

Теорема 1.2. Всякая неотрицательная аддитивная функция φ, заданная на полукольце (в частности, кольце) K, является монотонной.

Теорема 1.2. Всякая неотрицательная аддитивная функция φ, заданная на полукольце (в частности, кольце) K, является монотонной.

Пусть $A, B \in K$, $A \subset B$, тогда

$$B = A \cup (B \setminus A),\; A \cap (B \setminus A) = \varnothing .$$

Так как K полукольцо, то существует разложение

$$B \setminus A = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i ,\; Q_i \in K, i = \overline{1,n} .$$

Поэтому, в силу аддитивности и неотрицательности, получим

$$\varphi(B) = \varphi(A) + \varphi(B \setminus A) = \varphi(A) + \sum_{i=1}^{n} \varphi(Q_i) \geq \varphi(A).$$

Теорема 1.3. Пусть неотрицательная аддитивная функция φ заданна на кольце K и $A, A_1, A_2, \ldots, A_n \in K$. Тогда

1) если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subset A$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(A_i) \le \varphi(A);$$

2) если $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, то $\varphi(A) \le \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(A_i)$.

Следствие. В случае σ-кольца первое утверждение будет справедливо и для $n = +\infty$. Второе утверждение будет справедливо при $n = +\infty$ тогда и только тогда, когда функция является неотрицательной и σ-аддитивной.

Теорема 1.3. Пусть неотрицательная аддитивная функция φ заданна на кольце K и $A, A_1, A_2, \ldots, A_n \in K$. Тогда

1) если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subset A$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(A_i) \le \varphi(A)$;

2) если $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, то $\varphi(A) \le \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(A_i)$.

$\blacktriangleright$ 1) φ аддитивна $\Rightarrow$ $\varphi(A) = \varphi\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) + \varphi\left(A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(A_i) + \varphi\left(A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)$.

φ неотрицательна $\Rightarrow$ $\varphi\left(A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \ge 0$.

2) $\forall A, B \in K$ $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(A \cap B) \le \varphi(A) + \varphi(B)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по индукции получим $\varphi\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(A_i)$.

Функция аддитивна и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \supset A$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi(A) = \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) - \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \setminus A\right) \le \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \varphi(A_i). \blacktriangleleft$$

Следствие. В случае σ-кольца первое утверждение будет справедливо и для $n=+\infty$. Второе утверждение будет справедливо при $n=+\infty$ тогда и только тогда, когда функция является неотрицательной и σ-аддитивной.

Для доказательства первого утверждения достаточно в неравенстве $\sum_{i=1}^{n}\varphi(A_i)\le\varphi(A)$ перейти к пределу при $n\to+\infty$.

Докажем второе утверждение. Из 1) и 2) очевидным образом вытекает σ-аддитивность. Докажем обратное. Пусть на кольце K задана σ-аддитивная неотрицательная функция φ. Множества

$$B_1=A_1,\ B_n=A_n\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\ .$$

принадлежат кольцу, попарно не пересекаются, $\forall n\ B_n\subset A_n$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$.

Учитывая, что $A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$, в силу монотонности и σ-аддитивности функции φ получим $\varphi(A)\le\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(B_i)\le\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(A_i)$.

Теорема 1.4 (непрерывность счетно-аддитивной функции, заданной на кольце). Пусть φ – счетно-аддитивная функция, определенная на кольце K, $A, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in K$. Тогда,

1) если $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ и $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi(A)$;

2) если $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ и $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi(A)$.

Следствие.

1) Если $\forall i\ A_i \in K$ и $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in K$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \varphi(A)$.

2) Если $\forall i\ A_i \in K$ и $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in K$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \varphi(A)$.

Теорема 1.4 Пусть φ – счетно-аддитивная функция, определенная на кольце K, $A, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in K$. Тогда,

1) если $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ и $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi(A)$;

2) если $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ и $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi(A)$.

$\blacktriangleright$ 1) Пусть $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ $(n = 2, 3, \dots)$. Тогда

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \quad A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \text{ и при } i \neq j \;\; B_i \cap B_i = \varnothing.$$

Все множества в разложениях принадлежат кольцу K $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \varphi(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(B_i) \text{ и } \varphi(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(B_i). \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi(A).$$

2) Пусть $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$ $(n = 2, 3, \dots)$. Тогда A_n можно представить в виде разложения $A_n = A \cup \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} B_i$, в котором все множества принадлежат кольцу K. $\Rightarrow$

$$\varphi(A_n) = \varphi(A) + \sum_{i=n}^{\infty} \varphi(B_i).$$

$\sum\limits_{i=n}^{\infty} \varphi(B_i)$ – остаток сходящегося ряда $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi(A)$. $\blacktriangleleft$

Теорема 1.4 Пусть φ – счетно-аддитивная функция, определенная на кольце K, $A, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in K$. Тогда,

1) если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ и $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi(A)$;

2) если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ и $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi(A)$.

Следствие.

1) Если $\forall i\ A_i \in K$ и $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in K$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \varphi(A)$.

2) Если $\forall i\ A_i \in K$ и $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in K$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \varphi(A)$.

1) Пусть $\tilde{A}_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. Тогда $\forall n\ \tilde{A}_n \in K$ и $\tilde{A}_1 \subset \tilde{A}_2 \subset \ldots \subset \tilde{A}_n \subset \ldots$.
Далее, применяя теорему, получим требуемое утверждение.

2) Пусть $\tilde{A}_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$. Тогда $\forall n\ \tilde{A}_n \in K$ и $\tilde{A}_1 \supset \tilde{A}_2 \supset \ldots \supset \tilde{A}_n \supset \ldots$.
Далее, применяя теорему, получим требуемое утверждение.