01.02.21.

Тема:
Комплексные числа и координатная плоскость. Решение примеров на построение комплексных чисел на комплексной плоскости.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://youtu.be/vyZsL_khIKY

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

§ 33. Комплексные числа и координатная плоскость

Геометрической моделью множества R действительных чисел является числовая прямая. Любому действительному числу соответствует единственная точка на числовой прямой, и наоборот, каждой точке на прямой соответствует единственное действительное число (см. § 4). При переходе к геометрической модели множества C комплексных чисел требуется, как минимум, еще одно измерение: ведь все точки прямой уже «заняты» действительными числами. Оказывается, геометрической моделью множества C является *координатная плоскость*. Каждому комплексному числу $z = a + bi$ можно естественным образом поставить в соответствие точку $(a; b)$ координатной плоскости. Тогда любому комплексному числу соответствует единственная точка на координатной плоскости, и наоборот, каждая точка плоскости является «изображением» единственного комплексного числа. На рисунке 150 отмечены на координатной плоскости комплексные числа:

$$z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = -4 + i,\ z_3 = -4 - i,\ z_4 = 5 - 2{,}5i.$$

При таком соответствии действительному числу $a = a + 0 \cdot i$ соответствует точка $(a; 0)$ с нулевой ординатой. Значит, действительные числа изображаются точками оси абсцисс.

Мнимой единице $i = 0 + 1 \cdot i$ соответствует точка $(0; 1)$ на оси ординат, и вообще точками этой оси будут изображаться все чисто

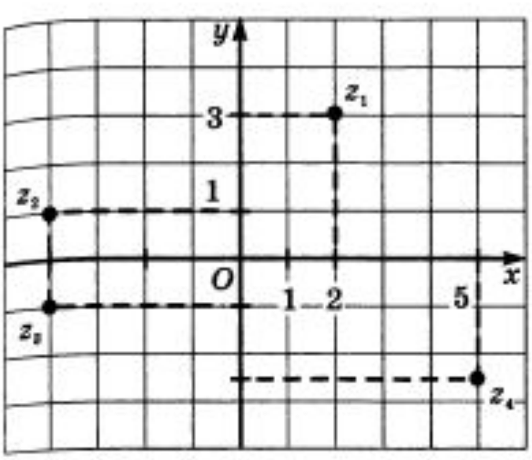

Рис. 150

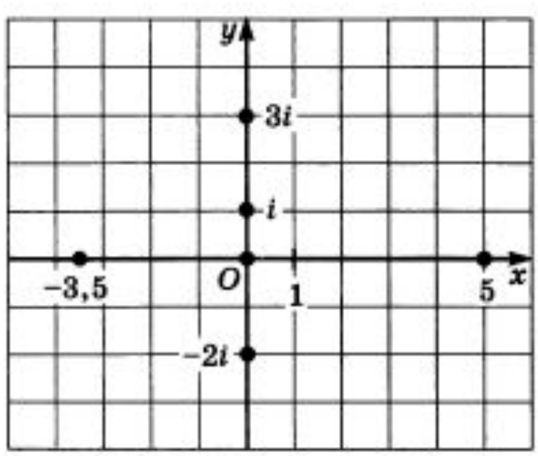

Рис. 151

мнимые числа. На рисунке 151 отмечены на координатной плоскости некоторые действительные и чисто мнимые числа: 0, 5, $-3{,}5$, i, $3i$, $-2i$.

Соответствие между множеством $\boldsymbol{R}$ действительных чисел и числовой прямой настолько привычно для нас, что мы зачастую не делаем никакой разницы между числом и точкой на прямой, изображающей это число. Например, все однозначно воспринимают утверждение: «$\sqrt{2}$ лежит левее 2», хотя, формально, полагалось бы говорить, что «точка, соответствующая числу $\sqrt{2}$, расположена на числовой прямой левее точки, соответствующей числу 2».

В случае с комплексными числами столь же естественно выглядит их, как говорят математики, *отождествление* с точками координатной плоскости. Например, фраза: «Число z_1 лежит в первой координатной четверти» — просто означает, что и действительная и мнимая части комплексного числа $z_1 = a + bi$ положительны (рис. 152). Слова: «z_2 лежит на оси ординат» — являются переводом на геометрический язык того факта, что число z_2 чисто мнимое (рис. 152), а «...комплексное число z_3 расположено выше биссектрисы I и III координатных четвертей...» — показывают, что мы имеем дело с комплексным числом $z_3 = a + bi$, у которого мнимая часть больше действительной части (рис. 152).

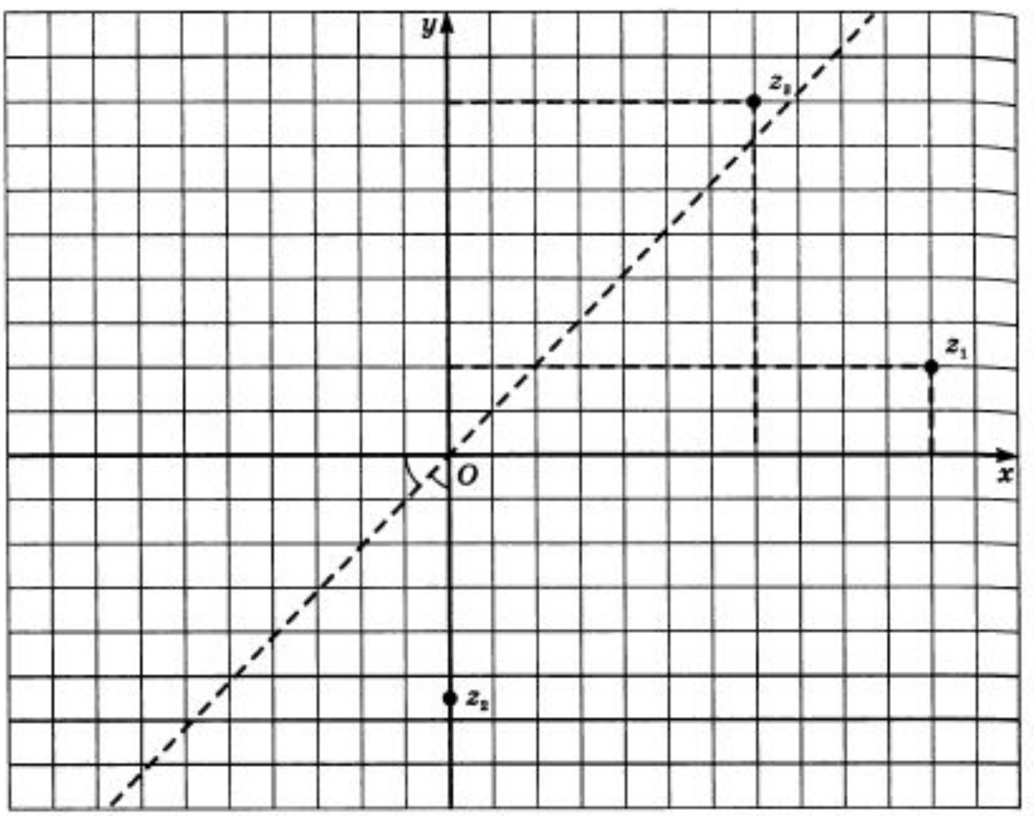

Рис. 152

Любую точку на координатной плоскости можно воспринимать двояко: алгебраически, как упорядоченную пару $(a; b)$ действительных чисел, и как вектор с началом в точке $(0; 0)$ и концом в точке $(a; b)$. При векторном подходе к изображению комплексных чисел наглядный смысл получают операции сложения и вычитания двух комплексных чисел:
а) *вектор, соответствующий сумме* $z_1 + z_2$ *двух комплексных чисел, равен сумме векторов, соответствующих числам* z_1 *и* z_2 (рис. 157, *а*);
б) *вектор, соответствующий разности* $z_1 - z_2$ *двух комплексных чисел, равен разности векторов, соответствующих числам* z_1 *и* z_2 (рис. 157, *б*).

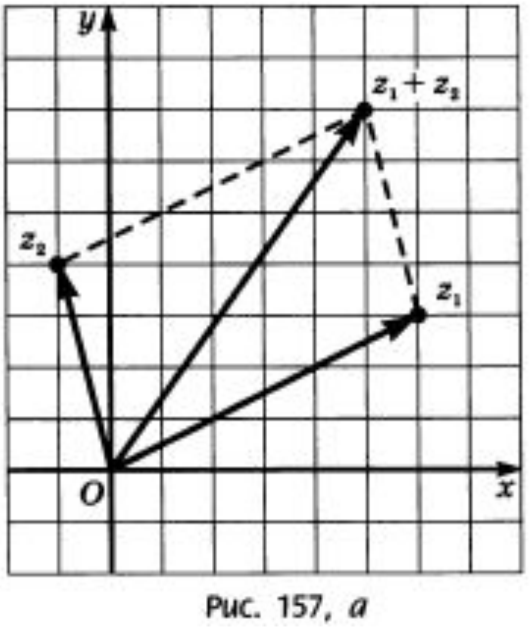

Рис. 157, *а*

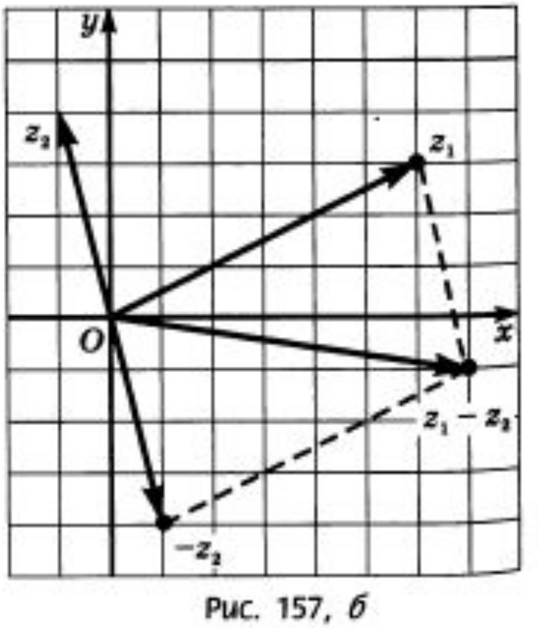

Рис. 157, *б*

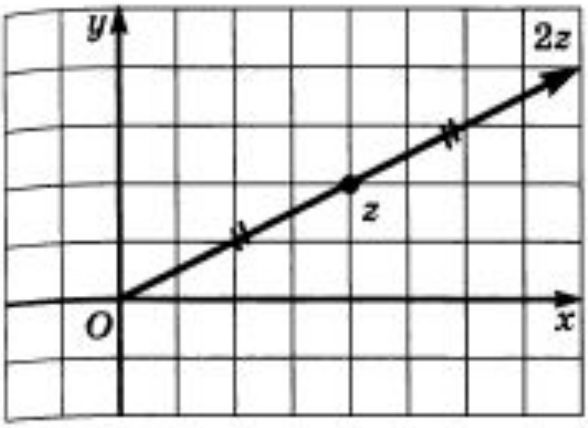

Рис. 158, *а*

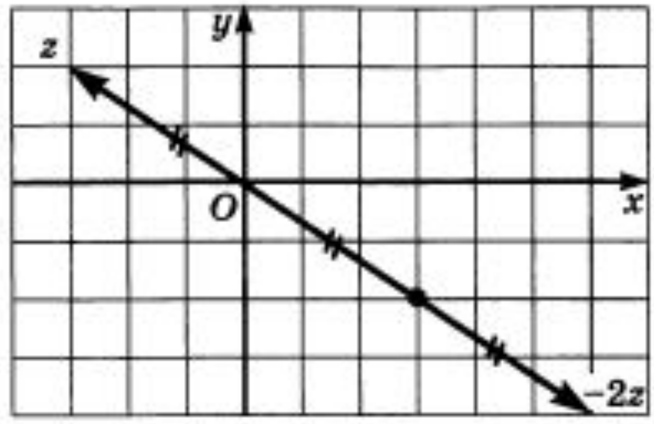

Рис. 158, *б*

Точно так же дело обстоит и с умножением комплексных чисел на действительные числа: *вектор, соответствующий произведению $k \cdot z$ действительного числа k на комплексное число z, равен произведению вектора, соответствующего числу z, на число k* (рис. 158, *а*, *б*).

Пример. Для комплексных чисел $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = -1 + 2i$ изобразить на координатной плоскости числа: а) $2z_1$; б) $-3z_2$; в) $z_1 + z_2$; г) $2z_1 - z_2$.

Решение. Соответствующие построения выполнены на рисунках 159, *а*, *б*, *в*, *г*.

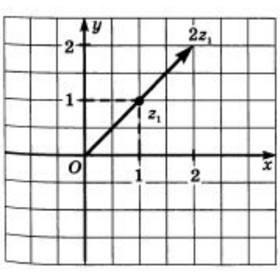

Рис. 159, *а*

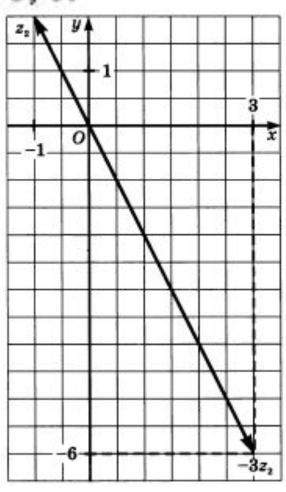

Рис. 159, *б*

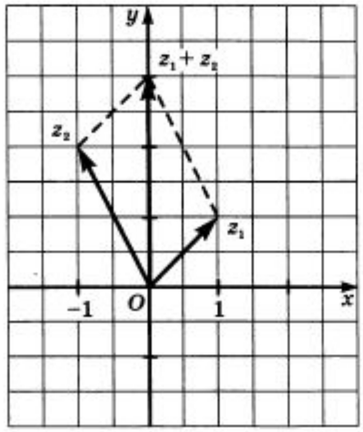

Рис. 159, *в*

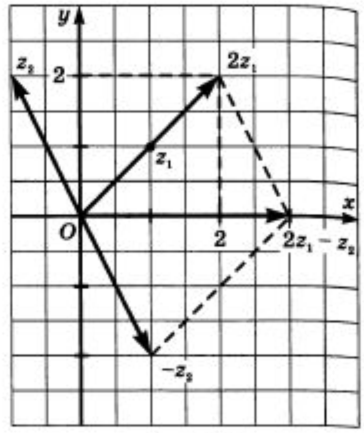

Рис. 159, *г*

Практическая часть.

33.1. а) Отметьте на координатной плоскости точки, соответствующие комплексным числам $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 + 3i$, $z_3 = -2 + 5i$, $z_4 = -9 + i$, $z_5 = -3 - 2i$.

33.2. а) Отметьте на координатной плоскости точки, соответствующие комплексным числам $z_1 = -5 - 4i$, $z_2 = 1 + 8i$, $z_3 = -2 - 4i$, $z_4 = 8 + i$, $z_5 = -1 - 8i$.
б) Соедините заданные точки последовательно отрезками. Сколько получилось точек пересечения с осями координат? Запишите комплексные числа, которым соответствуют эти точки.

33.13. Изобразите на координатной плоскости числа $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = -1 + 3i$, а также числа:
а) $3z_1$; б) $-2z_2$; в) $z_1 + z_2$; г) $3z_1 - 2z_2$.