Раздел IV
Введение в математический анализ
Глава 1
II. Функция

Мат

алг.

геом

мат. анализ

I

1) Св-ва ф-ий

2) Предел $\lim_{x \to a} f(x)$

$\frac{1}{0}$, ∞, $1^{\infty} = e$

3) Дифференциальное исчисление

dy; dx; y'; x'

Интегральные ур-я

$\prod_{n=1}^{\infty} b_n$

4) Интегральное исчисление

$\int_a^b f(x)\,dx$

5) Дифф. ур-я

6) Теория поля

ТФКП

7) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Параграф 1
Переменные величины и их свойства

к.п.н. Безотечество Мила Михайловна,
кафедра ФЕО ИЦМиМ СФУ

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

Под ***величиной*** понимают все то, что может быть измерено и выражено числом (числами).

Переменной величиной называют величину, которая принимает различные численные значения; величина, которая сохраняет одно и тоже численное значение, называется ***постоянной***.

Перем. велич.

π - постоянная величина

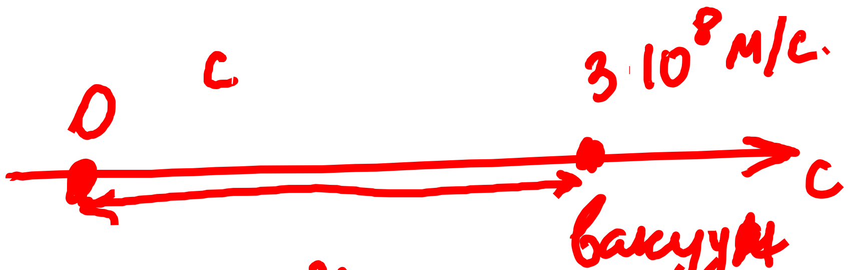
$R = 8,31$ - Газовая постоянная

$c = 3 \cdot 10^8$ м/с скорость света в вакууме

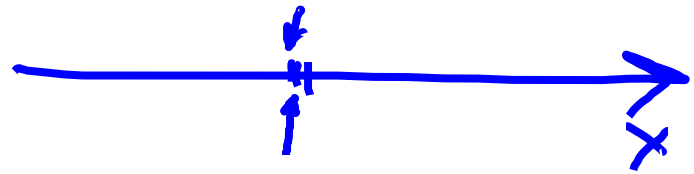
$g \approx 9,8$ м/с², но меняет в зависимости от h и от m.

$c_{ср.}$ в разл. средах

Переменная величина считается ***заданной***, если задана совокупность её значений. Совокупность значений переменной величины называется ***областью изменения*** переменной величины.



$[0; 3 \cdot 10^8)$



Переменная величина называется ***непрерывной***, если областью её изменения является некоторый интервал. Переменная величина называется ***дискретной***, если областью её изменения является множество изолированных точек.

n = число студентов. Область изменение $[0; 35]$

k = пол $[ж; м]$;

$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in Z$ k - дискретная величина

Свойства перем. величин.

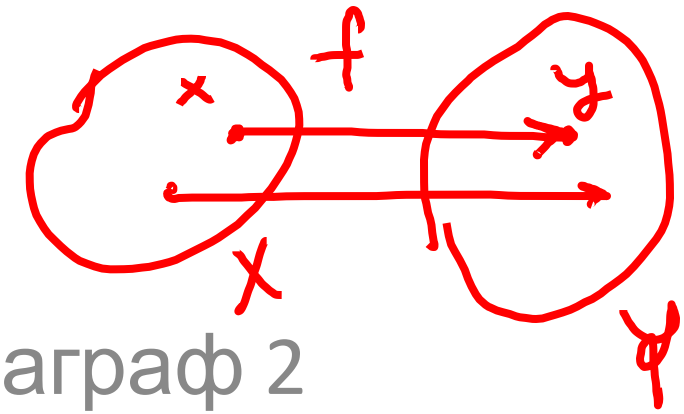
Переменная величина называется ***упорядоченной***, если из двух значений переменной величины можно указать предыдущую и последующую.

неупоряд: пол. цвет глаз

Если переменная величина в области изменения убывает или возрастает, то она называется ***монотонной***.

Если значения переменной величины таковы, что число будет больше (меньше) любого значения переменной величины, то говорят, что переменная величина ***ограниченна сверху*** (***снизу***). Переменная величина называется ***ограниченной***, если она ограничена сверху и снизу.

Раздел IV
Введение в математический анализ
Глава 1
Функция

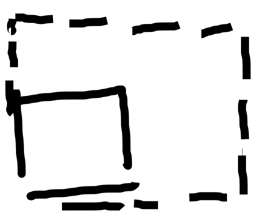


Параграф 2
Функции одной и нескольких переменных

к.п.н. Безотечество Мила Михайловна,
кафедра ФЕО ИЦМиМ СФУ

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

Чаще всего изменению одной переменной величины сопутствует **изменение** другой, более того, изменение одной **является причиной** изменения другой. В некоторых случаях изменение одной переменной величины может быть продиктовано изменением двух, трех и более величин.



a

$S=a^2$

Площадь квадрата

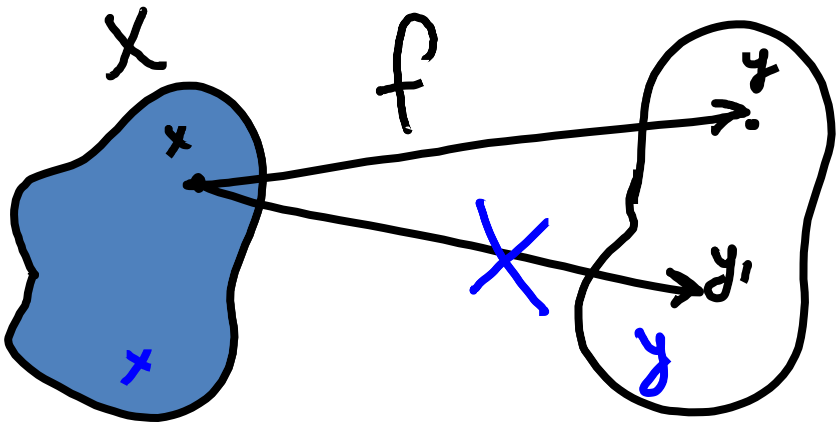
a

в

$S=a \cdot в$

Площадь прямоуголь-ника.

Если каждому значению величины $x \in X$ по некоторому закону соответствует единственное значение величины $y \in Y$, то говорят, что $y = f(x)$ задана ***функция*** x, или y что величины и связаны между собой **функциональной зависимостью**



не явл. ф-ей

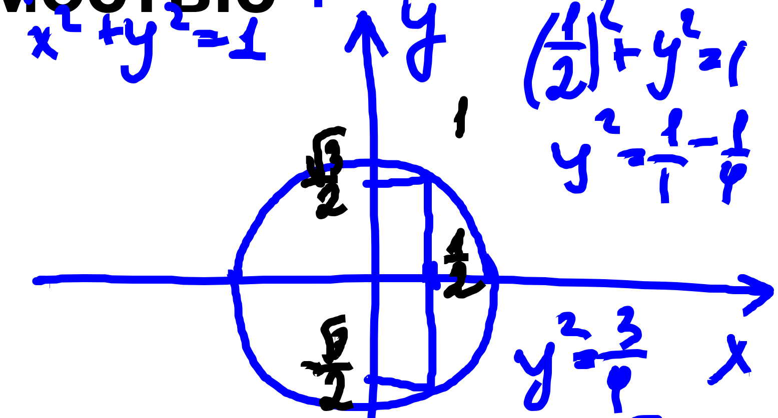
$x^2 + y^2 = 1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$

$y^2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{4}$

$y^2 = \frac{3}{4}$

$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$



Отображение не является взаимно-однозначным

При этом,

x – ***аргумент функции*** (***независимая переменная***),

y – ***значение функции*** (***зависимая переменная***),

f – ***закон соответствия***,

$y=f(x)$ – функция одной независимой переменной.

$y=y(x)$; $y=g(x)$, $y=\psi(x)$

$y=y(x_0)$ – отдельно взятое значение ф-ии (число)

Множество X называется **областью определения функции** $y=f(x)$ и обозначается $D(y)$. Множество Y называется **областью значений функции** $f(x)$ и обозначается $E(y)$.

Основные элементарные ф-ции

1) Квадратичная функция

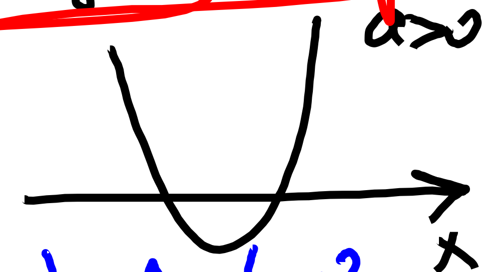
2 $y = x^2$

$y=(x-x_0)^2+y_0$

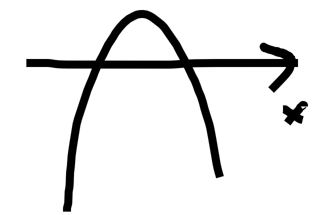
$y=ax^2+bx+c$

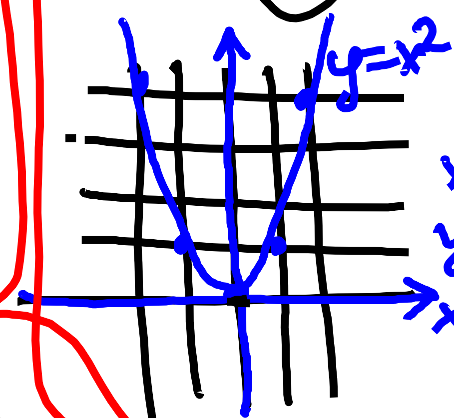
3 график

$a>0$



$a<0$





x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	2

4 $E(y)$, $D(y) = R$; $(-\infty; +\infty)$

$x \in (-\infty; +\infty)$

$[0; +\infty)$

5 четность/нет

6. монот

7. min/max

8. Периодичность.

Для функции одной переменной $y=f(x)$ областью определения $D(y)$ является интервал координатной оси или вся координатная ось.

1) Линейная
2) Квадратичная
3) Степенная
4) Показательн
$y=a^x$
5) Логарифмич.
6) Тригонометрич.

синус
косинус
тангенс
котангенс
+ arc-функции

косеканс
секанс

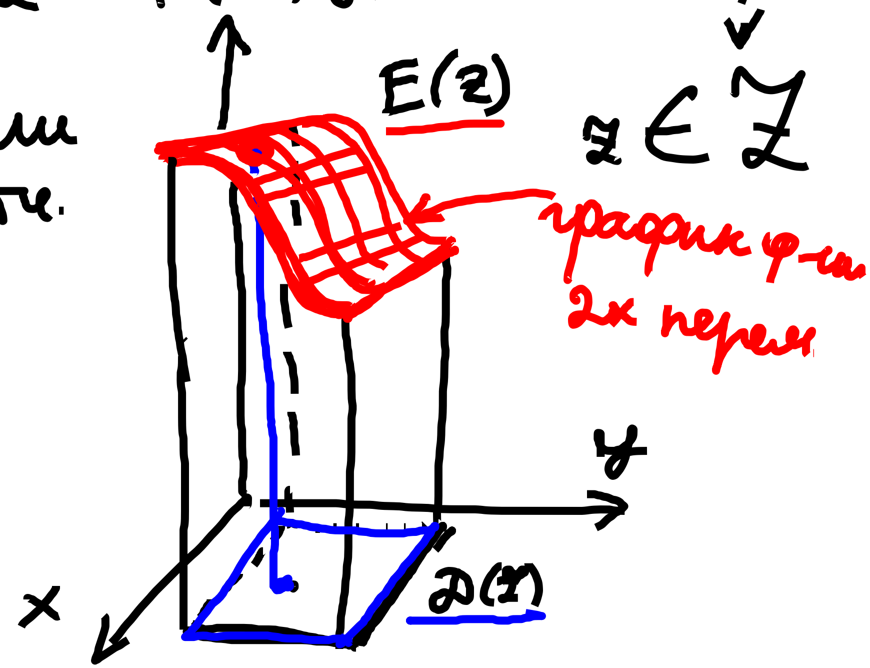
гиперболические ф-ии

Функция 2х переменных

~~Опр~~

Если каждой **паре чисел** по некоторому закону $z = f(x;y)$ соответствует единственное значение величины $z \in Z$, то говорят, что задана функция $z = f(x,y)$

$D(Z)$ – плоскость или часть плоскости.



При этом

x, y – аргументы функции (независимые переменные),

z – значение функции (зависимая переменная),

f – закон соответствия,

$z = f(x, y)$ – ***функция двух независимых переменных***,

– область определения функции,

– область значений функции.

$z \in E(z)$

$x, y \in D(z)$

$w = f(x; y; z)$ – функция 3х пер.

4 1 2 3

$D(w)$ – некое 3х мерное фиг./ /либо всё пространство

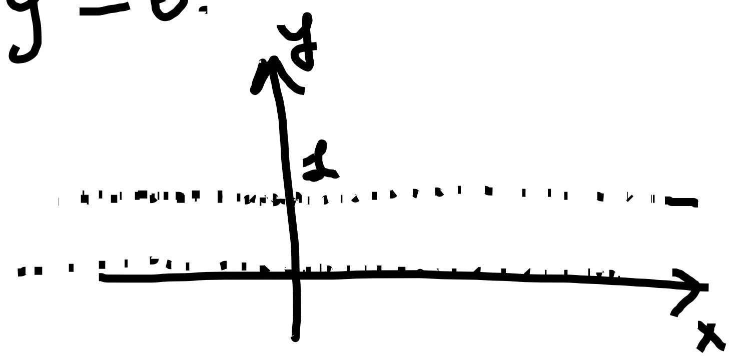
$v = f(w; x; y; z)$

Для функции двух переменных   область определения является часть координатной плоскости или вся координатная плоскость.

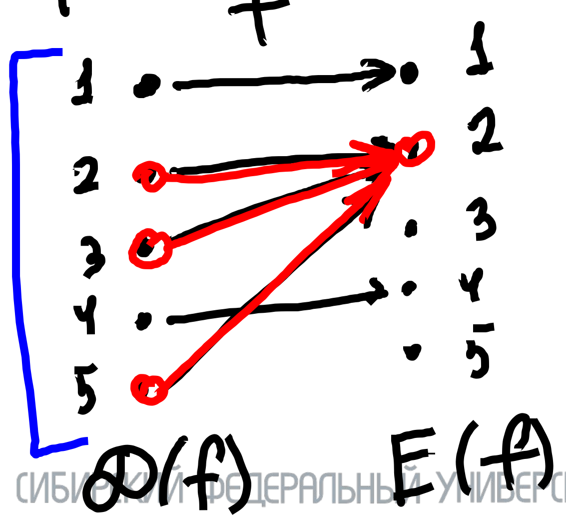
Способы зад. ф-ии

1) Словесный.

Ф-я Дирихле: для $x \in \mathbb{Q}$ $y = 1$, для $x \in \mathbb{I}$ $y = 0$.

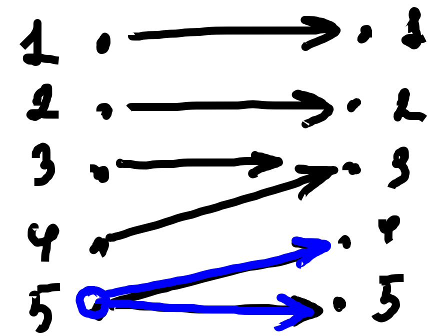


2) Граф.



$f(3) = 2$

Не явл. ф-ей.



$f(5) = ?$

Табличный способ задание ф-ии

рост	168	175	185	178			
вес	68	52	86	90			

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

1. Непрерывность
2. Четность
3. Периодичность
4. Нули функции
5. Промежутки знакопостоянства
6. Монотонность
7. Экстремумы функции
8. Точки перегиба. Выпуклость

9. Асимптоты

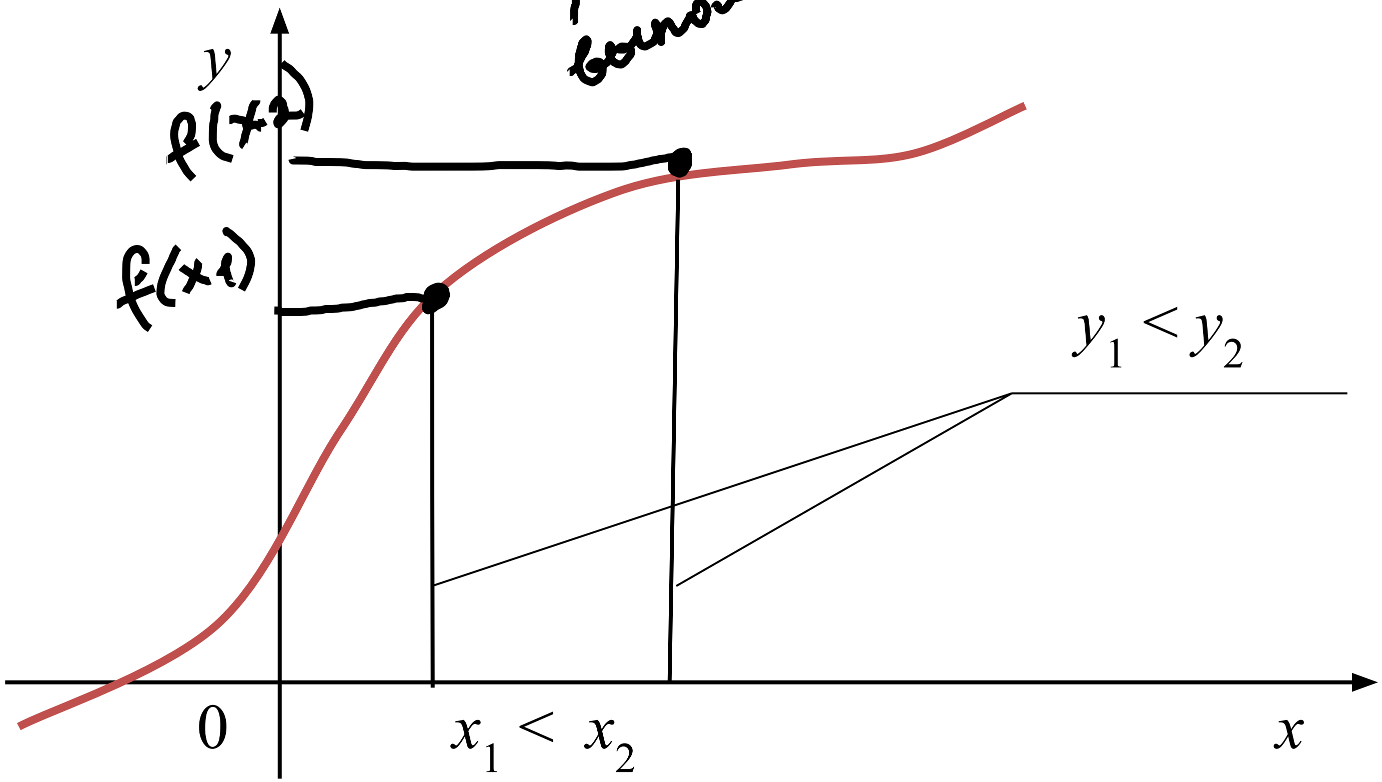
Функция $f(x)$ возрастающая, если

$$(\forall x_1, x_2 \in D(f))[x_1 \langle x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)]$$

!

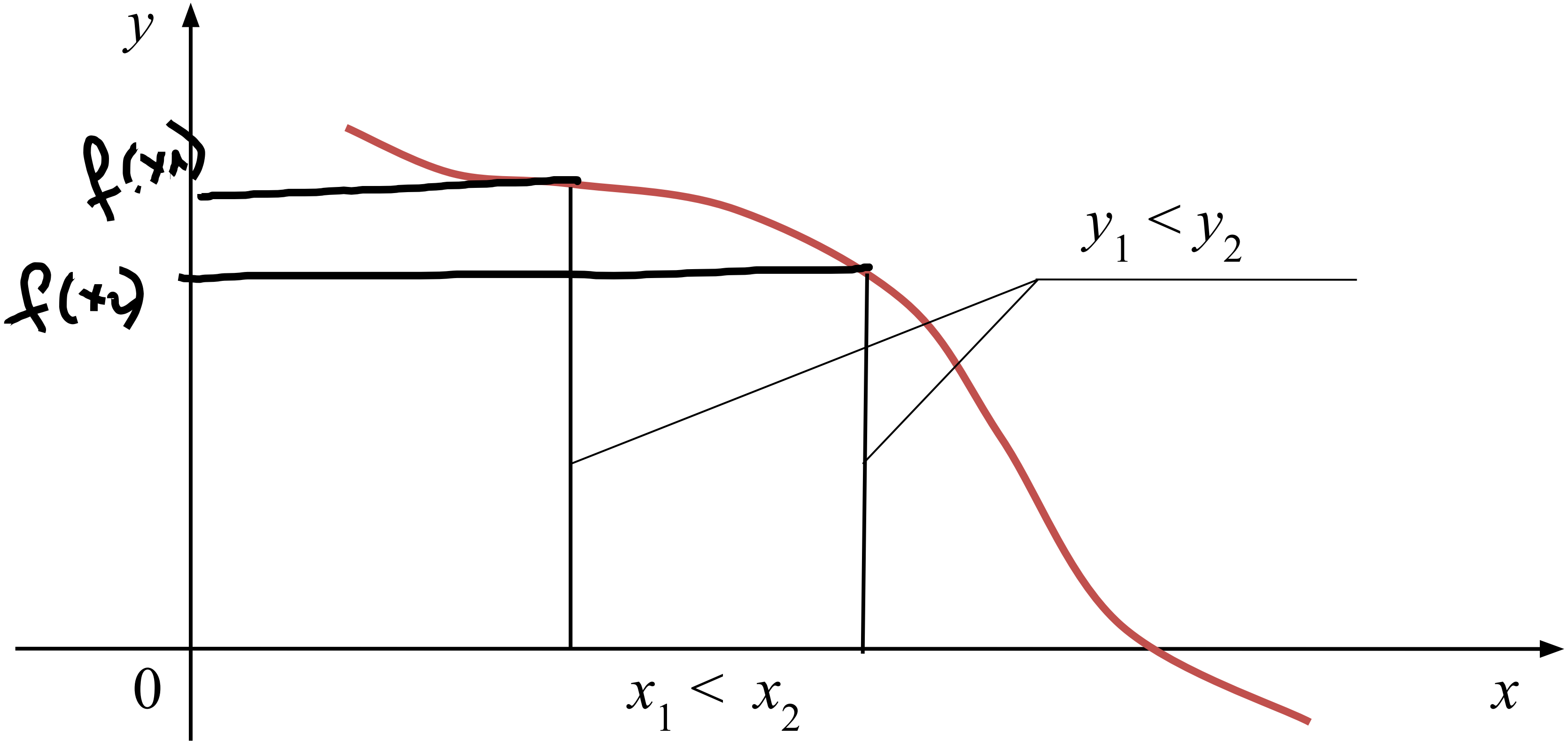
выполняется

∀



Функция $f(x)$ убывающая, если

$$(\forall x_1, x_2 \in D(f))[x_1 \langle x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)]$$



Определение. Функция $f(x)$ чётная, если

$$(\forall x \in D(f))[f(-x) = f(x)]$$

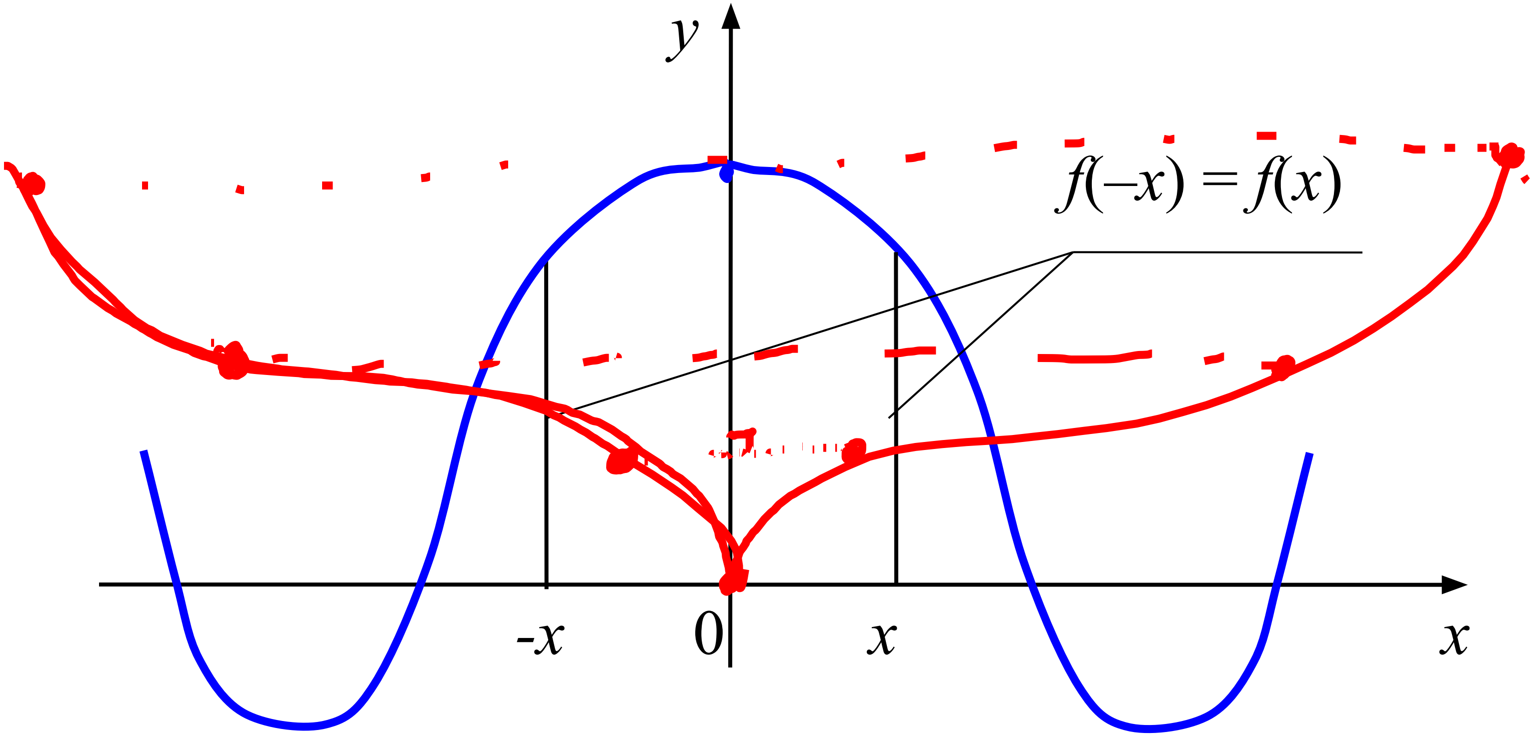


График симметричен относительно оси $0У$

осевая симметрия

Определение. Функция $f(x)$ нечётная, если

$$(\forall x \in D(f))[f(-x) = -f(x)]$$

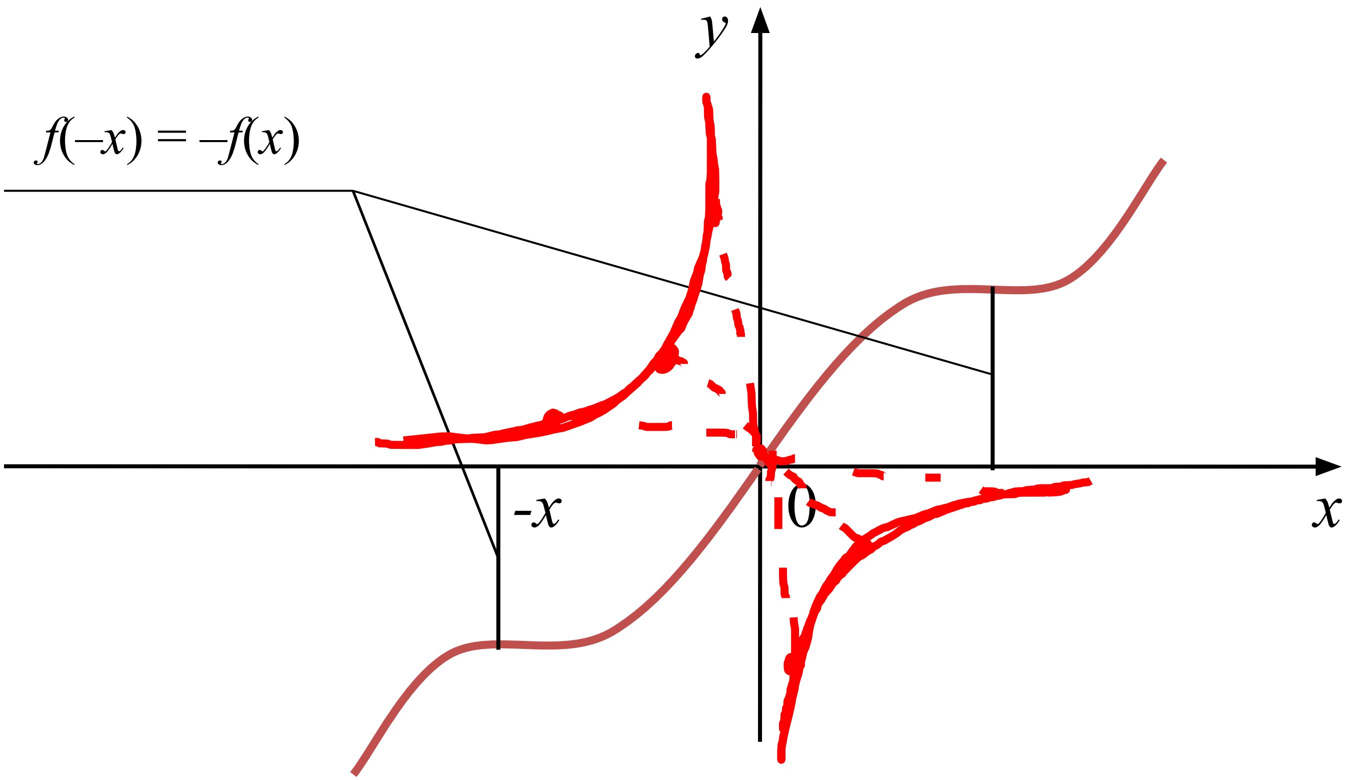
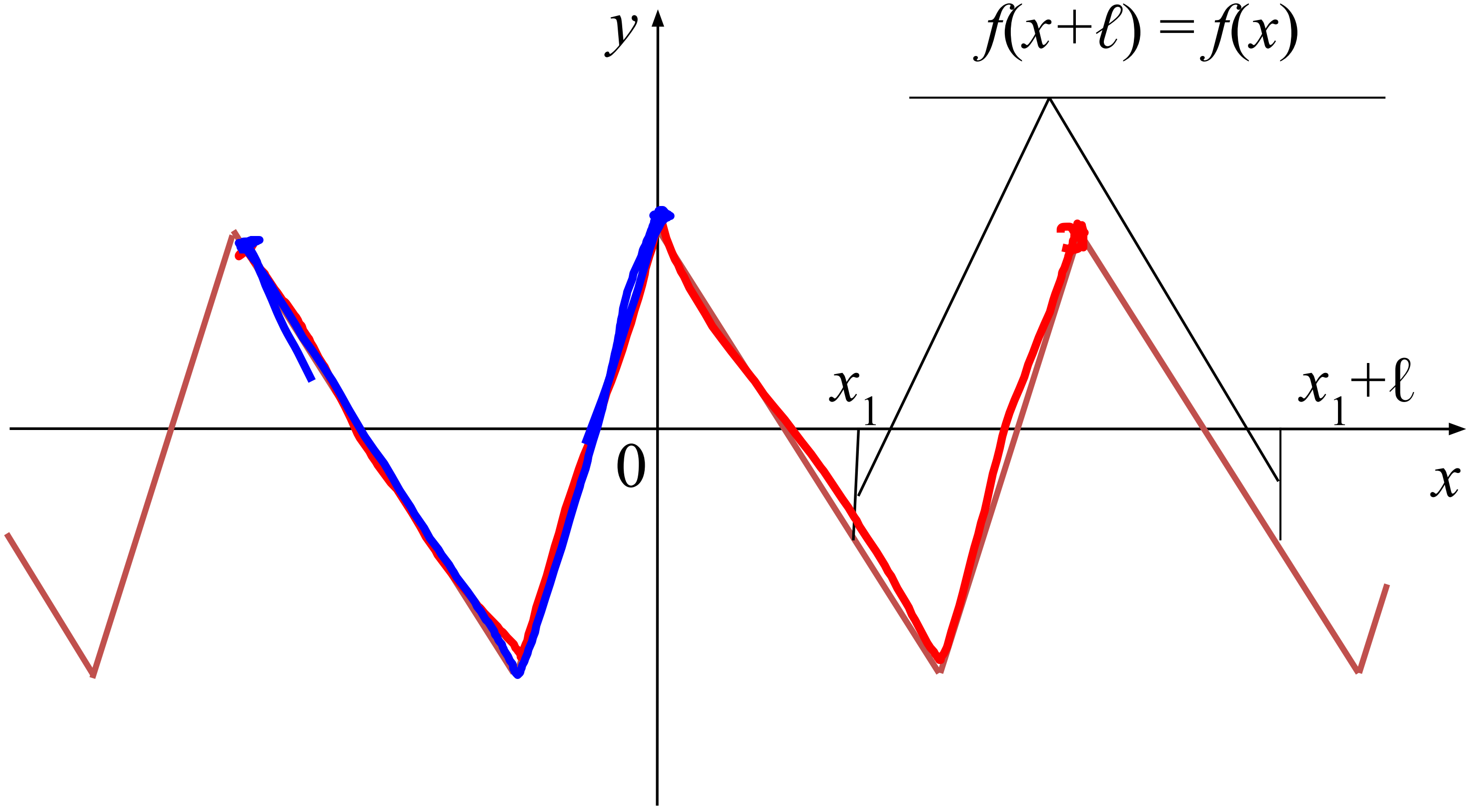


График симметричен относительно точки 0

центральная симм.

Определение. Функция $f(x)$ периодична, если

$$(\exists \ell > 0)(\forall x \in D(f))[f(x+\ell) = f(x)]$$



Наименьшее из ℓ называется периодом функции $f(x)$

Определение. Функция $f(x)$ ограничена, если

$$(\exists m\rangle 0)(\forall x \in D(f))[f(x) \le m]$$

сверху-снизу.

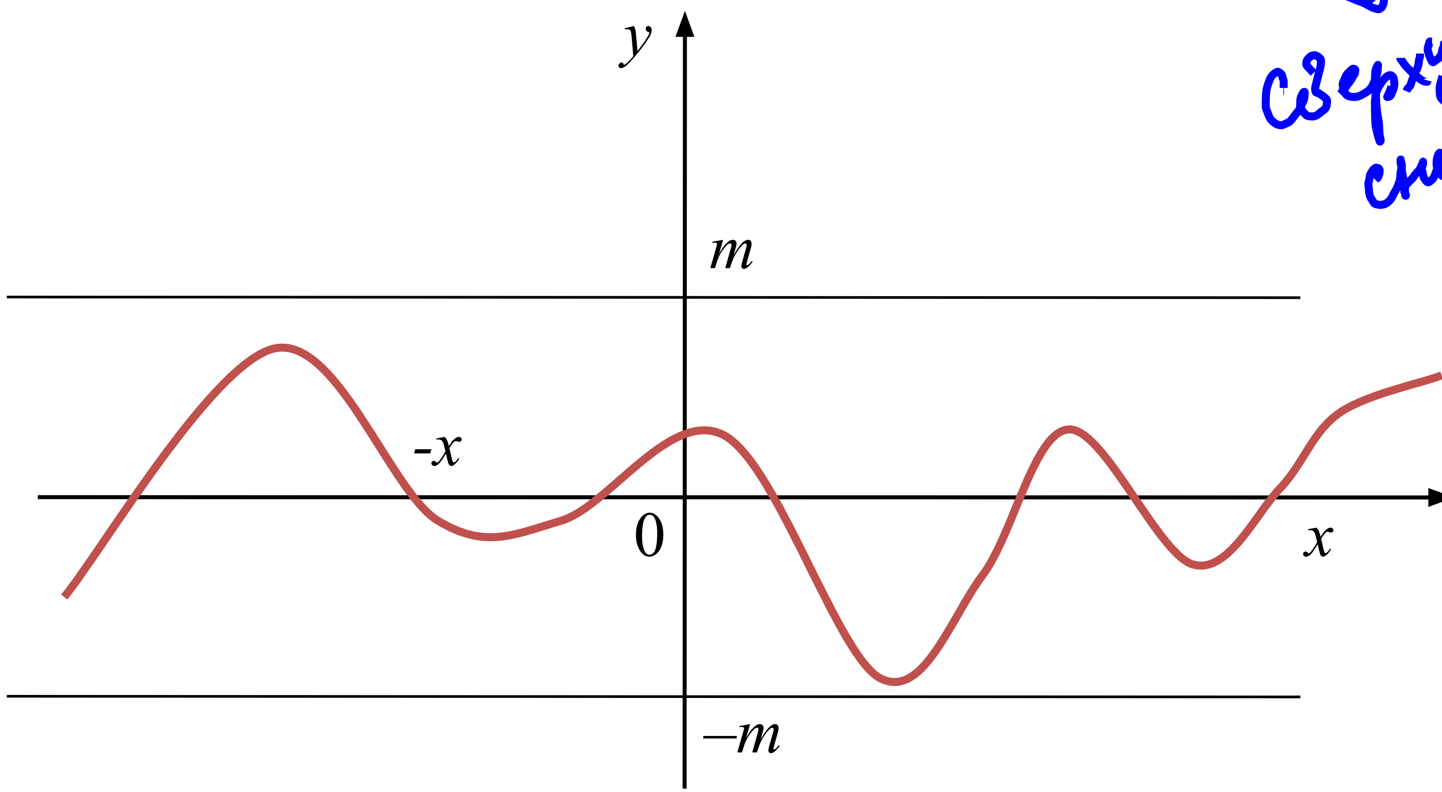
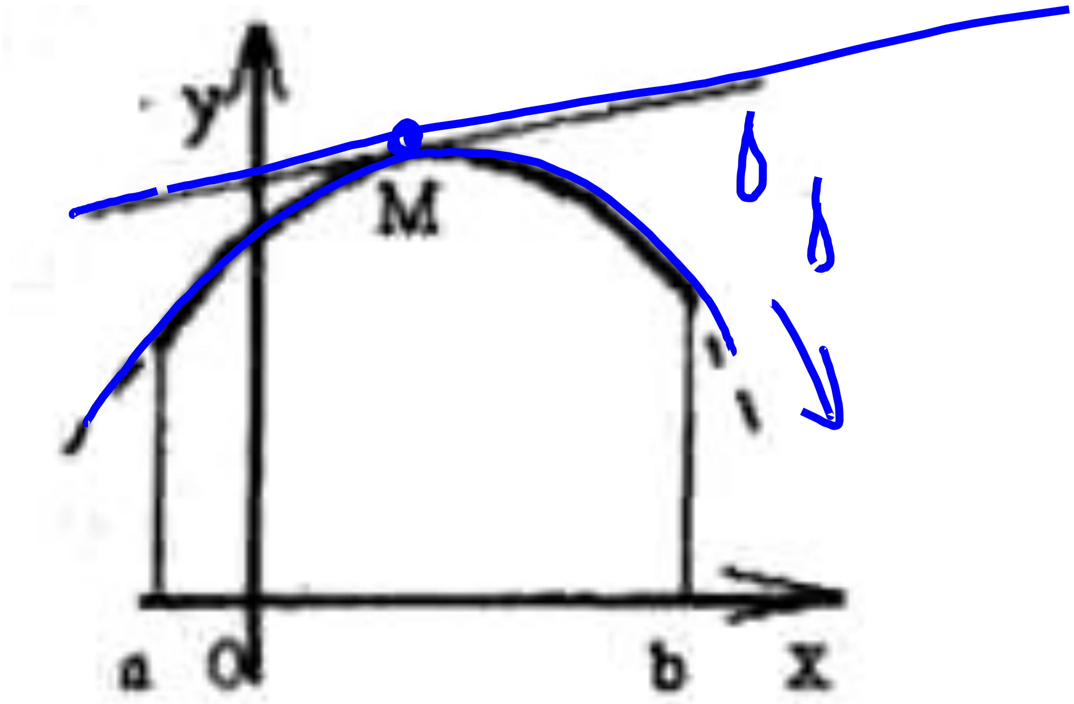
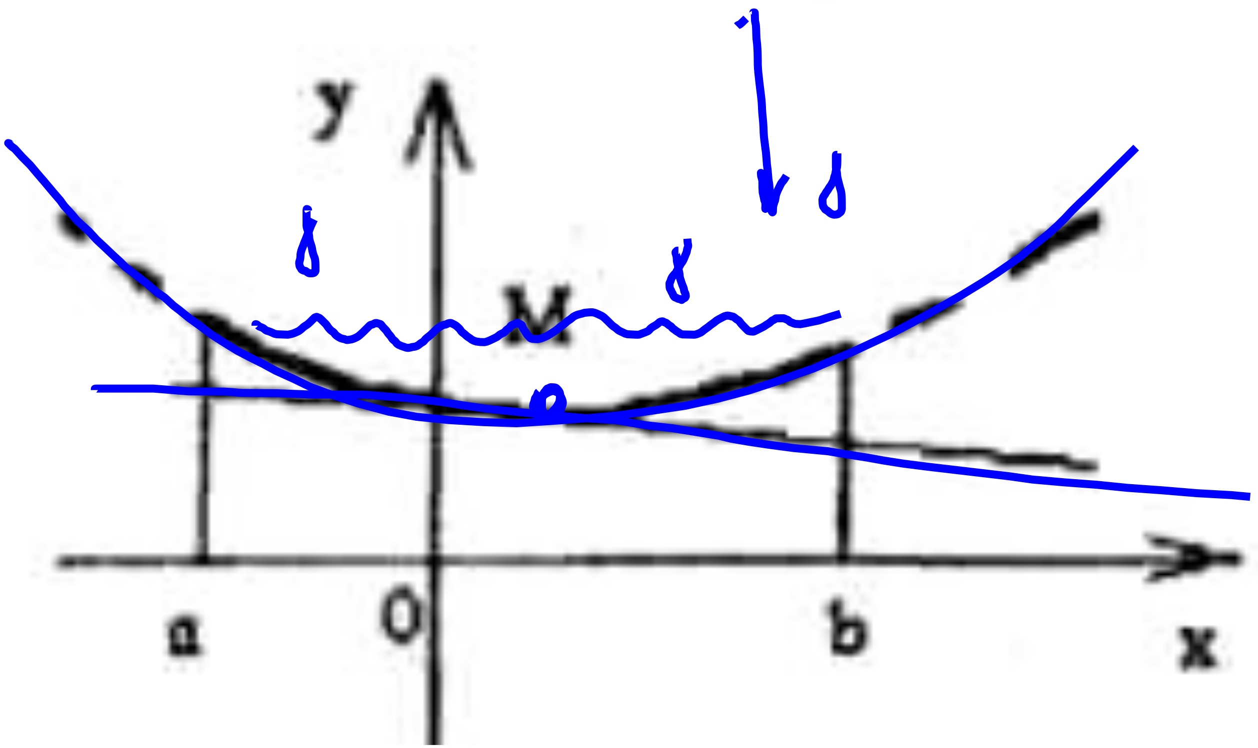


График функции лежит в полосе с границами $y = -m$ и $y = m$

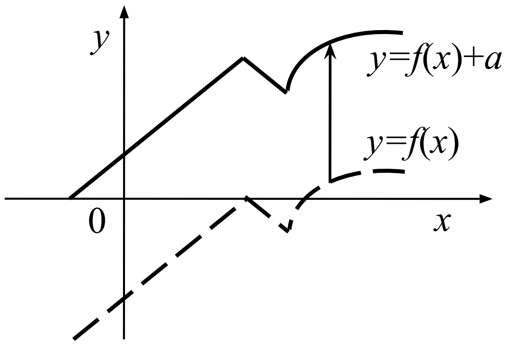
Выпуклость функции



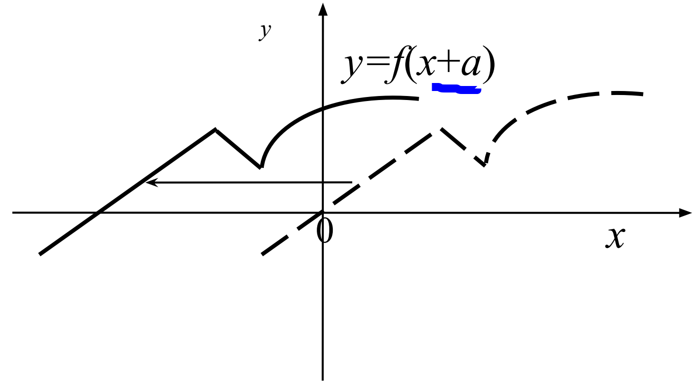
Вогнутость функции



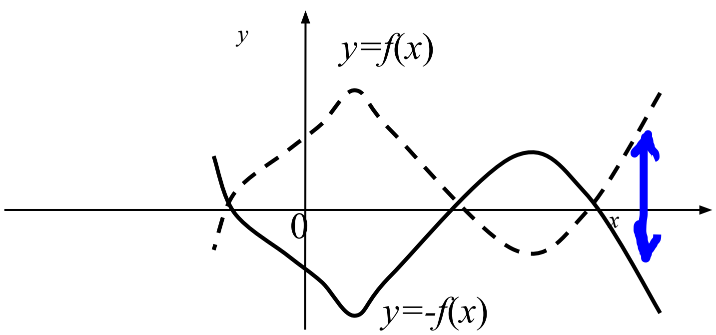
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

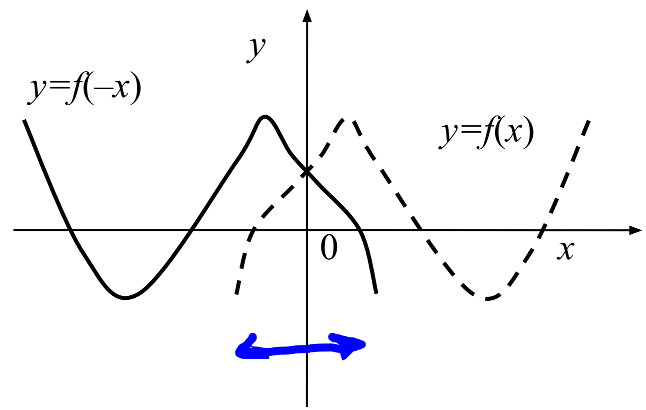


Параллельный перенос на величину *a* вдоль оси *0У*

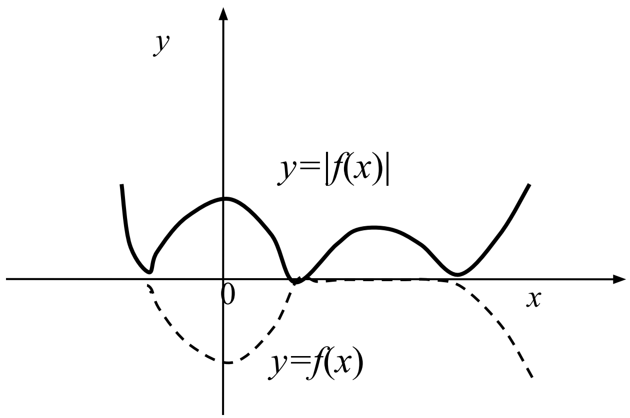


Параллельный перенос на величину (-*a*) вдоль оси *0X*

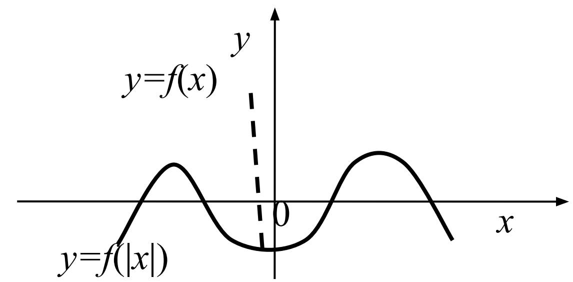




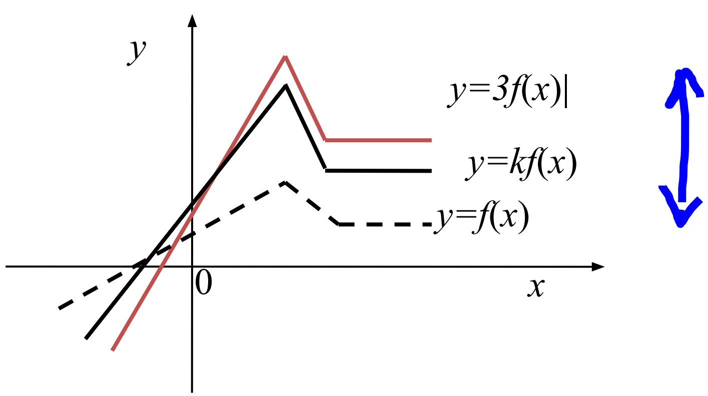
Построение графиков с помощью преобразований



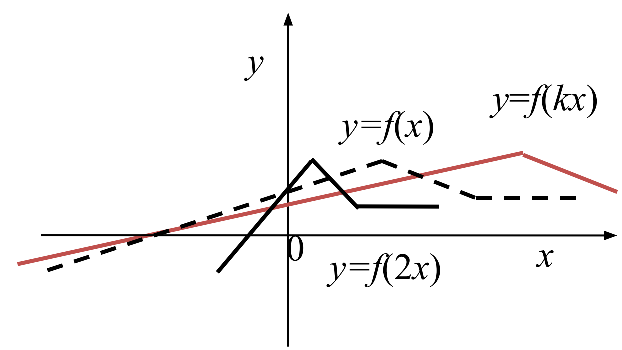
$$y = \left|f(x)\right| = \begin{cases} f(x) & при \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & при \quad f(x) < 0 \end{cases}$$



$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & при \quad (x) \geq 0 \\ f(-x) & при \quad (x) < 0 \end{cases}$$



Увеличение ординат точек в k раз

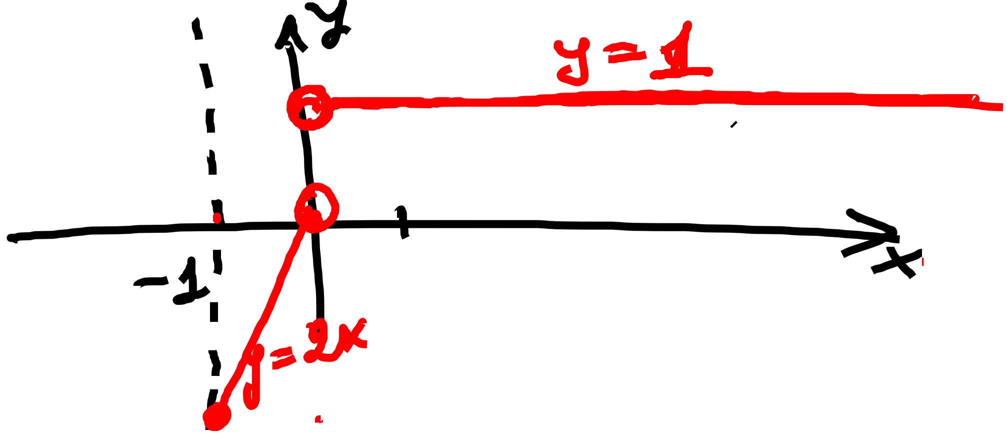


Увеличение абсцисс точек в $\frac{1}{k}$

5) Аналитический с.з.ф.

$$y=\begin{cases} f(x); & x\in A \\ g(x), & \underline{x\in B}, \end{cases} \quad A\cap B=\emptyset$$

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & -1\leq x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$$



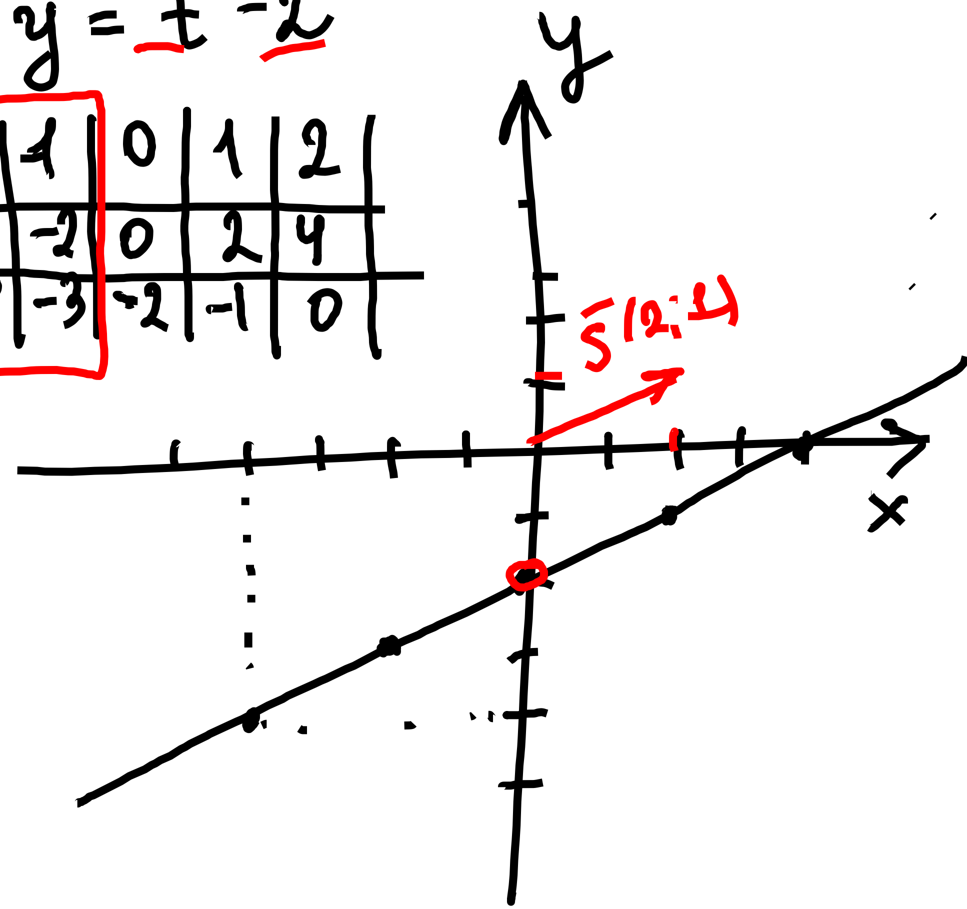
Параметрически заданные ф-и

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t - 2 \end{cases}$$

t	-2	-1	0	1	2
x	-4	-2	0	2	4
y	-4	-3	-2	-1	0

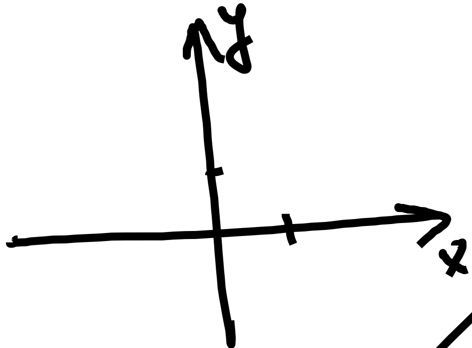
$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t); \\ z = \tau(t). \end{cases}$$



t – параметр.

пар. 4 Полярная система координат.

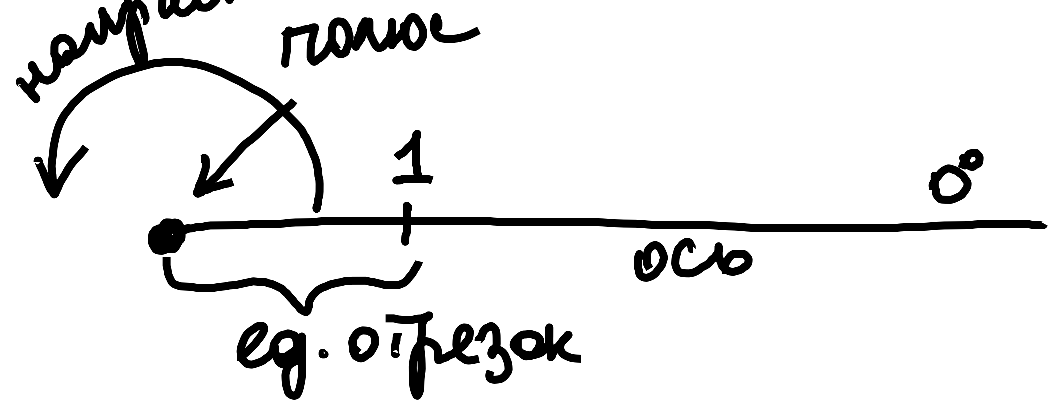
ДСК - декартова система координат

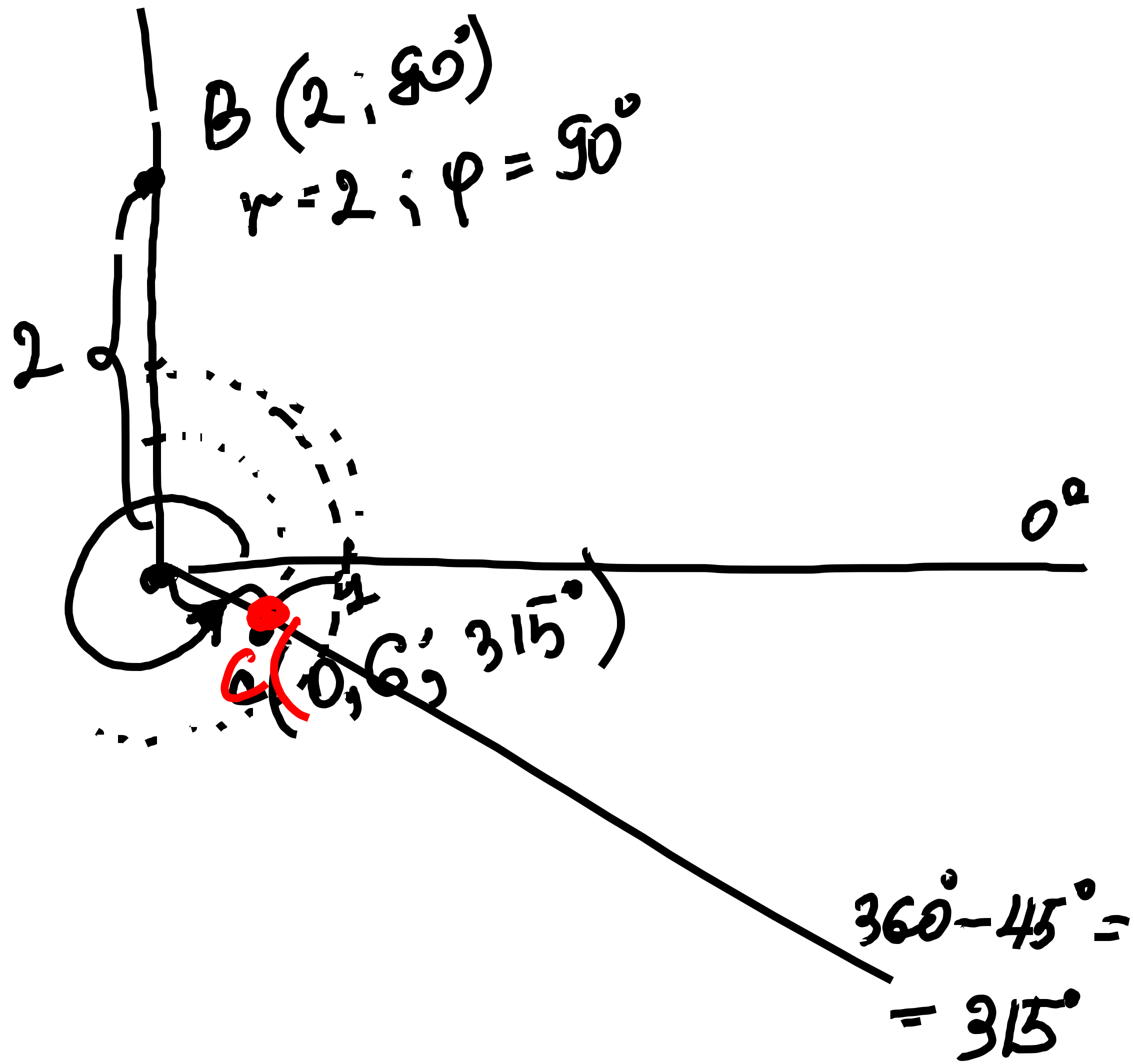


ПСК

$A(r; \varphi)$ r – радиус

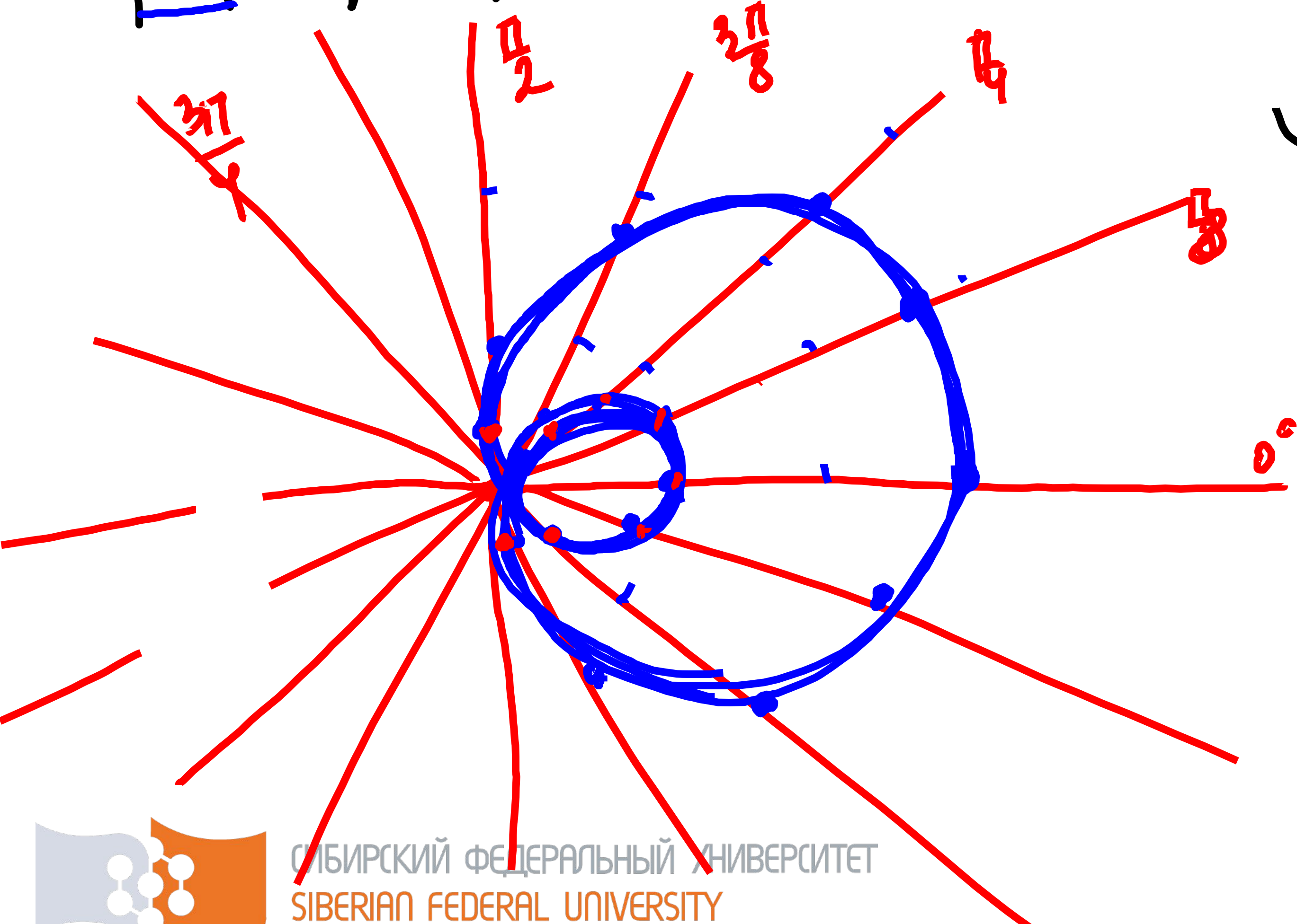
φ – полярный угол.




B (2; 90°)
r = 2 ; φ = 90°
2
0°
1
C (0,6; 315°)
360° − 45° =
= 315°

$r = 2\cos\varphi + 1$

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$
r	$\boxed{3}$	2,85	2,42	1,77	1	0,23	−0,41	−0,88	−1	−0.88	−0,41	0,23	1	1,77

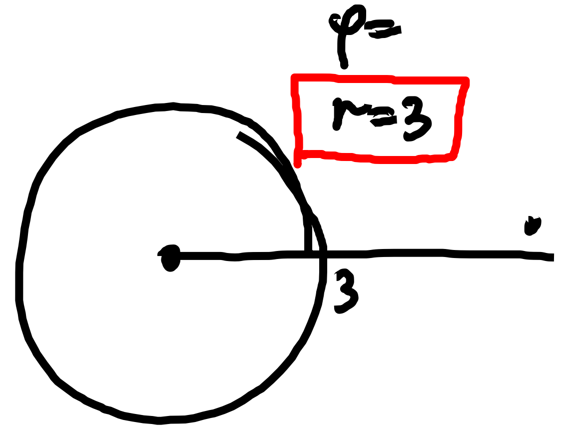


φ	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
r	2,42	2,85	3

$\frac{360°}{8} =$

Переход от ПСК к ДСК и обратно

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{cases}$$



Δ) $x^2+y^2=9$ — окр. $r=3$

$$(r\cdot\cos\varphi)^2+(r\cdot\sin\varphi)^2=9$$

$$r^2\cdot\cos^2\varphi+r^2\cdot\sin^2\varphi=9$$

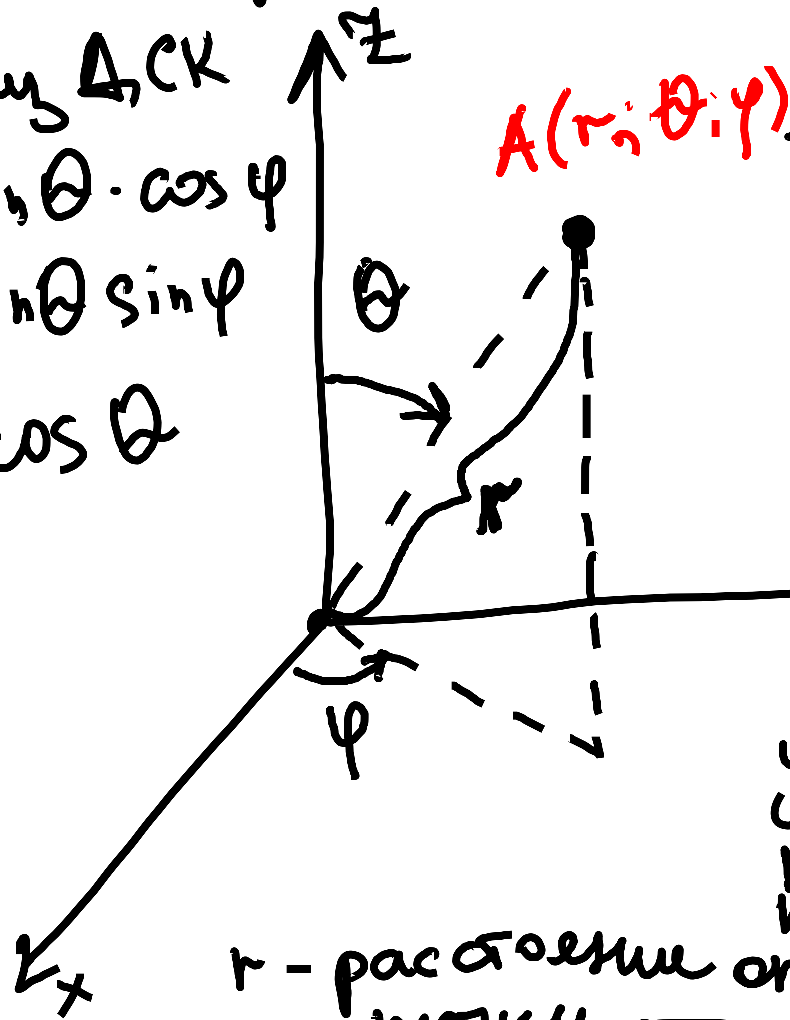
$$r^2\cdot(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=9$$

$r^2=9$ $\quad r=\pm3$ $\quad \boxed{r=3}$ — уравнение окр. $r=3$ в ПСК.

В R^3. Сферическая система коорд-т.

Переход из ДСК

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



φ – азимутный угол – угол м/у Ox и проекцией точки на плоскость xOy, измер. против часовой стрелки.

θ – фита – зенитный угол – угол м/у OZ и направл. вектора точки

r – расстояние от начала коорд. до точки.

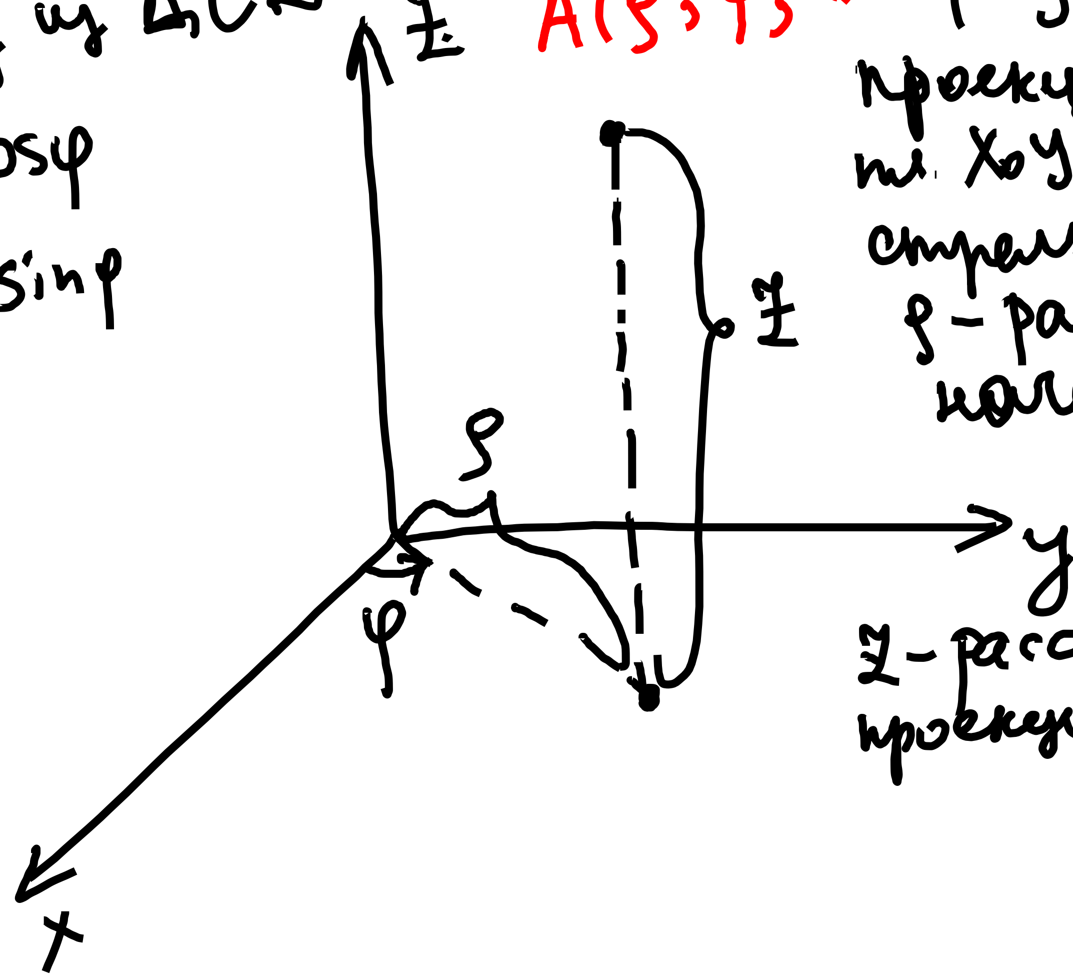
уր-е сферы
$r = 3$

Цилиндрическая система коорд

Переход из ДСК

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$A(\rho;\varphi;z)$



φ – угол м/у OX и проекцией точки на пл. XoY (против часовой стрелки.)

ρ – расстояние от начала коорд. до проекц.

z – расстояние от проекции до точки.

Раздел IV
Введение в математический анализ
Глава 2
Пределы

Параграф 1
Предел переменной величины

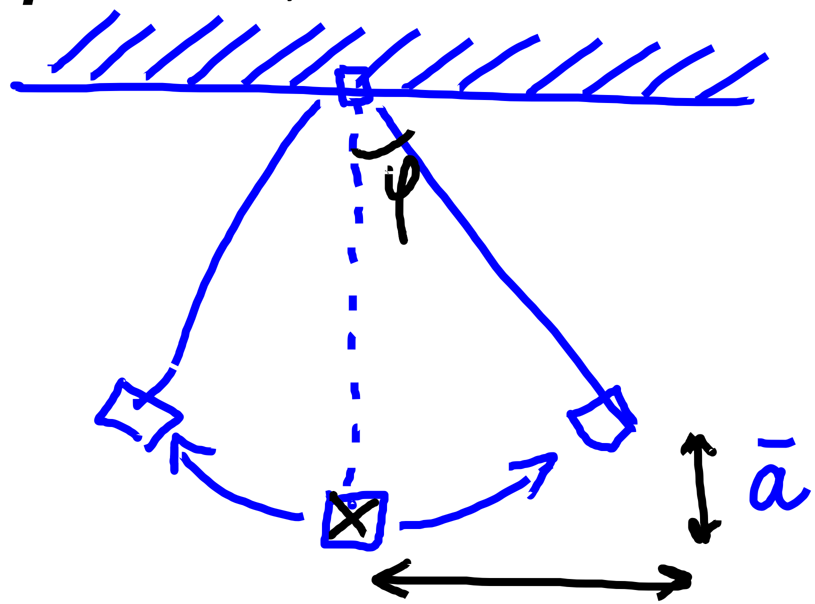
к.п.н. Безотечество Мила Михайловна,
кафедра ФЕО ИЦМиМ СФУ

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

опр

Если значения переменной величины в процессе её изменения как угодно близко приближаются к некоторому числу , то говорят, что переменная величина ***стремится к*** *a* или ***предел переменной величины равен*** *a* , обозначают $x \to a$

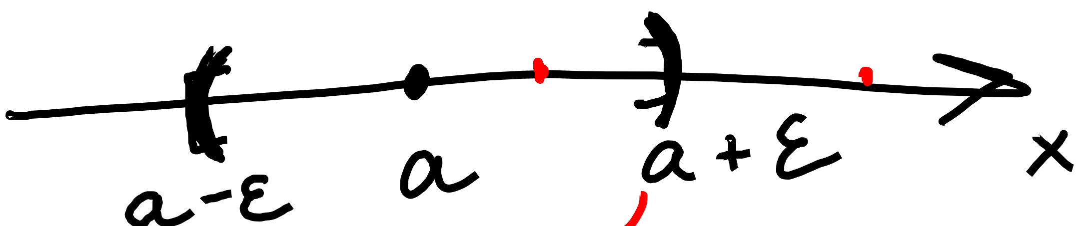
или $\lim x = a$.



$\varphi \to 0$

$a \to 0$

Опр Пусть a – некоторое значение переменной величины x и ε – сколь угодно малое положительное число. Все точки интервала $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$ (кроме самой точки a), удовлетворяющие неравенству $|x-a|<\varepsilon$, образуют ε – ***окрестность точки.***

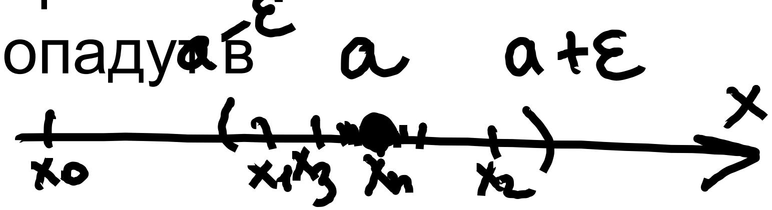


ε-окресность точки a

$$|x-a|<\varepsilon$$

Предел переменной величины

Иначе говоря, если a – предел переменной величины x, то все значения переменной величины x, большие x_0, попадут в ε – окрестность точки a.



$$\lim x_n = a : \forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in X : \forall x > x_0 :$$

$$|x - a| < \varepsilon$$

Раздел IV
Введение в математический анализ
Глава 2
Пределы

Параграф 2
Предел последовательности

$a_n \div a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} \ldots$

$b_n \div\div b_1 \xrightarrow{\cdot q} b_2 \xrightarrow{\cdot q} b_3 \ldots$

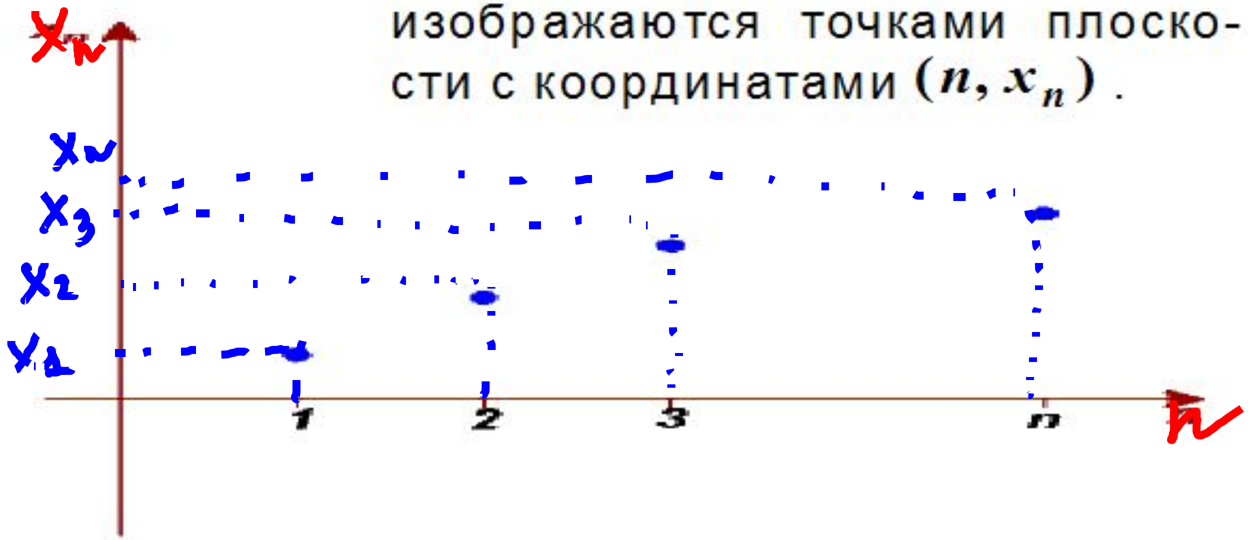
к.п.н. Безотечество Мила Михайловна,
кафедра ФЕО ИЦМиМ СФУ

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

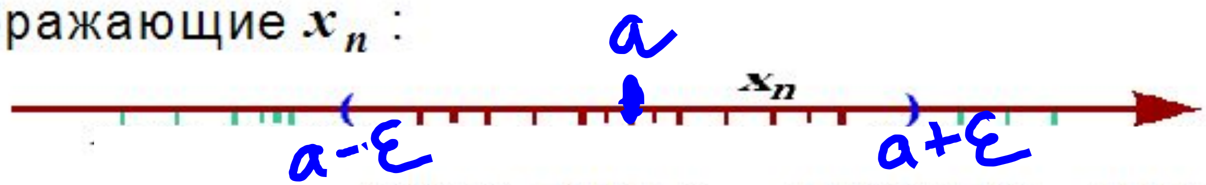
Геометрическая интерпретация числовой последовательности

1 способ. Члены последовательности изображаются точками числовой прямой.

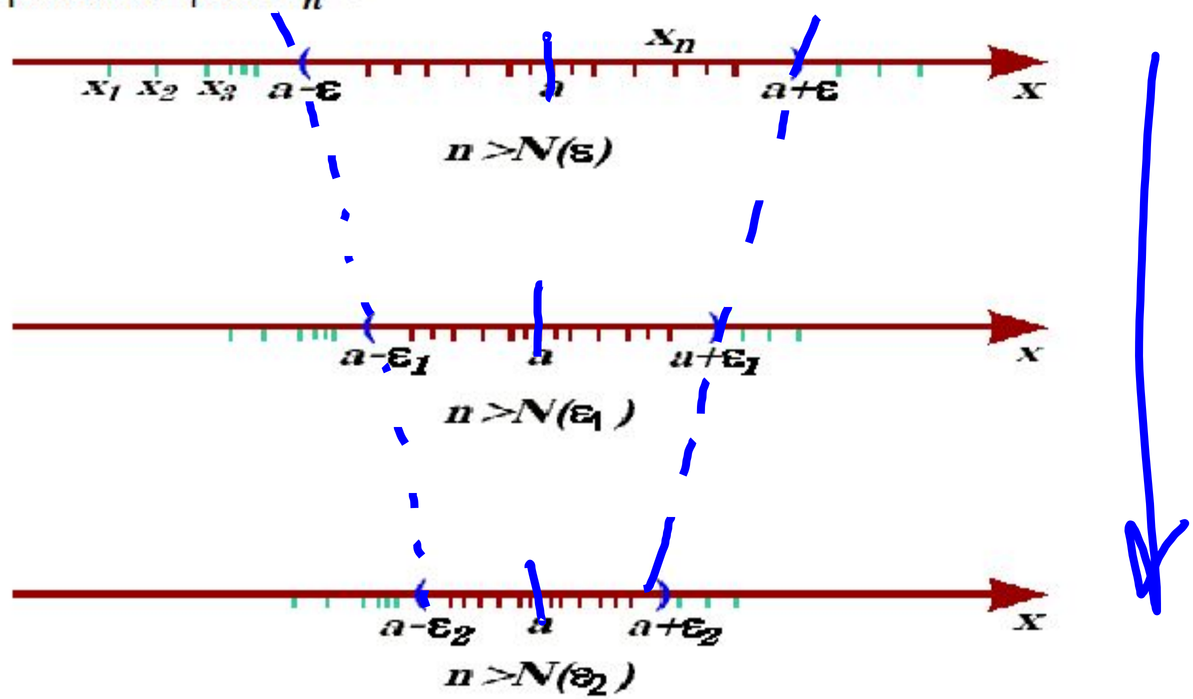
2 способ. Члены последовательности изображаются точками плоскости с координатами (n, x_n).



Около точки a «сгущаются» точки, изо-бражающие x_n :



Около точки a «сгущаются» точки, изо-бражающие x_n :



тем

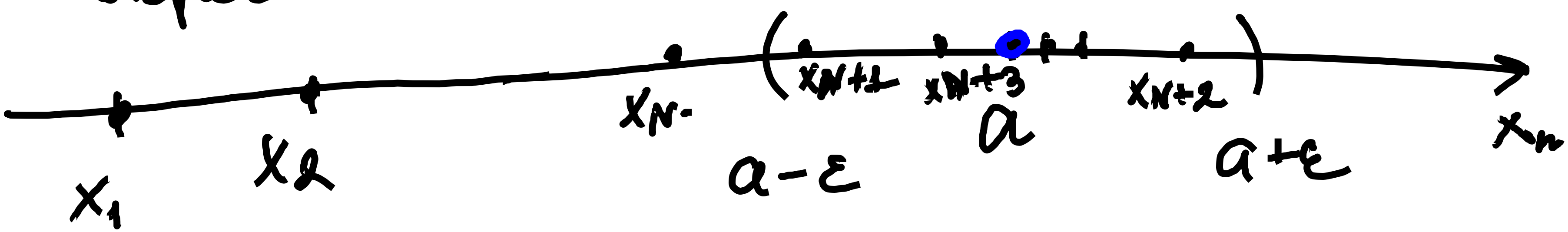
$n>N$

Чем меньше ε – окрестность точки a , тем больше номер N, начиная с которого (при $n>N$) выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Предел последовательности

Число a называется ***пределом последовательности*** x_n, если для любого сколь угодно малого числа ε найдется такой номер N, что для всех номеров $n \geq N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Т.Е, начиная с некоторого N все члены последовательности попадают в ε-окрестность точки a



Раздел IV
Введение в математический анализ
Глава 2
Пределы

Параграф 3
Предел функции одной переменной

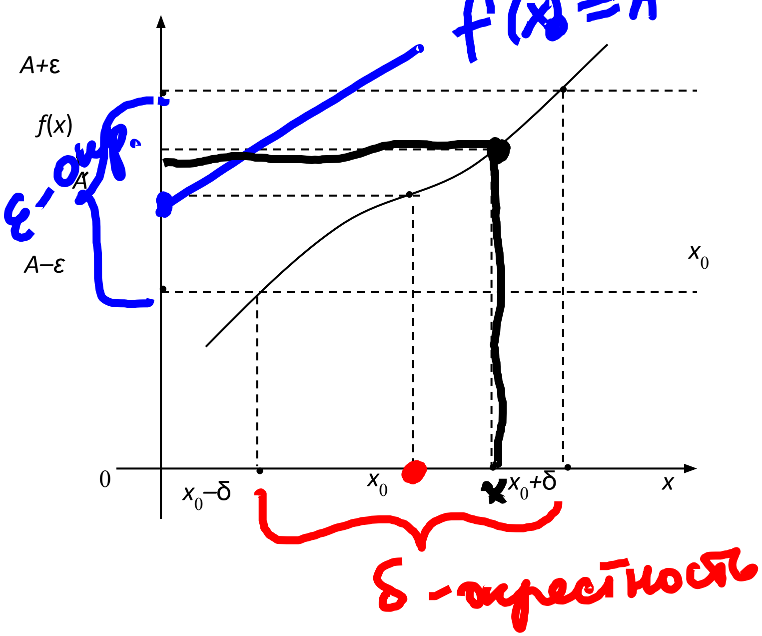
к.п.н. Безотечество Мила Михайловна,
кафедра ФЕО ИЦМиМ СФУ

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

Предел функции одной переменной

δ

Число A называется ***пределом функции*** $y=f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого наперед заданного сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, найдется такое число $\delta > 0$, что для x всех, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.



Иначе говоря, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то точки графика функции с абсциссами из δ – окрестности точки x_0 и соответствующими им ординатами из ε - окрестности точки A должны лежать в полосе, ограниченной двумя прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$

Предел функции в бесконечной точке

$x \to \infty \Rightarrow f(x) \to A$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M : \forall x > M : |f(x) - A| < \varepsilon$$

Раздел IV
Введение в математический анализ
Глава 2
Пределы

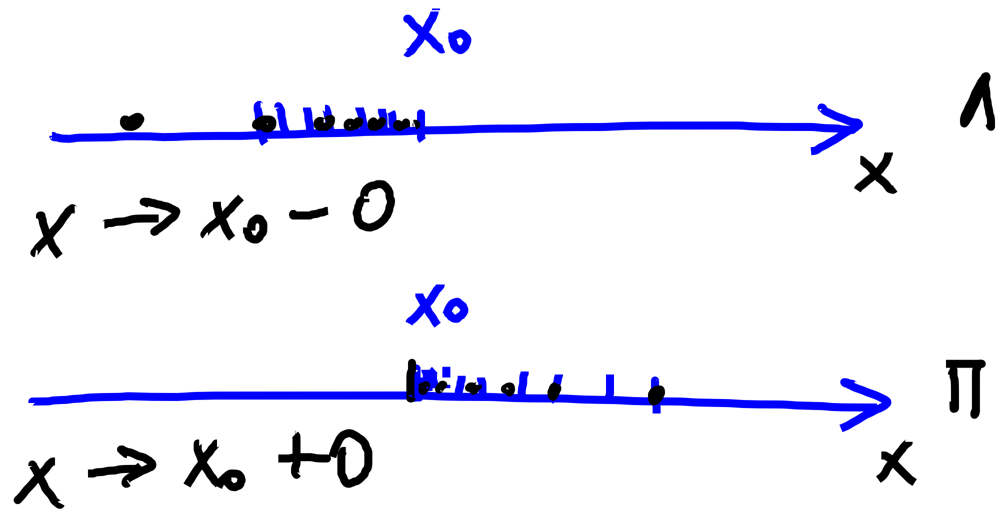
Параграф 4
Односторонние пределы

к.п.н. Безотечество Мила Михайловна,
кафедра ФЕО ИЦМиМ СФУ

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

Односторонние пределы

В связи с тем, что для функции одной переменной можно приближаться к по двум направлениям (слева и справа), существуют понятия ***левостороннего*** и ***правостороннего пределов***.



Односторонние пределы

$y = f(x)$

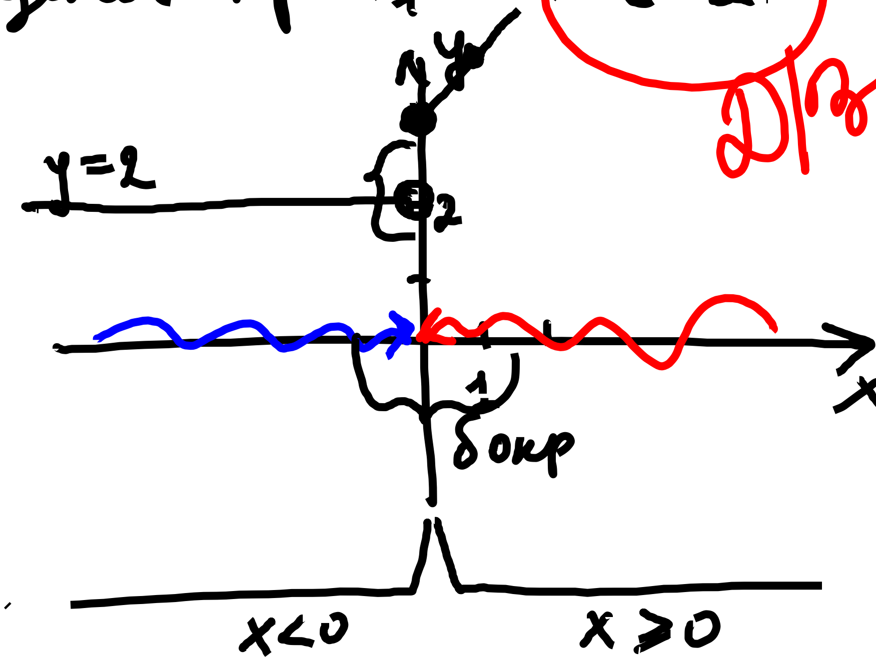
Число A называется ***левосторонним пределом*** функции в точке x_0, если для любого сколь угодно малого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое число $\delta > 0$, что при $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Иначе говоря, если $x \to x_0$ *слева* (*оставаясь меньше*), то *предел* функции $y = f(x)$ – ***левосторонний***, записывается в виде $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

Число A называется ***правосторонним пределом*** функции в точке x_0, если для любого сколь угодно малого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое число $\delta > 0$, что при $x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$
.
Иначе говоря, если **справа** (**оставаясь больше** **),** то *предел* функции $y = f(x)$ – ***правосторонний***, записывается в виде $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$.

Односторонние пределы

ДД Проверить, ∃ ли пределы при $x_1=0$ и $x_2=-1$.

$$y=\begin{cases}2; & x<0;\\ x+3; & x\geqslant 0.\end{cases}$$



1. $x_1=0$

$$\lim_{x\to-0} y = \lim_{x\to -0} 2 = 2$$

$$\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0} (x+3) = [+0+3] = 3.$$

x	0	1
y	3	4

$\lim\limits_{x\to-0} y \neq \lim\limits_{x\to+0} y \Rightarrow$ Предел в $x_1=0$ не существует

Раздел IV
Введение в математический анализ
Глава 2

Пределы

Параграф 6 5

Бесконечно большие величины (б.б.в)

Бесконечно малые величины (б.м.в).

к.п.н. Безотечество Мила Михайловна,
кафедра ФЕО ИЦМиМ СФУ

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

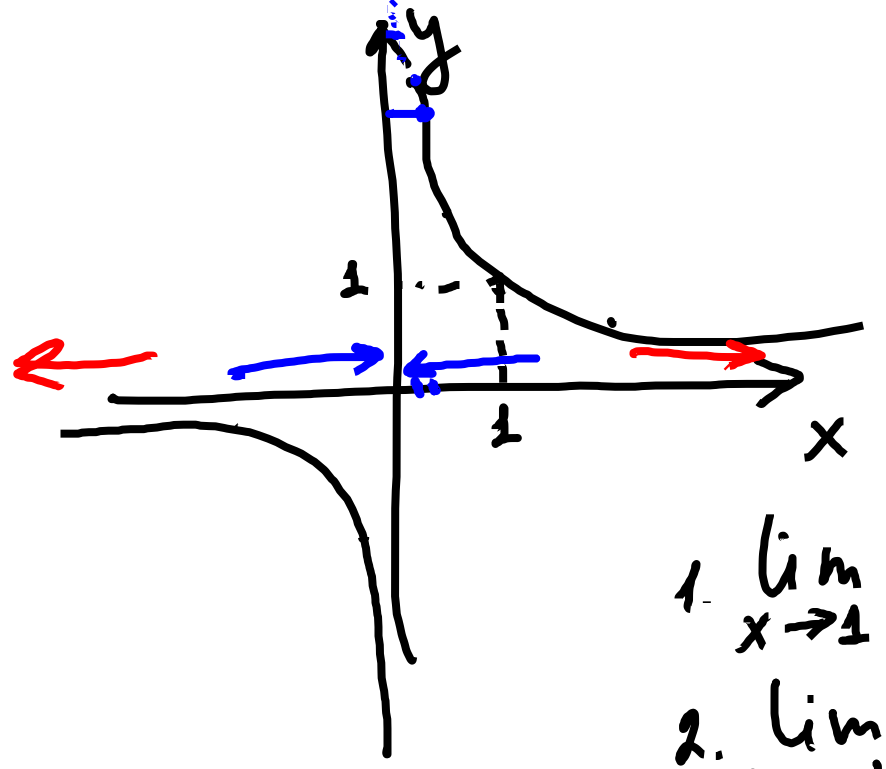
Опр. Ф-я $\alpha(M)$ – бесконечно большой величиной в окр. x_0, если $\boxed{\lim\limits_{M \to x_0} \alpha(M) = \infty}$ б.б.в

Опр. Ф-я $\beta(M)$ – беск. малая величина в окр. x_0, если $\boxed{\lim\limits_{M \to x_0} \beta(M) = 0}$ б.м.в

Замечание.

$$\lim_{M \to x_0} \alpha(M) = -\infty$$

$$y = \frac{1}{x}$$



1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{1}\right] = 1$

2. $\lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{+0}\right] = \infty$

3. $\lim\limits_{x \to -0} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{-0}\right] = -\infty$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0$

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{-\infty}\right] = 0.$

Свойства б.м. и б.б.в.

Текстовое	Символьное изобр.	
① Сумма конечного числа	$\underbrace{0+0+\ldots+0}_{n\text{ шт.}}=0$ $\underbrace{\infty+\infty+\ldots+\infty}_{n\text{ шт.}}=\infty$	
② Умножение на число.	$c\cdot 0=0$ $c\cdot\infty=\infty$	$\frac{0}{c}=\frac{1}{c}\cdot 0=0$ $\frac{\infty}{c}=\frac{1}{c}\cdot\infty=\infty$
③ Деление на б.б.в. и б.м.в.	$\frac{1}{0}=\infty$ $\frac{1}{\infty}=0$	$\frac{c}{0}=\infty$ $\frac{c}{\infty}=0$

4. Возведение в степень

$$a^0 = 1$$

$$a^\infty = \begin{cases} \infty; & a > 1; \\ 0; & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\infty^a = \infty$$

$$0^a = 0$$

5. Неопределённости

$$\left[\frac{0}{0}\right] = \begin{cases} 0; \\ const \\ \infty; \end{cases}$$

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \begin{cases} 0; \\ const; \\ \infty. \end{cases}$$

$$1^\infty = \begin{cases} 0 \\ const \\ \infty \end{cases}$$

$$\infty - \infty = \begin{cases} 0 \\ const. \\ \infty \end{cases}$$

пар. 6. Раскрытие неопред.

Раздел IV
Введение в математический анализ
Глава 2
Пределы

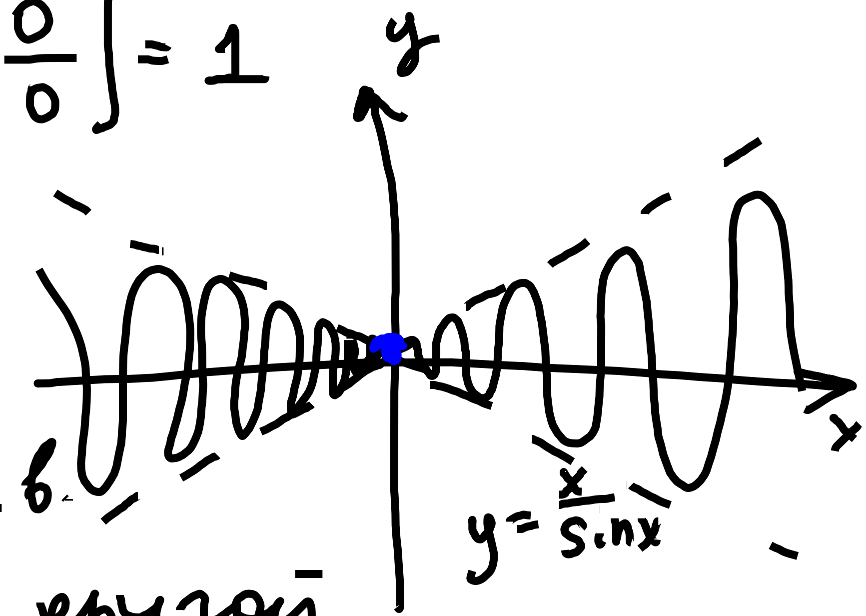
Параграф 7
Замечательные пределы

к.п.н. Безотечество Мила Михайловна,
кафедра ФЕО ИЦМиМ СФУ

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

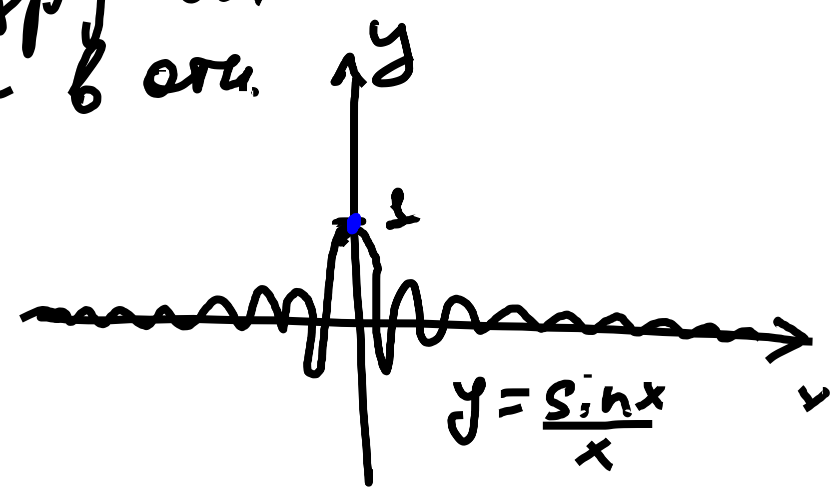
I Замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}\right] = 1$$



$\sin x \sim x$ – эквивалентные б.м.в.

можно заменять одну другой (если они находятся в отн. умножение / деление).



II замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left[\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty} = (1+0)^{\infty} = 1^{\infty}\right] = e$$

зам. $e \approx 2.71928192...$

экспонента

$\ln a = \log_e a$

Инвариант:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left[(1+0)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}\right] = e$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x)}, \text{ если } f(x)\to 0;\ g(x)\to\infty}$$

Раздел IV
Введение в математический анализ
Глава 2
Пределы

Параграф 8
Точки разрыва функции и их классификация

к.п.н. Безотечество Мила Михайловна,
кафедра ФЕО ИЦМиМ СФУ

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

Функция в точке может быть

1 непрерывна (рис 1)

2 терпеть устранимый разрыв (разрыв I рода) (рис 2а, б),

3 разрыв «скачек» (разрыв I рода),

4 бесконечный разрыв (разрыв II рода). рис. 4 (а, б)

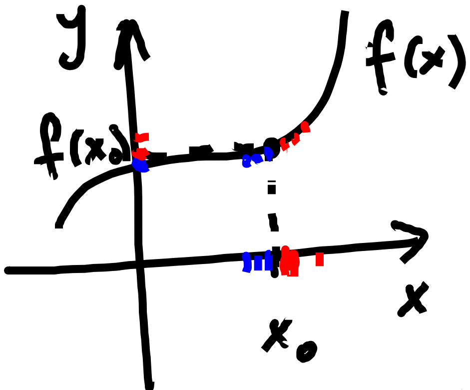


рис. 1

1. $f(x)$ – определена при $x = x_0$.

2. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$

3. $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$

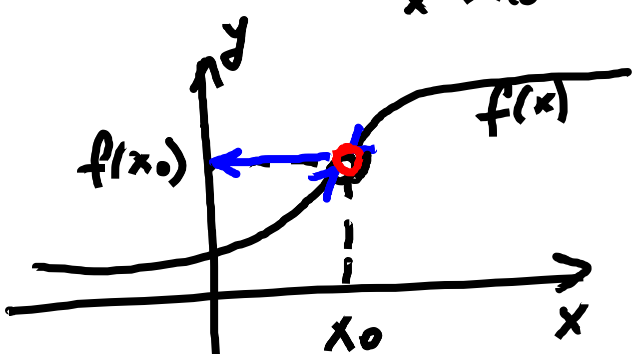


рис. 2а

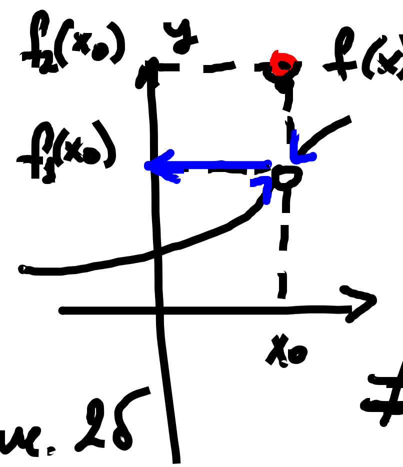


рис. 2б

1. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$

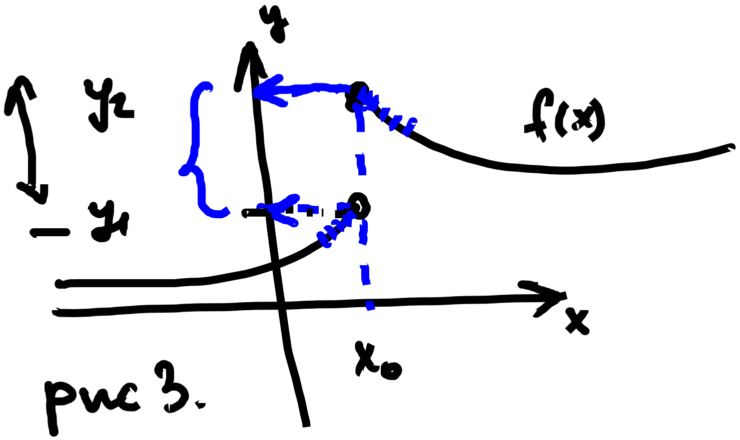


рис 3.

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x); \neq \infty$$

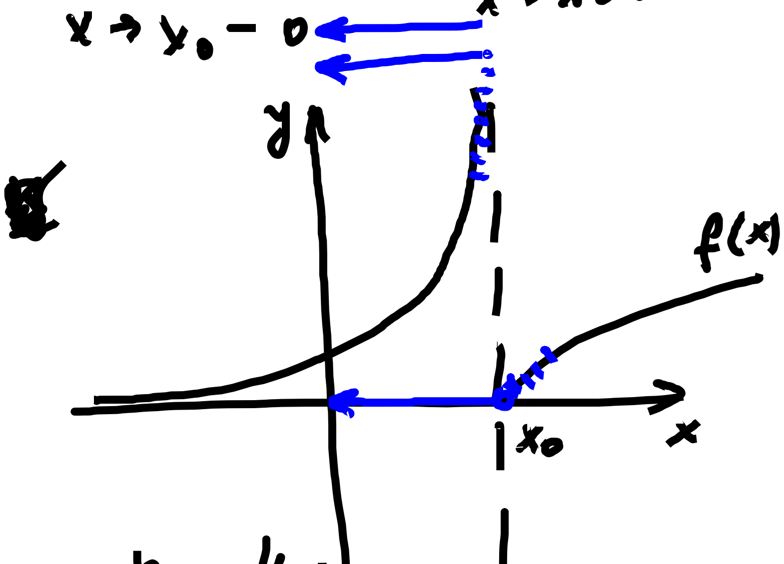


рис.4 а)

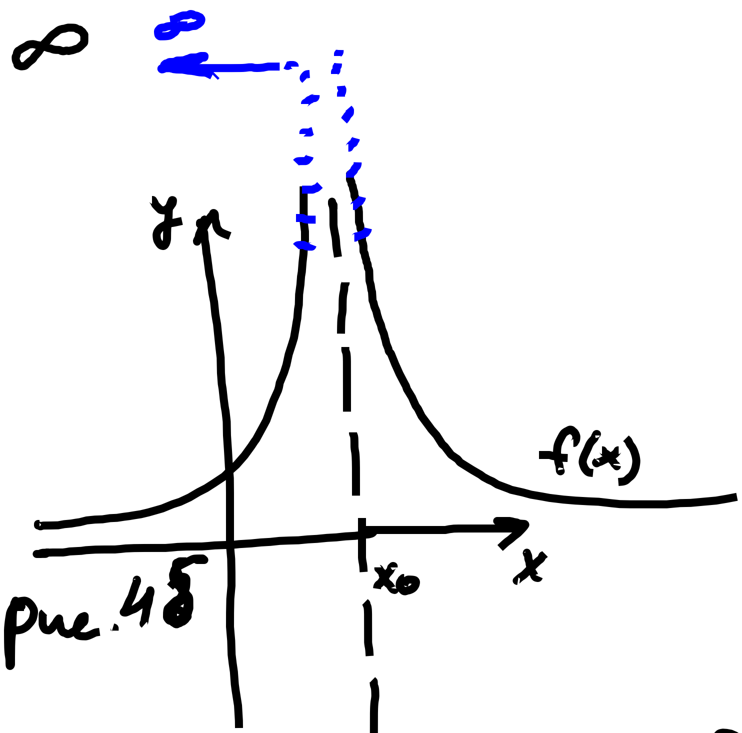


рис.4б

Хотя бы один из одностор. пределов $= \pm\infty$

Раздел IV
Введение в математический анализ
Глава 2
Пределы

Параграф 9
Приращение функции

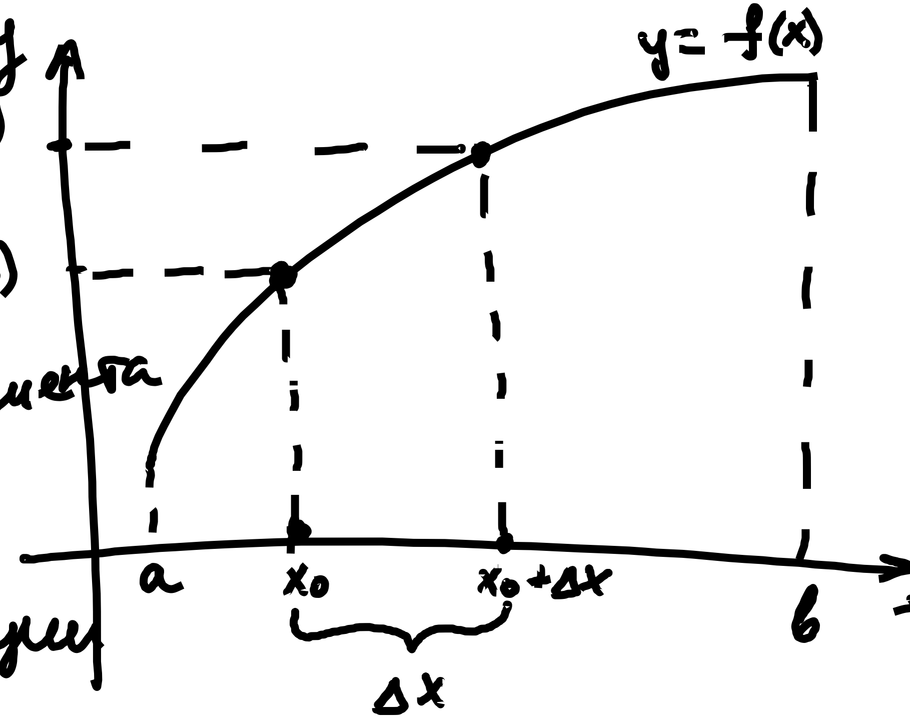
к.п.н. Безотечество Мила Михайловна,
кафедра ФЕО ИЦМиМ СФУ

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

Приращение функции одной переменной

Рассмотрим функцию одной переменной $y = f(x)$, определенную на некотором интервале $(a; b)$.

Δy { $f(x_0+\Delta y)$, $y_0 = f(x_0)$



Δx – приращение аргумента

$\Delta y = f(x_0+\Delta y) - f(x_0)$ –

– приращение функции

Приращение = изменение.

Приращение функции двух переменных

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x; y)$,
определенную на в некоторой области D .

$$\Delta z_x = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)$$ – частное приращение по x.

$$\Delta z_y = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$$ – частное приращение по y

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$$ – общее приращение.

Раздел IV
Введение в математический анализ
~~Глава 3~~
Производная и дифференциал

Параграф 1
Основные определения

к.п.н. Безотечество Мила Михайловна,
кафедра ФЕО ИЦМиМ СФУ

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

Рассмотрим функцию одной переменной $y = f(x)$, определенную на некотором интервале $(a;b)$.

Проделаем следующие операции:

– аргументу $x \in (a,b)$ дадим приращение Δx, причем $x + \Delta x \in (a,b)$;

– найдем соответствующее приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

– найдем «среднюю скорость» изменения функции на отрезке $[x; x + \Delta x]$, равную $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

– так как при $\Delta x \to 0$ значение «средней скорости» стремиться к значению скорости изменения функции в точке, то найдем последнюю как предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Производная характеризует скорость изменения функции в данной точке.

Определение. ***Производной функции одной переменной*** $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента в этой точке, при стремлении к нулю приращения аргумента. Обозначается $f'(x),\ f'_x,\ y',\ y'_x,\ \dfrac{dy}{dx}$.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

$$\frac{\boxed{dy}}{\boxed{dx}}$$

Теперь рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x;y)$, определенную на некоторой области D.

Так как x и y – независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение.

Проделаем следующие операции:

– независимой переменной x дадим приращение Δx, сохраняя значение y неизменным;

– найдем соответствующее приращение функции Δz_x – частное приращение z по x, т.е. $\Delta z_x = f(x+\Delta x;y) - f(x;y)$;

– найдем среднюю скорость изменения значения функции в направлении координатной оси OX на интервале Δx, равную $\dfrac{\Delta z_x}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x;y) - f(x;y)}{\Delta x}$;

– найдем скорость изменения функции в точке в направлении оси OX, перейдя в последнем равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x;y) - f(x;y)}{\Delta x} = z'_x.$$

Аналогично можно найти частное приращение функции по переменной y: $\Delta z_y = f(x; y+\Delta y) - f(x, y)$, и получить скорость изменения функции в точке в направлении оси OY:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \underline{z'_y}.$$

$z = f(x;y)$ существуют z'_x и z'_y.

При этом y и x поперемению — const.

Определение. Если существует предел отношения частного приращения функции в точке M к соответствующему приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю, то он называется ***частной производной функции в точке M по данной независимой переменной***. Обозначается z'_x, $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_y, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x}, \qquad z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y}.$$

Аналогично для функции n – независимых переменных $u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$:

$$u'_{x_k} = \frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u_{x_k}}{\Delta x_k}.$$

Таким образом, функция двух переменных имеет две частные производные, а функция n переменных $z = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ будет иметь n частных производных.

SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

Раздел IV
Введение в математический анализ
Глава 3
Производная и дифференциал

Параграф 2

Правила вычисления производных

к.п.н. Безотечество Мила Михайловна,
кафедра ФЕО ИЦМиМ СФУ

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

$(3x)' = 3$

Пример:

$$y = \underbrace{e^{2x-3}}_{u} \cdot \underbrace{\cos^2(2\sin x - \ln 3x)}_{v}$$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$y' = (e^{2x-3})' \cdot \cos^2(2\sin x - \ln 3x) + e^{2x-3} \cdot (\cos^2(2\sin x - \ln 3x))' =$$

$(e^u)' = e^u \cdot u'$

$$= e^{2x-3} \cdot (2x-3)' \cdot \cos^2(2\sin x - \ln 3x) + e^{2x-3} \cdot 2\cos(2\sin x - \ln 3x) \cdot (\cos(2\sin x - \ln 3x))' =$$

$$= e^{2x-3} \cdot 2\cos^2(2\sin x - \ln 3x) + e^{2x-3} \cdot 2\cos(2\sin x - \ln 3x)\,(-\sin(2\sin x - \ln 3x)) \cdot (2\sin x - \ln 3x)' =$$

$$= e^{2x-3} \cdot 2\cos^2(2\sin x - \ln 3x) + e^{2x-3} \cdot 2\cos(2\sin x - \ln 3x) \cdot (-\sin(2\sin x - \ln 3x))\left(2\cos x - \frac{3}{3x}\right)$$

Раздел IV
Введение в математический анализ
Глава 3
Производная и дифференциал

Параграф 3

Физический (механический) смысл производных

к.п.н. Безотечество Мила Михайловна,
кафедра ФЕО ИЦМиМ СФУ

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

Обобщая, можно сказать, что если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная y' есть скорость протекания этого процесса. В этом состоит ***физический смысл производной***.

В частности, если этот процесс – прямолинейное неравномерное движение, то скорость движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t. В этом заключается ***механический смысл производной*** $(v(t) = S'(t))$.

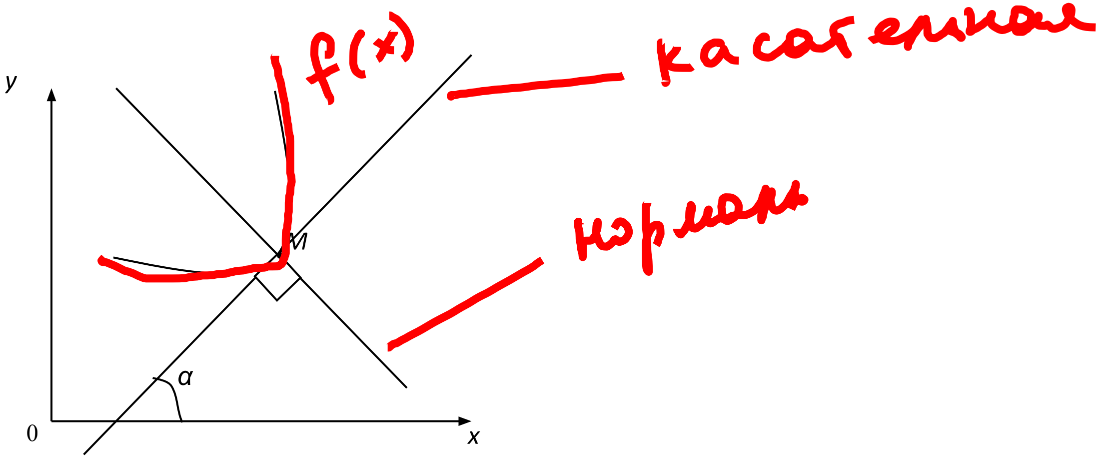
Раздел IV
Введение в математический анализ
Глава 3
Производная и дифференциал

Параграф 4
Геометрический смысл производных

к.п.н. Безотечество Мила Михайловна,
кафедра ФЕО ИЦМиМ СФУ

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

Производная $f'(x_0)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x_0. В этом заключается ***геометрический смысл производной***.



– уравнение касательной: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$;

– уравнение нормали: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ (если $f'(x_0) \neq 0$).

Раздел IV
Введение в математический анализ
Глава 3
Производная и дифференциал

Параграф ~~4~~ 5

Производная неявно заданной функции

к.п.н. Безотечество Мила Михайловна,
кафедра ФЕО ИЦМиМ СФУ

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

Раздел IV
Введение в математический анализ
Глава 3
Производная и дифференциал

Параграф 5
Производная параметрически заданной функции

к.п.н. Безотечество Мила Михайловна,
кафедра ФЕО ИЦМиМ СФУ

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY