Тема 1.
Микроэкономическое моделирование технологии производства и процессов потребления

Аксиомы рациональности поведения потребителя

Обычно от ординалистской, или порядковой, функции предпочтений экономического субъекта требуют, чтобы она представляла собой отношение полного предпорядка (или т.н. «слабое упорядочение»), т.е. удовлетворяла следующим свойствам рационального выбора.

- Первое свойство – это сравнимость любых возможных вариантов организации хозяйственной деяте $x_1 \succsim x_2$, или п $x_2 \succsim x_1$ данного множества: для любых вариантов x_1 и x_2 верно либо
- Второе свойство – это транзитивность отношения $(x_1 \succsim x_2)$ чен $(x_2 \succsim x_3)$ сли д $(x_1 \succsim x_3)$ х наборов x_1, x_2 и x_3 и , то

Теорема Дебре

Теорема Дебре в слабой форме

Если множество *X* качественно сравнимых наборов благ, которое должно быть замкнутым подмножеством пространства действительных чисел, представляет собой отношение полного предпорядка, т.е. удовлетворяет свойствам рациональности, и в добавление к этому данный индикатор потребительских предпочтений обладает свойствами непрерывности и строгой глобальной ненасыщаемости, то ему соответствует количественная, числовая функция полезности, которая при этом будет непрерывной.

Теорема Дебре в сильной форме

Если множество *X* качественно сравнимых наборов благ, которое должно быть замкнутым подмножеством пространства действительных чисел, представляет собой отношение полного предпорядка и данный ординалистский индикатор потребительских предпочтений является непрерывным, то ему соответствует непрерывная кардиналистская функция полезности.

Отдача от масштаба и делимость производства

$\alpha > 1, \lambda < 1$

Отдача от масштаба	Эквивалентные понятия:		Делимость производства
Возрастающая	$f(\alpha x_K, \alpha x_L) > \alpha f(x_K, x_L)$	$f(\lambda x_K, \lambda x_L) < \lambda f(x_K, x_L)$	Несовершенная
Постоянная	$f(\alpha x_K, \alpha x_L) = \alpha f(x_K, x_L)$	$f(\lambda x_K, \lambda x_L) = \lambda f(x_K, x_L)$	«Пропорциональная»
Убывающая	$f(\alpha x_K, \alpha x_L) < \alpha f(x_K, x_L)$	$f(\lambda x_K, \lambda x_L) > \lambda f(x_K, x_L)$	Совершенная

Эквивалентность возрастающей отдачи от масштаба и несовершенной делимости производства:

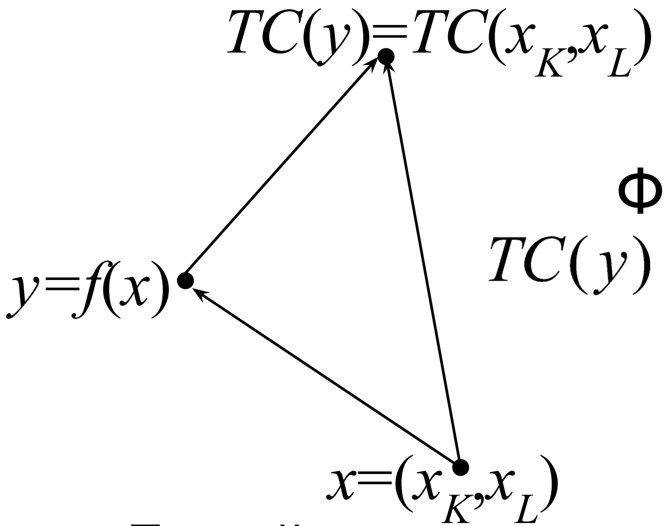
$$f(\alpha x_K, \alpha x_L) > \alpha f(x_K, x_L)$$

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} < 1; \chi_K = \alpha x_K, \chi_L = \alpha x_L$$

$$\frac{f(\chi_K, \chi_L)}{\alpha} < f\left(\frac{\chi_K}{\alpha}, \frac{\chi_L}{\alpha}\right)$$

$$\lambda f(\chi_K, \chi_L) < f(\lambda \chi_K, \lambda \chi_L)$$

Отдача от масштаба и поведение средних издержек



Факторизация издержек:

$$TC(y) \equiv TC\left(f\left(x_K, x_L\right)\right) \equiv TC\left(x_K, x_L\right) = p_K x_K + p_L x_L$$

Линейная однородность функции издержек от затрат факторов:

$$TC\left(f\left(\alpha x_K, \alpha x_L\right)\right) = TC\left(\alpha x_K, \alpha x_L\right) = p_K\left(\alpha x_K\right) + p_L\left(\alpha x_L\right) =$$
$$= \alpha\left(p_K x_K + p_L x_L\right) = \alpha TC\left(x_K, x_L\right) = \alpha TC\left(f\left(x_K, x_L\right)\right)$$

Возрастающая отдача от масштаба производства:

$$f\left(\alpha x_K, \alpha x_L\right) > \alpha f\left(x_K, x_L\right) \qquad \alpha > 1$$

Издержки – это возрастающая функция от объема производства:

$$TC\left(\alpha f\left(x_K, x_L\right)\right) < TC\left(f\left(\alpha x_K, \alpha x_L\right)\right) = \alpha TC\left(f\left(x_K, x_L\right)\right)$$

Итак, при положительном эффекте масштаба:

$$TC\left(\alpha y\right) < \alpha TC\left(y\right)$$

Средние издержки – убывающая функция объема производства:

$$AC\left(\alpha y\right) = \frac{TC\left(\alpha y\right)}{\alpha y} < \frac{\alpha TC\left(y\right)}{\alpha y} = \frac{TC\left(y\right)}{y} = AC\left(y\right)$$

Отдача от масштаба и поведение средних издержек (однородная технология)

Функция называется однородной степени γ, если для нее выполняется равенство $f(\alpha x_1,\alpha x_2)=\alpha^{\gamma} f(x_1,x_2)$, где α, γ – положительные действительные константы.

При $\gamma>1$ следует положительный эффект масштаба и несовершенная делимость производства; $\gamma=1$ дает постоянную отдачу от масштаба и пропорциональную делимость; а в случае $\gamma<1$ наблюдается отрицательный эффект масштаба и совершенная делимость хозяйственных операций.

Теорема Эйлера об однородных функциях:

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}x_1+\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}x_2=\gamma f(x_1,x_2)$$

Домножим левую и правую части равенства на множитель Лагранжа λ:

$$\lambda\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}x_1+\lambda\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}x_2=\gamma\lambda f(x_1,x_2)$$

Используем условия минимизации издержек:

$$p_1x_1+p_2x_2=\lambda\gamma f(x_1,x_2)$$

В силу того, что множитель Лагранжа λ в задаче минимизации издержек представляет собой их предельную величину, получаем дифференциальное уравнение:

$$TC(Q)=\gamma\frac{dTC}{dQ}Q$$

Его решением является функция издержек

$$TC(Q)=TC(1)Q^{\frac{1}{\gamma}}$$

Отдача от масштаба и поведение средних издержек (однородная технология)

Справедливо и обратное утверждение. $TC(Q)=TC(1)Q^{\frac{1}{\gamma}}$

Пусть Функция издержек линейно однородна относительно затрат факторов:

$$TC(\alpha x_1,\alpha x_2)=p_1\alpha x_1+p_2\alpha x_2=\alpha(p_1x_1+p_2x_2)=\alpha TC(x_1,x_2)$$

В нашем случае: $TC(\alpha x_1,\alpha x_2)=TC(1)f^{\frac{1}{\gamma}}(\alpha x_1,\alpha x_2)=\alpha TC(x_1,x_2)=\alpha TC(1)f^{\frac{1}{\gamma}}(x_1,x_2)$.

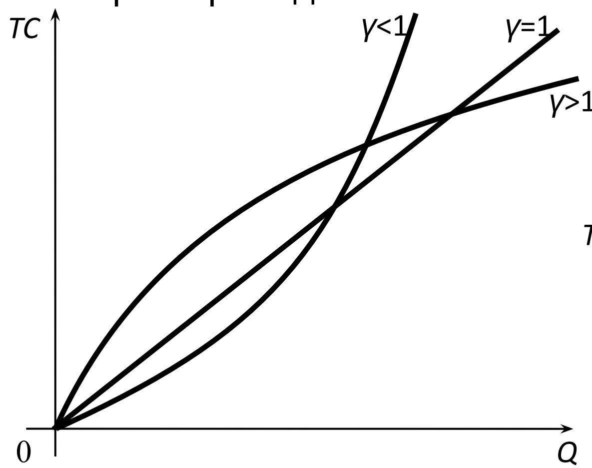
Итак: $TC(1)f^{\frac{1}{\gamma}}(\alpha x_1,\alpha x_2)=\alpha TC(1)f^{\frac{1}{\gamma}}(x_1,x_2)$. Следовательно, $f(\alpha x_1,\alpha x_2)=\alpha^{\gamma}f(x_1,x_2)$.

Таким образом, функция издержек имеет степенной вид $TC(Q)=TC(1)Q^{\frac{1}{\gamma}}$ тогда и только тогда, когда производственная функция является однородной степени γ: $f(\alpha x_1,\alpha x_2)=\alpha^{\gamma}f(x_1,x_2)$.

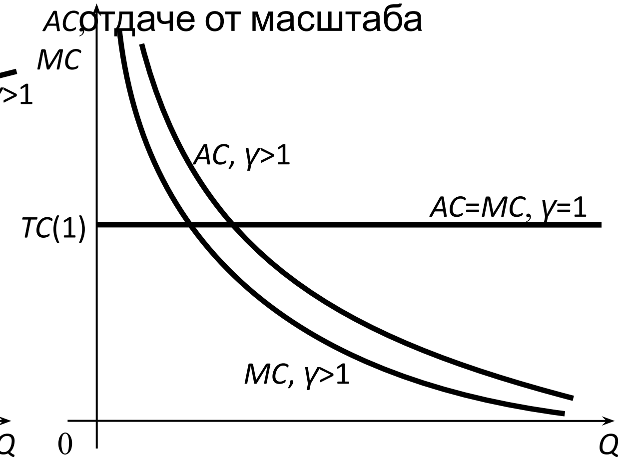
Отдача от масштаба и поведение средних издержек (однородная технология)

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2) = \alpha^{\gamma}(x_1, x_2) \Leftrightarrow TC(Q) = TC(1)Q^{\gamma}$$

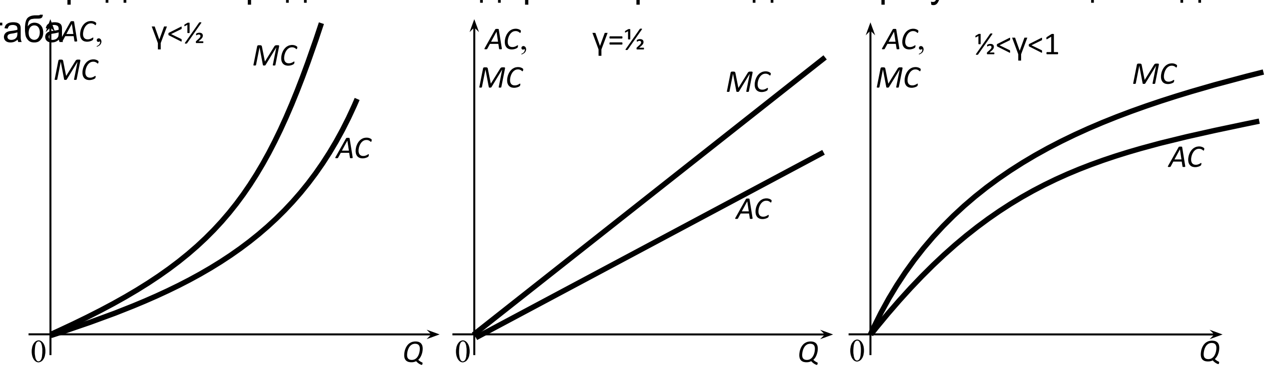
Функции совокупных издержек производства при различном характере отдачи от масштаба



Функции средних и предельных издержек производства при возрастающей (γ>1) и постоянной (γ=1) отдаче от масштаба



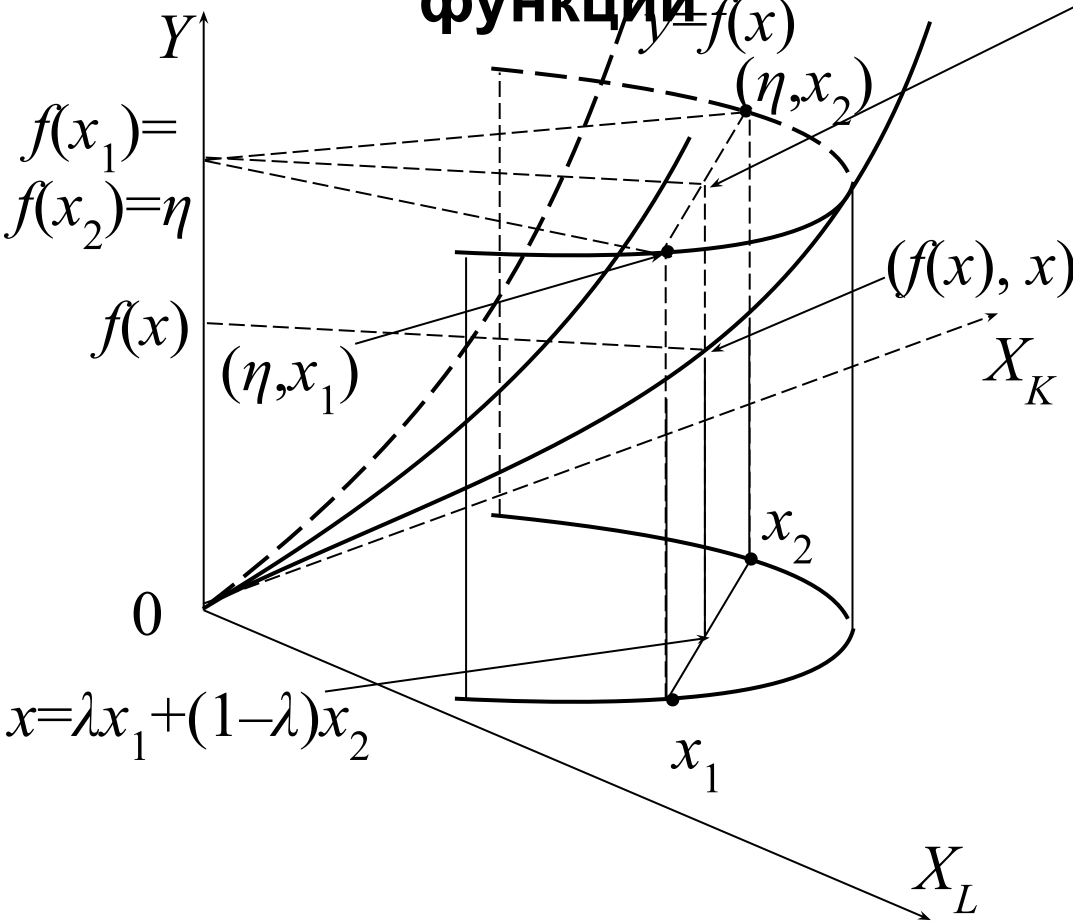
Функции средних и предельных издержек производства при убывающей отдаче от масштаба



Эквивалентные характеристики хозяйственной деятельности

Отдача от масштаба	**Делимость производства**	**Средние издержки как функция объема производства**	**Синергия факторов производства**
Возрастающая	Несовершенная	Убывающая	Положительная
Постоянная	«Пропорциональная»	Константа	Нулевая
Убывающая	Совершенная	Возрастающая	Отрицательная

Выпуклые функции



В пространстве $\mathrm{R} \times X$

- множество $gr \equiv \{(\eta, x) \in \mathrm{R} \times X \mid \eta = f(x)\}$ называется графиком
- множество $epigr \equiv \{(\eta, x) \in \mathrm{R} \times X \mid \eta \geq f(x)\}$ называется надграфиком
- множество $opigr \equiv \{(q, x) \in \mathrm{R} \times X \mid f(x) \geq q\}$ называется подграфиком, или технологическим множеством функции $f : X \to \mathrm{R}$

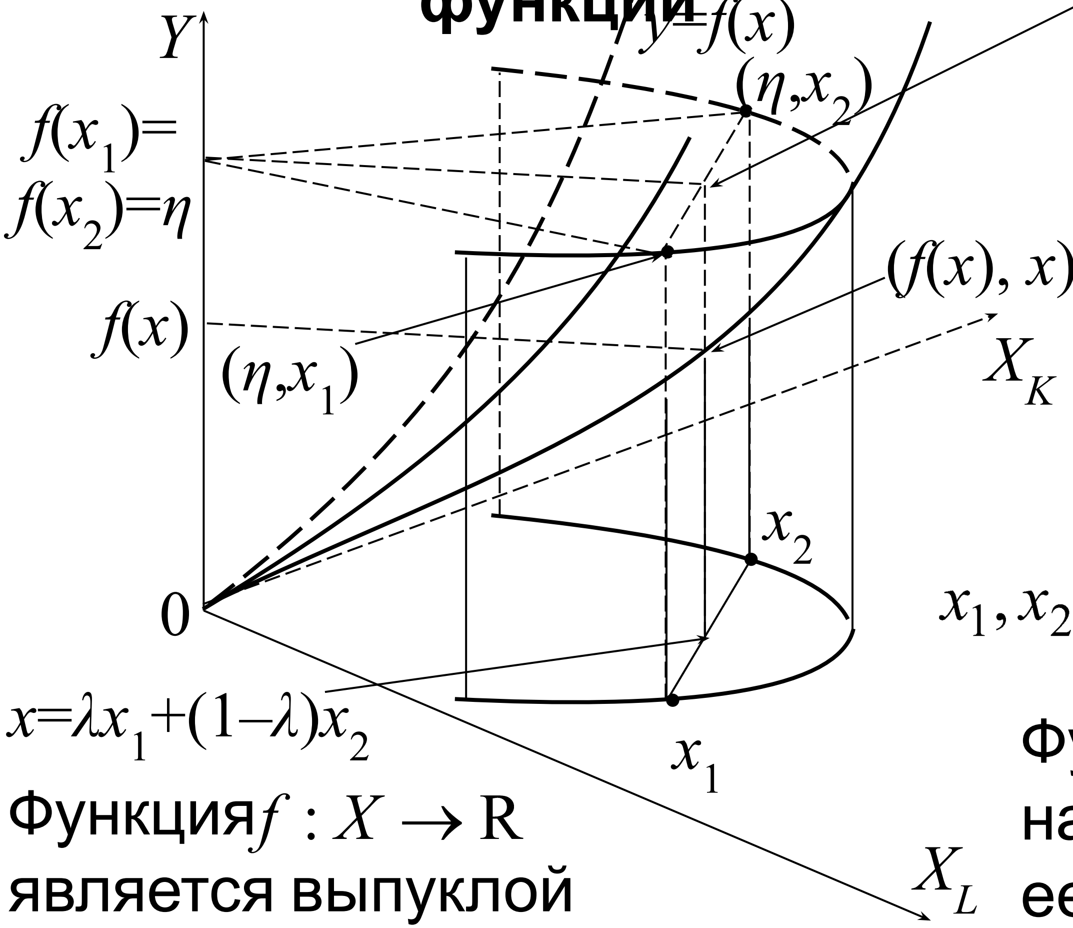
Множество $\{x \mid f(x) = q, q \in \mathrm{R}\}$ называется изоквантой (кривой безразличия)

Множество $\{x \mid f(x) \geq q, q \in \mathrm{R}\}$ называется верхним лебеговским

Множество $\{x \mid f(x) \leq \eta, \eta \in \mathrm{R}\}$ называется нижним лебеговским

для функции $f : X \to \mathrm{R}$

Выпуклые функции



Множество *X* называется выпуклым, если для произвольных векторов x_1 и x_2 из *X* любой вектор *x*, лежащий на соединяющем их отрезке, так же принадлежит этому множеству:

$$x_1, x_2 \in X \Rightarrow x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in X,$$
$$\lambda \in \mathrm{R}, \lambda \in [0,1]$$

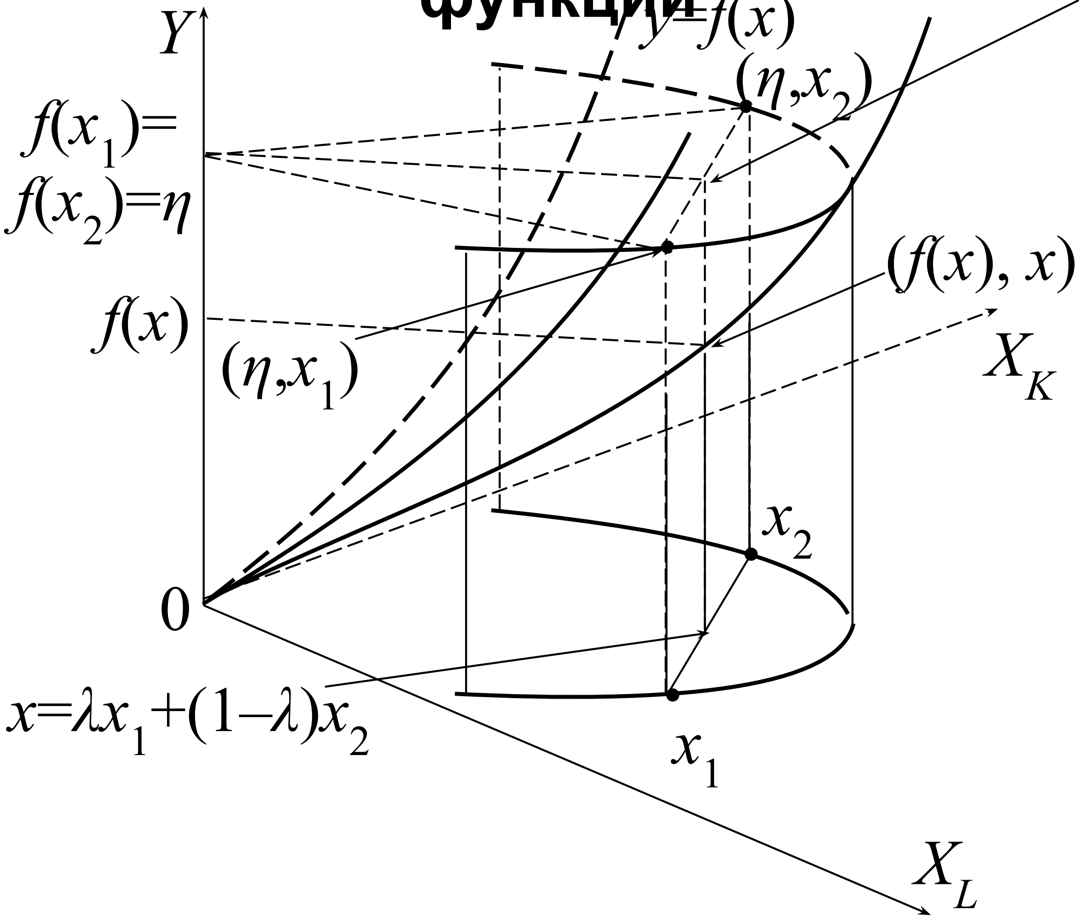
Функция $f : X \to \mathrm{R}$ называется выпуклой, если ее надграфик – это выпуклое множество:

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\right) \le \lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda) f\left(x_2\right);$$
$$x_1, x_2 \in X, \lambda \in \mathrm{R}, \lambda \in [0,1]$$

Функция $f : X \to \mathrm{R}$ является выпуклой тогда и только тогда, когда ее второй дифференциал неотрицателен:

$$d^2 y = \frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K^2} dx_K^2 + 2\frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K \partial x_L} dx_K dx_L + \frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_L^2} dx_L^2 \ge 0$$

Выпуклые функции



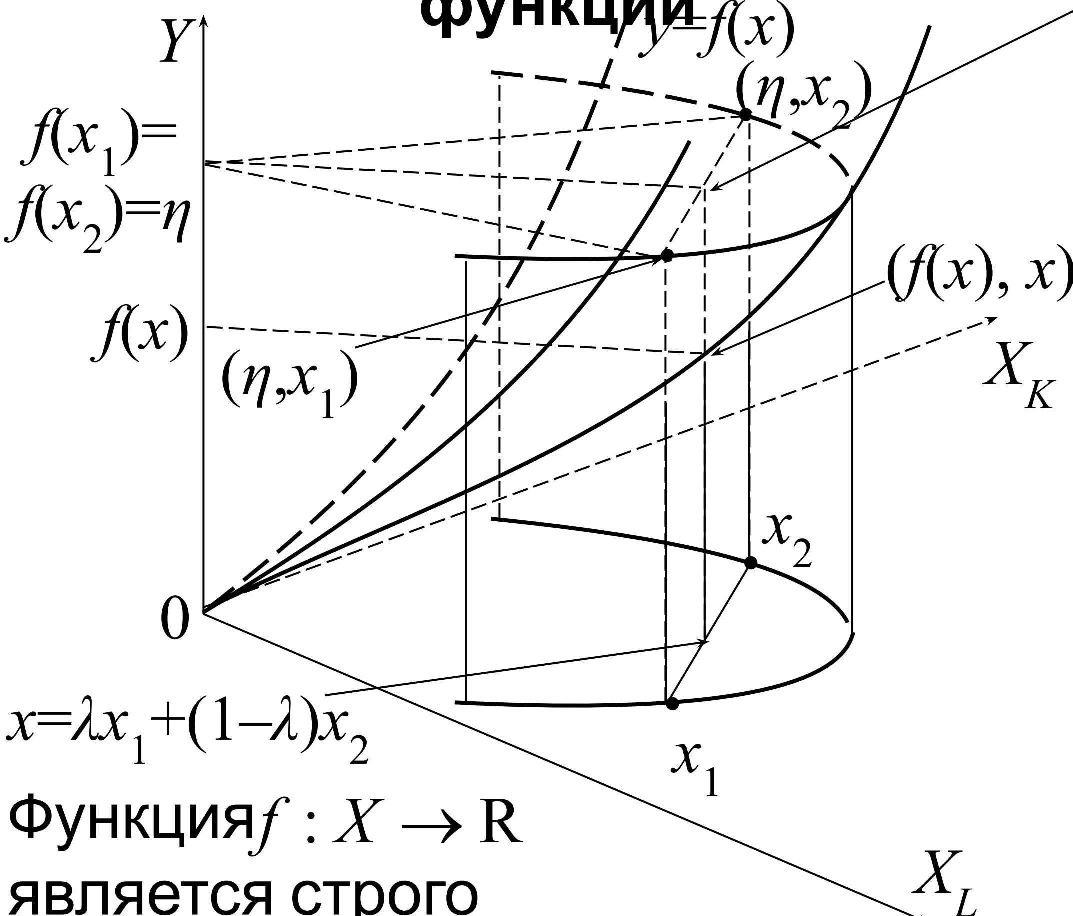
Следовательно, функция $f: X \to \mathrm{R}$ является выпуклой тогда и только тогда, когда главные миноры ее матрицы Гессе

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K \partial x_L} \\ \dfrac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L \partial x_K} & \dfrac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L^2} \end{pmatrix}$$

- неотрицательные:

$$\frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K^2} \geq 0, \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L^2} \geq \left(\frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K \partial x_L}\right)^2$$

Выпуклые функции



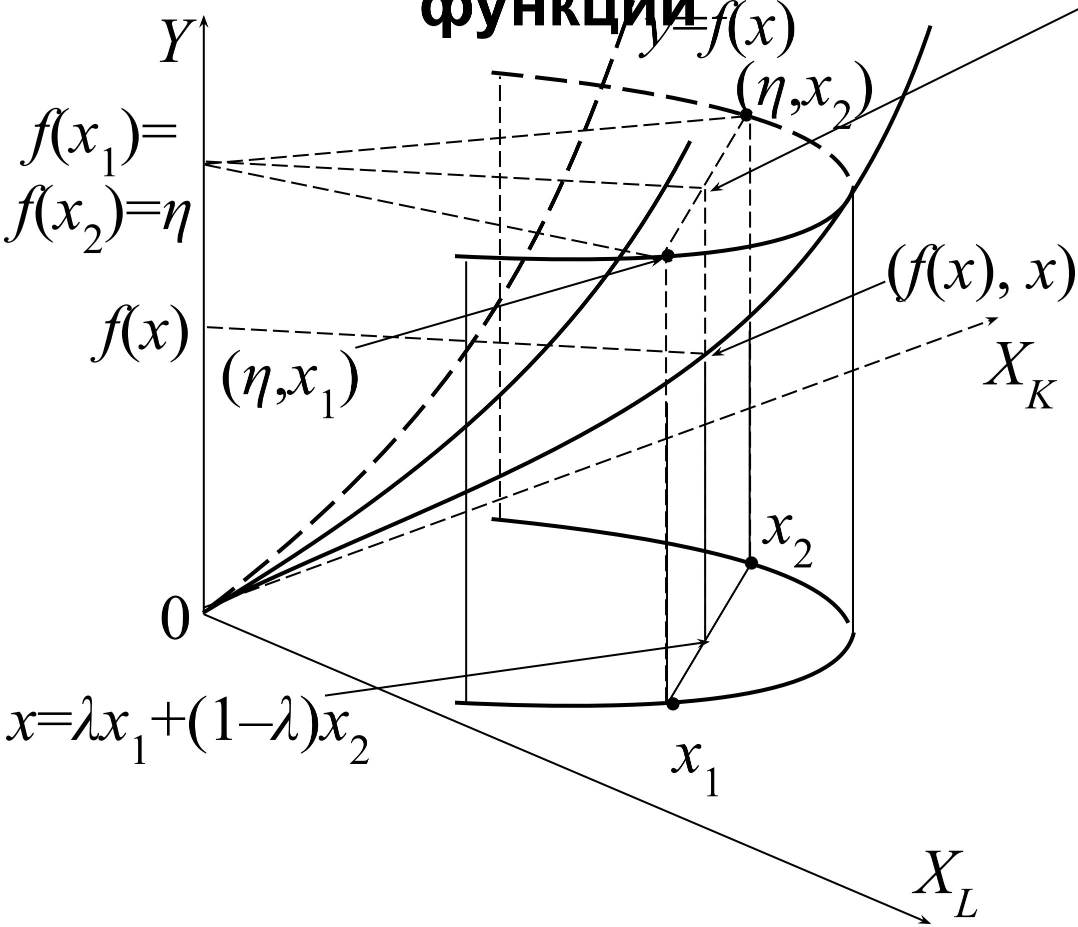
Функция $f: X \to \mathrm{R}$ называется строго выпуклой, если ее надграфик – это выпуклое множество и при этом для любых двух точек , принадлежащих графику функции, никакая внутренняя точка соединяющего их отрезка не принадлежит графику:

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) < \lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda) f\left(x_2\right);$$
$$x_1, x_2 \in X, \lambda \in \mathrm{R}, \lambda \in (0,1)$$

Функция $f: X \to \mathrm{R}$ является строго выпуклой тогда и только тогда, когда ее второй дифференциал положителен:

$$d^2 y = \frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K^2} dx_K^2 + 2\frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K \partial x_L} dx_K dx_L + \frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_L^2} dx_L^2 > 0$$

Выпуклые функции



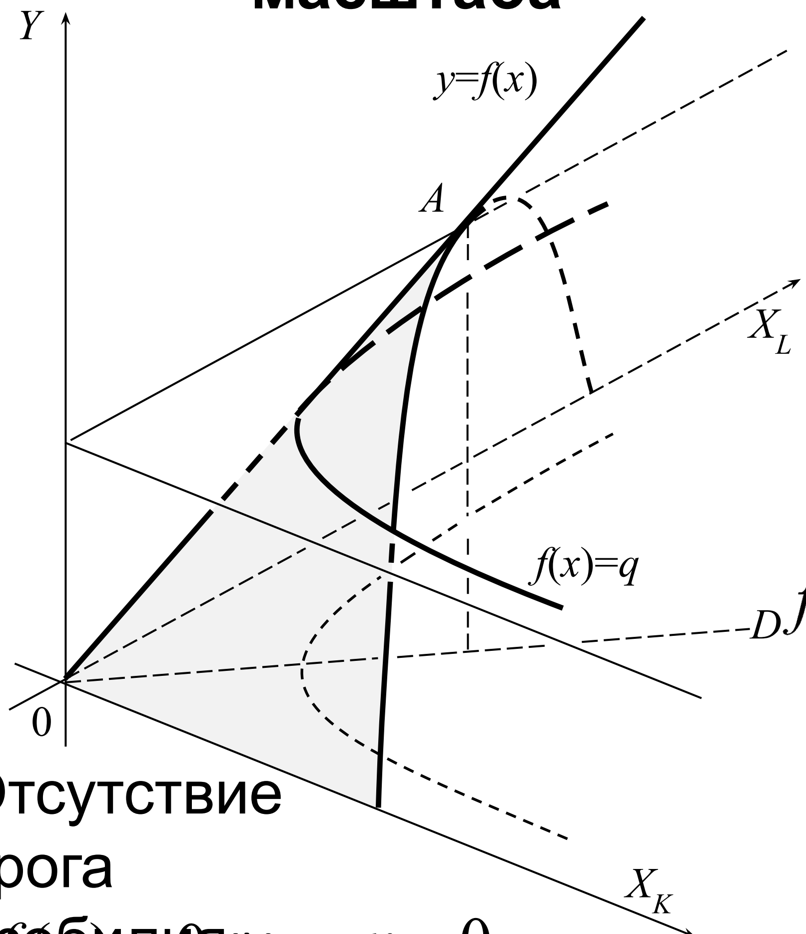
Следовательно, функция $f : X \to \mathrm{R}$ является строго выпуклой тогда и только тогда, когда главные миноры ее матрицы Гессе

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_K^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_K \partial x_L} \\ \dfrac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_L \partial x_K} & \dfrac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_L^2} \end{pmatrix}$$

- положительные:

$$\frac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_K^2} > 0, \frac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_K^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_L^2} > \left(\frac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_K \partial x_L} \right)^2$$

Вогнутая функция с постоянной отдачей от масштаба



Функция $f : X \to \mathrm{R}$ называется вогнутой, если противоположная по знаку функция $-f : X \to \mathrm{R}$ является выпуклой.

Функция $f : X \to \mathrm{R}$ называется вогнутой, если ее подграфик (технологическое множество) является выпуклым.

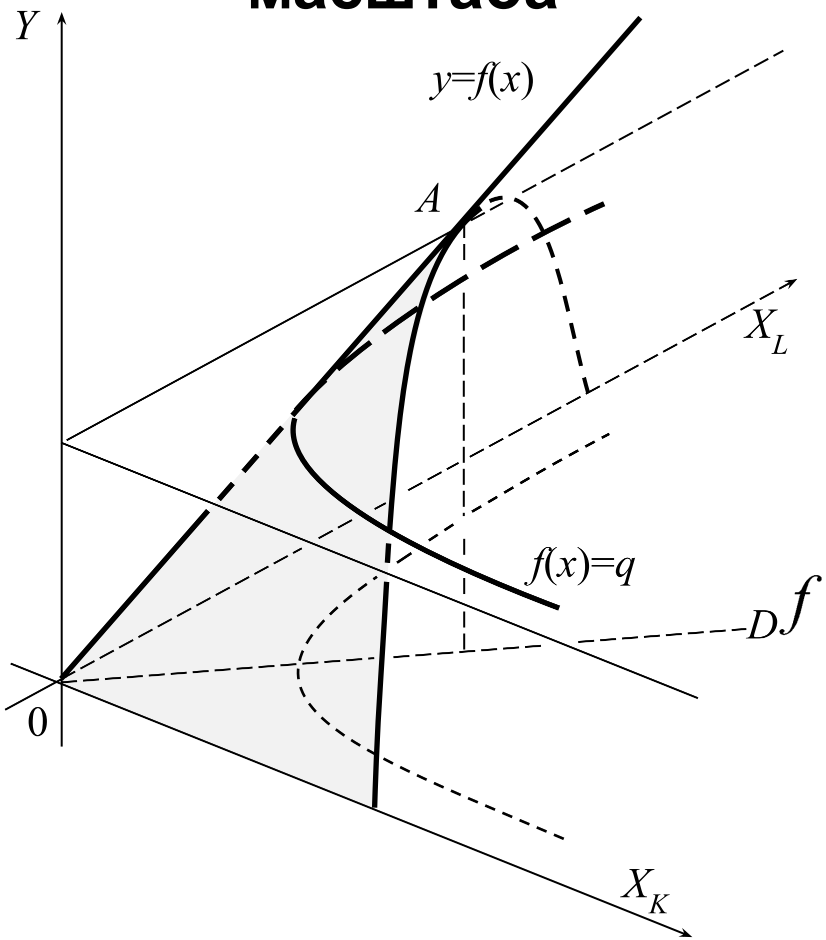
$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \ge \lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda) f\left(x_2\right);$$
$$x_1, x_2 \in X, \lambda \in \mathrm{R}, \lambda \in [0,1]$$

Отсутствие «рога изобилия»: $f(x) = 0$ при $x = 0$

Из вогнутости технологии следует совершенная либо пропорциональная делимость производства, а значит, невозрастающая (убывающая либо постоянная) отдача от масштаба:

$$x_2 = 0 \Rightarrow f\left(x_2\right) = 0 \Rightarrow f\left(\lambda x_1\right) \ge \lambda f\left(x_1\right), \lambda \in (0,1)$$

Вогнутая функция с постоянной отдачей от масштаба



Функция $f: X \to \mathrm{R}$ называется вогнутой, если противоположная по знаку функция $-f: X \to \mathrm{R}$ является выпуклой.

Функция $f: X \to \mathrm{R}$ называется вогнутой, если ее подграфик (технологическое множество) является выпуклым.

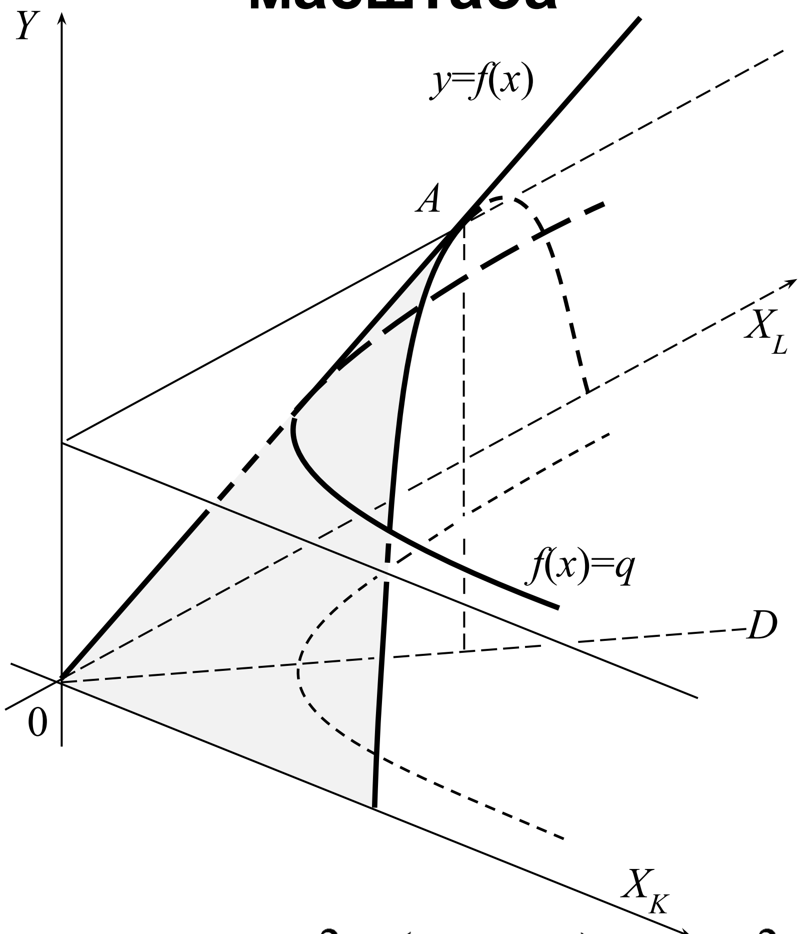
$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\right) \geq \lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda) f\left(x_2\right);$$

$$x_1, x_2 \in X, \lambda \in \mathrm{R}, \lambda \in [0,1]$$

Функция $f: X \to \mathrm{R}$ является вогнутой тогда и только тогда, когда ее второй дифференциал неположителен:

$$d^2 y = \frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K^2} dx_K^2 + 2 \frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K \partial x_L} dx_K dx_L + \frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_L^2} dx_L^2 \leq 0$$

Вогнутая функция с постоянной отдачей от масштаба



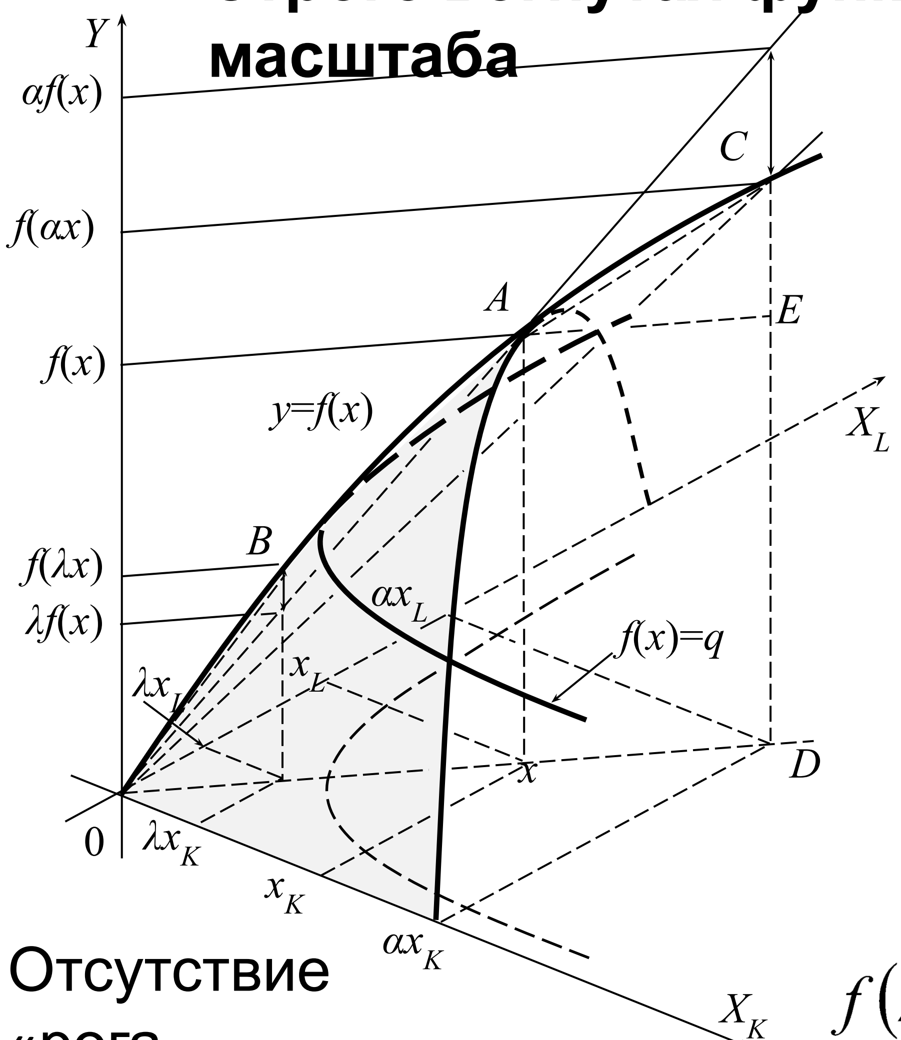
Следовательно, функция $f: X \to \mathrm{R}$ является вогнутой тогда и только тогда, когда при возрастании порядка главный минор матрицы Гессе

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_K^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_K \partial x_L} \\ \dfrac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_L \partial x_K} & \dfrac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_L^2} \end{pmatrix}$$

меняет значение с неположительного на неотрицательное:

$$\frac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_K^2} \le 0, \frac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_K^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_L^2} \ge \left(\frac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_K \partial x_L} \right)^2$$

Строго вогнутая функция и убывающая отдача от масштаба



Функция $f : X \to \mathrm{R}$ называется строго вогнутой, если $-f : X \to \mathrm{R}$ противоположная по знаку функция является строго выпуклой.

Функция $f : X \to \mathrm{R}$ называется строго вогнутой, если ее подграфик (технологическое множество) является выпуклым и при этом для любых двух точек, принадлежащих графику функции, никакая внутренняя точка соединяющего их отрезка не принадлежит графику:

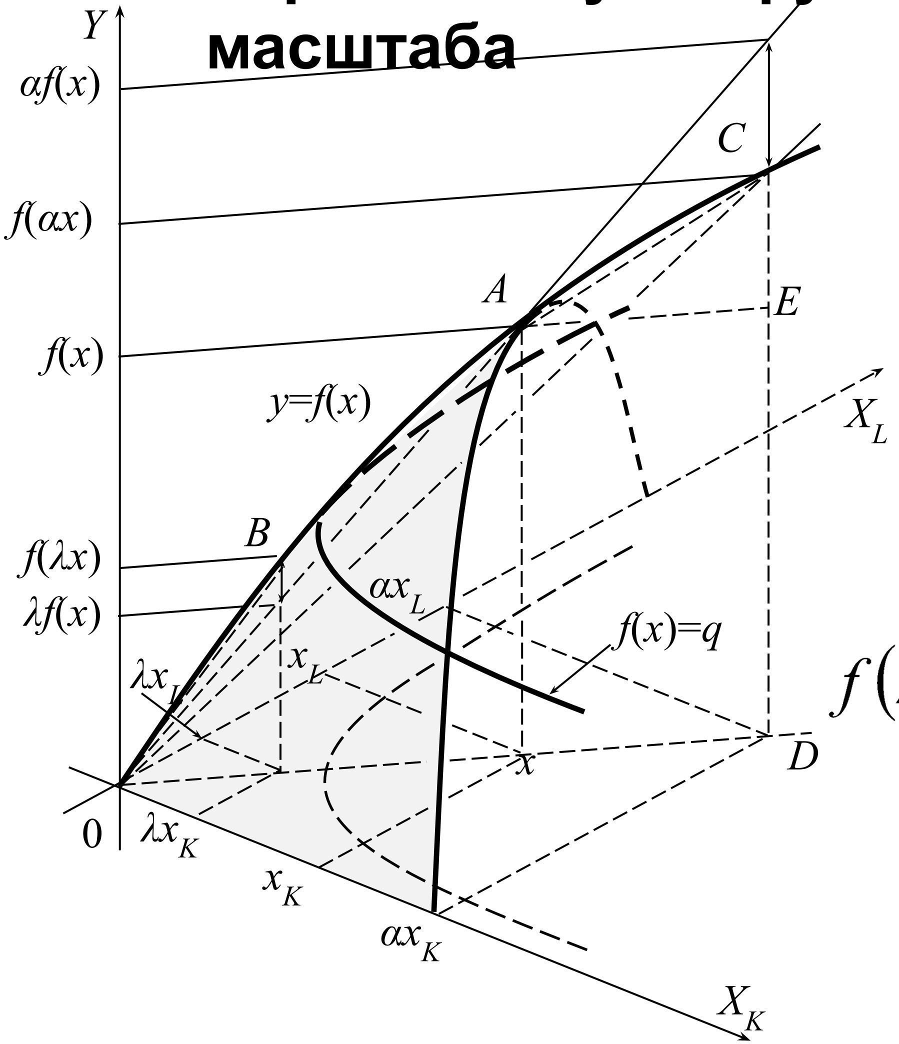
$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) > \lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda) f\left(x_2\right);$$
$$x_1, x_2 \in X, \lambda \in \mathrm{R}, \lambda \in (0,1)$$

Отсутствие «рога изобилия»: $f(x) = 0$ при $x = 0$

Из строгой вогнутости технологии следует совершенная делимость производства, а значит, убывающая отдача от масштаба:

$$x_2 = 0 \Rightarrow f\left(x_2\right) = 0 \Rightarrow f\left(\lambda x_1\right) > \lambda f\left(x_1\right), \lambda \in (0,1)$$

Строго вогнутая функция и убывающая отдача от масштаба



Функция $f : X \to \mathrm{R}$ называется строго вогнутой, если ее подграфик (технологическое множество) является выпуклым и при этом для любых двух точек, принадлежащих графику функции, никакая внутренняя точка соединяющего их отрезка не принадлежит графику:

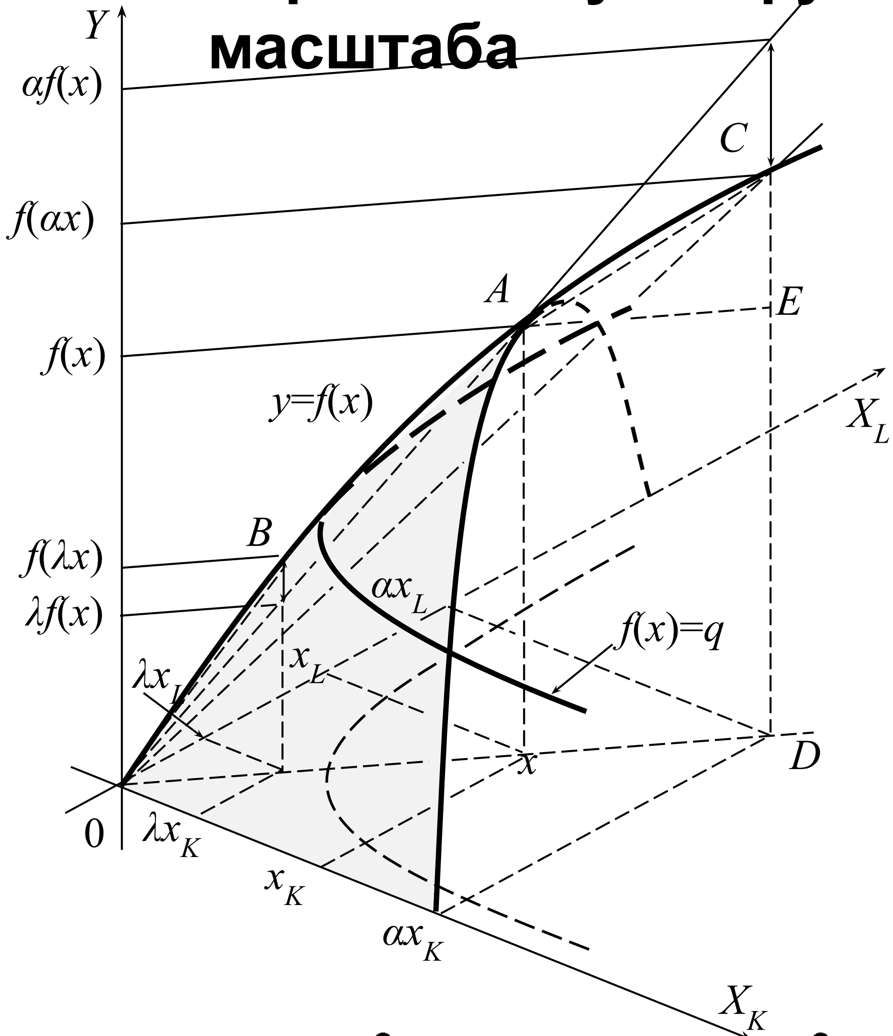
$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\right) > \lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda) f\left(x_2\right);$$

$$x_1, x_2 \in X, \lambda \in \mathrm{R}, \lambda \in (0,1)$$

Функция $f : X \to \mathrm{R}$ является строго вогнутой тогда и только тогда, когда ее второй дифференциал отрицателен:

$$d^2 y = \frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K^2} dx_K^2 + 2\frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K \partial x_L} dx_K dx_L + \frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_L^2} dx_L^2 < 0$$

Строго вогнутая функция и убывающая отдача от масштаба



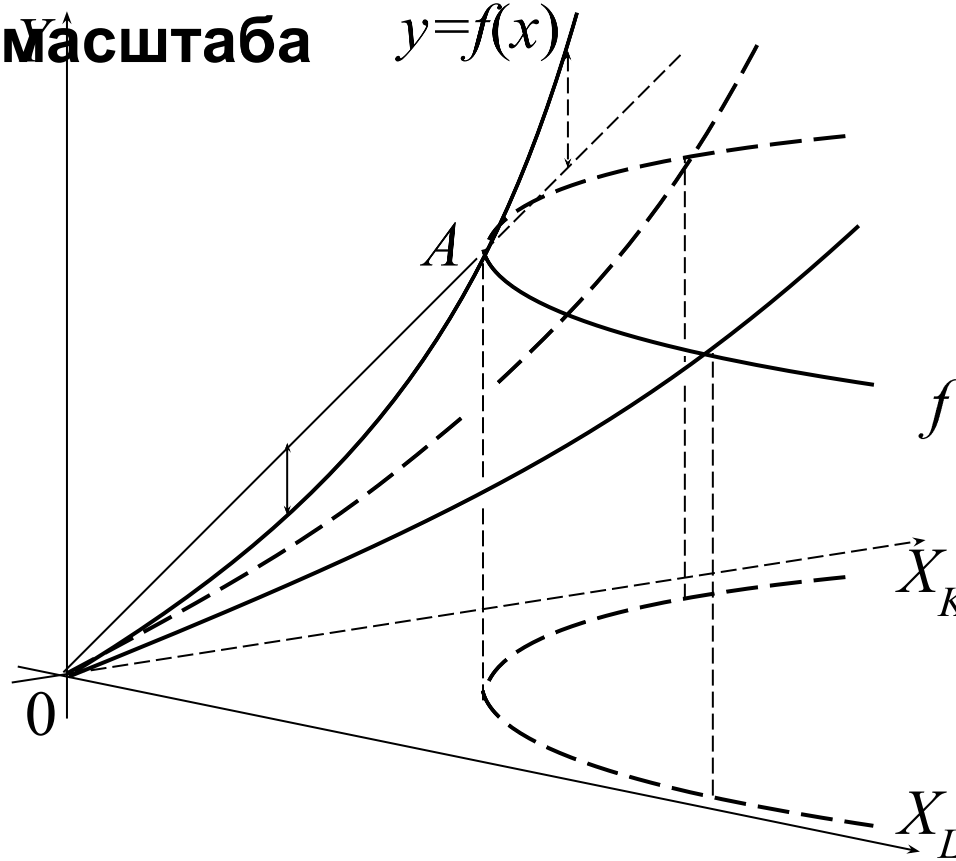
Следовательно, функция $f: X \to \mathrm{R}$ является строго вогнутой тогда и только тогда, когда при возрастании порядка главный минор матрицы Гессе

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_K^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_K \partial x_L} \\ \dfrac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_L \partial x_K} & \dfrac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_L^2} \end{pmatrix}$$

меняет значение с отрицательного на положительное:

$$\frac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_K^2} < 0, \frac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_K^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_L^2} > \left(\frac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_K \partial x_L} \right)^2$$

Строго квазивогнутая функция с возрастающей отдачей от масштаба



Функция $f: X \to \mathrm{R}$, где X – это выпуклое множество, называется квазивогнутой, если ее верхние лебеговские множества являются выпуклыми:

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \geq \min\left\{f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right\};$$

$$x_1, x_2 \in X, \lambda \in \mathrm{R}, \lambda \in [0,1]$$

Квазивогнутой является функция, у которой подграфик (технологическое множество) является выпуклым в любом своем горизонтальном сечении.

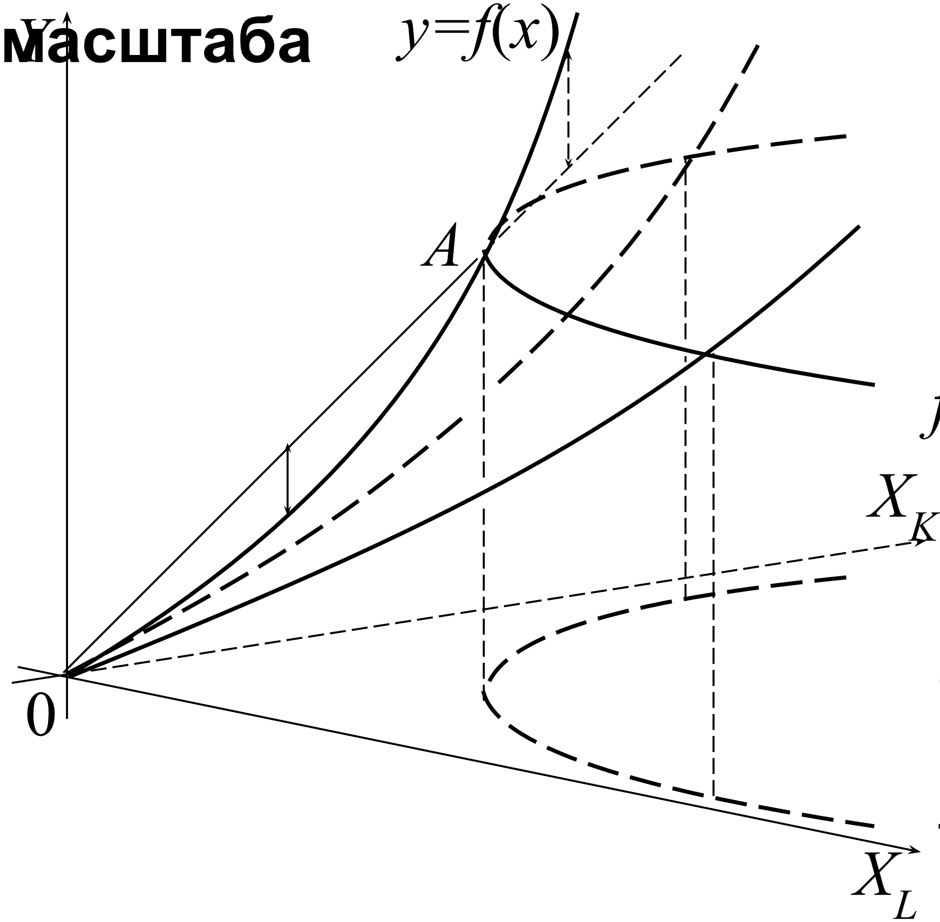
Другими словами, квазивогнутой является функция, вогнутая в любом своем горизонтальном сечении.

Любая вогнутая функция обязательно является квазивогнутой.

Обратное утверждение, вообще говоря, не верно: не любая квазивогнутая функция является вогнутой.

Квазивогнутые функции допускают возможность как убывающей и постоянной, так и возрастающей отдачи от

Строго квазивогнутая функция с возрастающей отдачей от масштаба



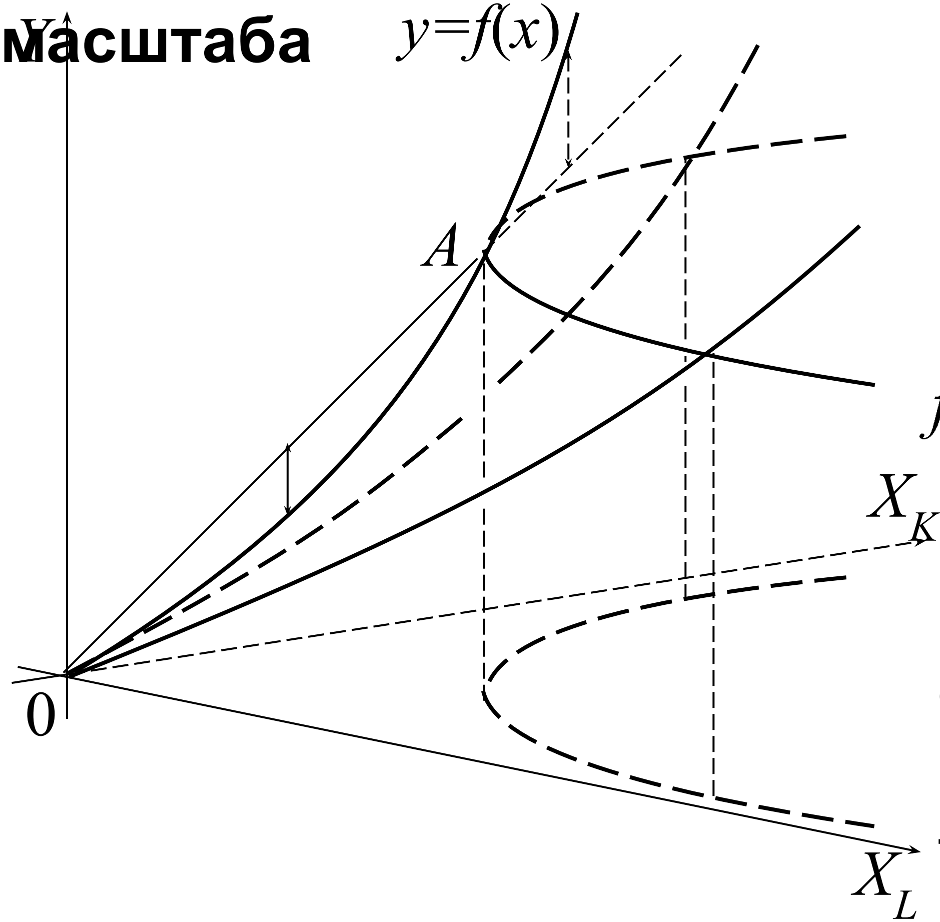
Функция $f : X \to \mathrm{R}$, где X – это выпуклое множество, называется квазивогнутой, если ее верхние лебеговские множества являются выпуклыми:

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \geq \min\left\{f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right\};$$
$$x_1, x_2 \in X, \lambda \in \mathrm{R}, \lambda \in [0,1]$$

Функция $f : X \to \mathrm{R}$ является квазивогнутой тогда и только тогда, когда ее второй дифференциал неположителен вдоль произвольной линии уровня:

$$\begin{cases} d^2 y = \dfrac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K^2} dx_K^2 + 2\dfrac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K \partial x_L} dx_K dx_L + \dfrac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_L^2} dx_L^2 \leq 0 \\ dy = \dfrac{\partial f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K} dx_K + \dfrac{\partial f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_L} dx_L = 0 \Leftrightarrow dx_L = -\dfrac{MP_K}{MP_L} dx_K \end{cases}$$

Строго квазивогнутая функция с возрастающей отдачей от масштаба



Функция $f: X \to \mathrm{R}$, где X – это выпуклое множество, называется квазивогнутой, если ее верхние лебеговские множества являются выпуклыми:

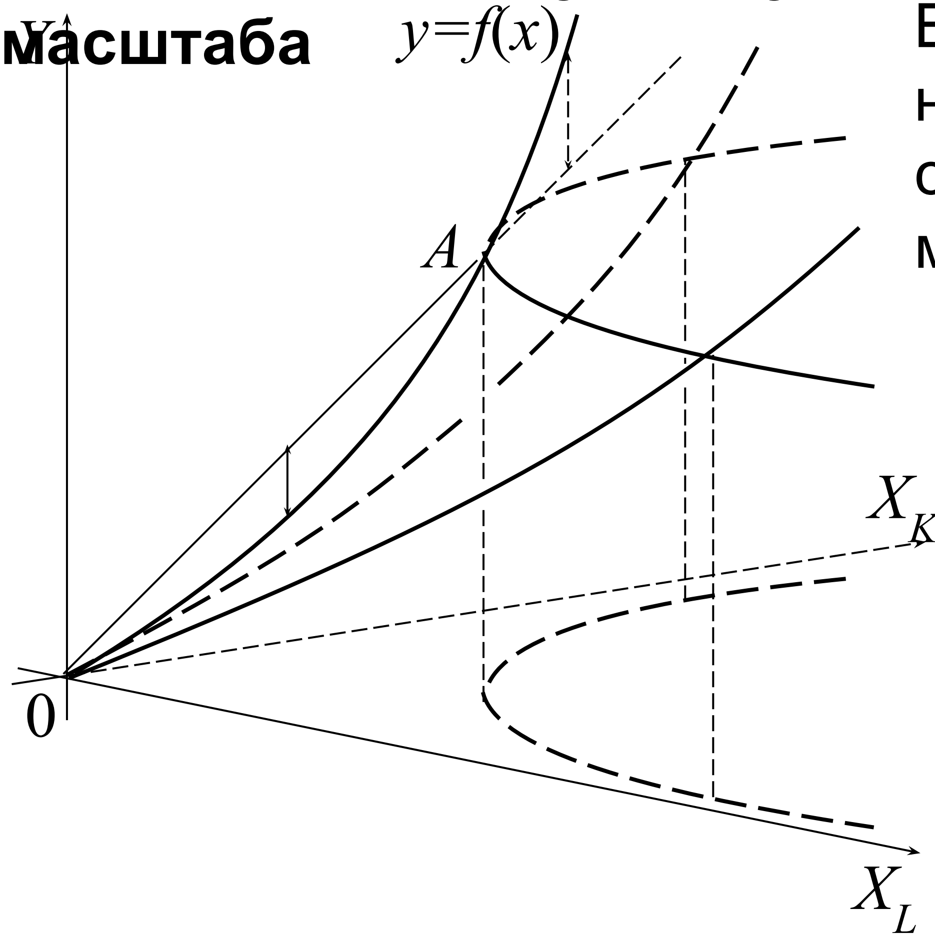
$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \ge \min\left\{f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right\};$$

$$x_1, x_2 \in X, \lambda \in \mathrm{R}, \lambda \in [0,1]$$

Функция $f: X \to \mathrm{R}$ является квазивогнутой тогда и только тогда, когда ее второй дифференциал неположителен вдоль произвольной линии уровня:

$$\left(\frac{\frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K^2}\left(\frac{\partial f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_L}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K \partial x_L}\frac{\partial f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K}\frac{\partial f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_L} + \frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_L^2}\left(\frac{\partial f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K}\right)^2}{\left(\frac{\partial f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_L}\right)^2}\right) dx_K^2 \le 0$$

Строго квазивогнутая функция с возрастающей отдачей от масштаба



Выражение в левой части неравенства ниже представляет собой определитель окаймленной матрицы Гессе со знаком «–»:

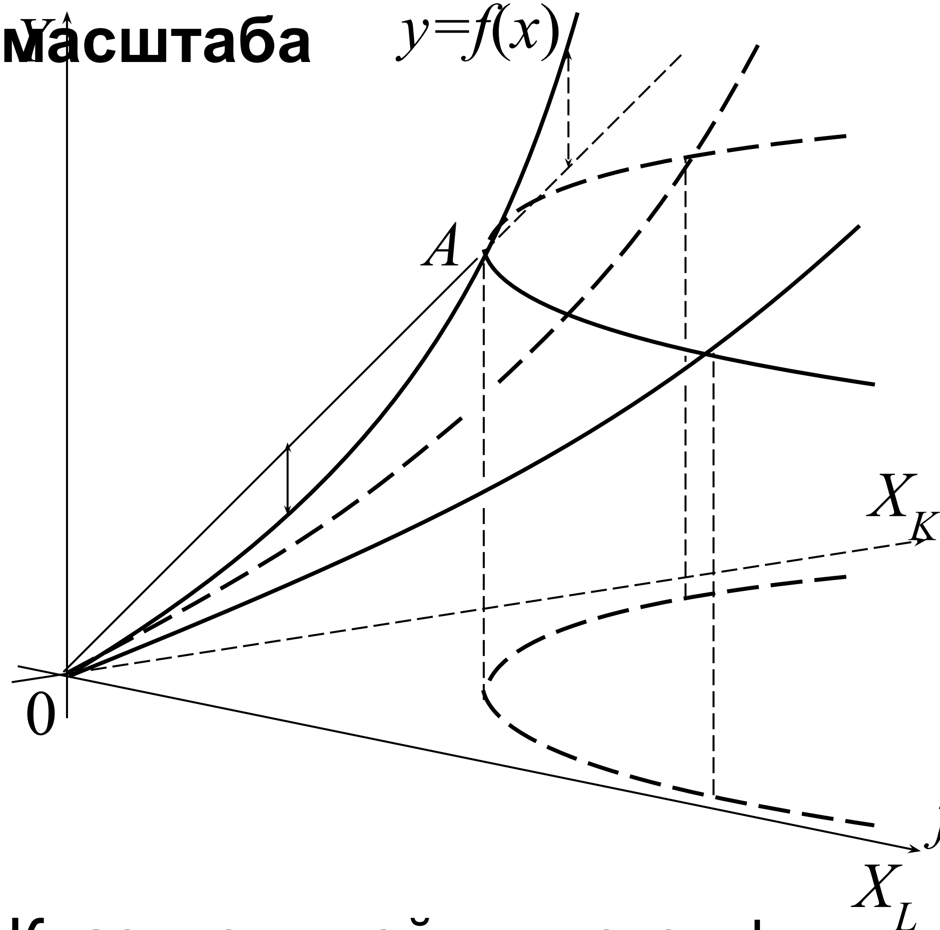
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_K} & \frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_L} \\ \frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_K} & \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K^2} & \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K \partial x_L} \\ \frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_L} & \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L \partial x_K} & \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L^2} \end{pmatrix}$$

Функция $f : X \to \mathrm{R}$ является квазивогнутой тогда и только тогда, когда ее второй дифференциал неположителен вдоль произвольной линии уровня:

$$\frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K^2}\left(\frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_L}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K \partial x_L}\frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_K}\frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_L} + \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L^2}\left(\frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_K}\right)^2 \le 0$$

Таким образом, функция $f : X \to \mathrm{R}$ является квазивогнутой тогда и только тогда, когда ее окаймленный гессиан неотрицателен.

Строго квазивогнутая функция с возрастающей отдачей от масштаба



Функция $f : X \to \mathrm{R}$, где *X* – это выпуклое множество, называется строго квазивогнутой, если ее верхние лебеговские множества являются выпуклыми и для любых двух различных точек, принадлежащих графику функции, никакая внутренняя точка соединяющего их отрезка не принадлежит графику функции

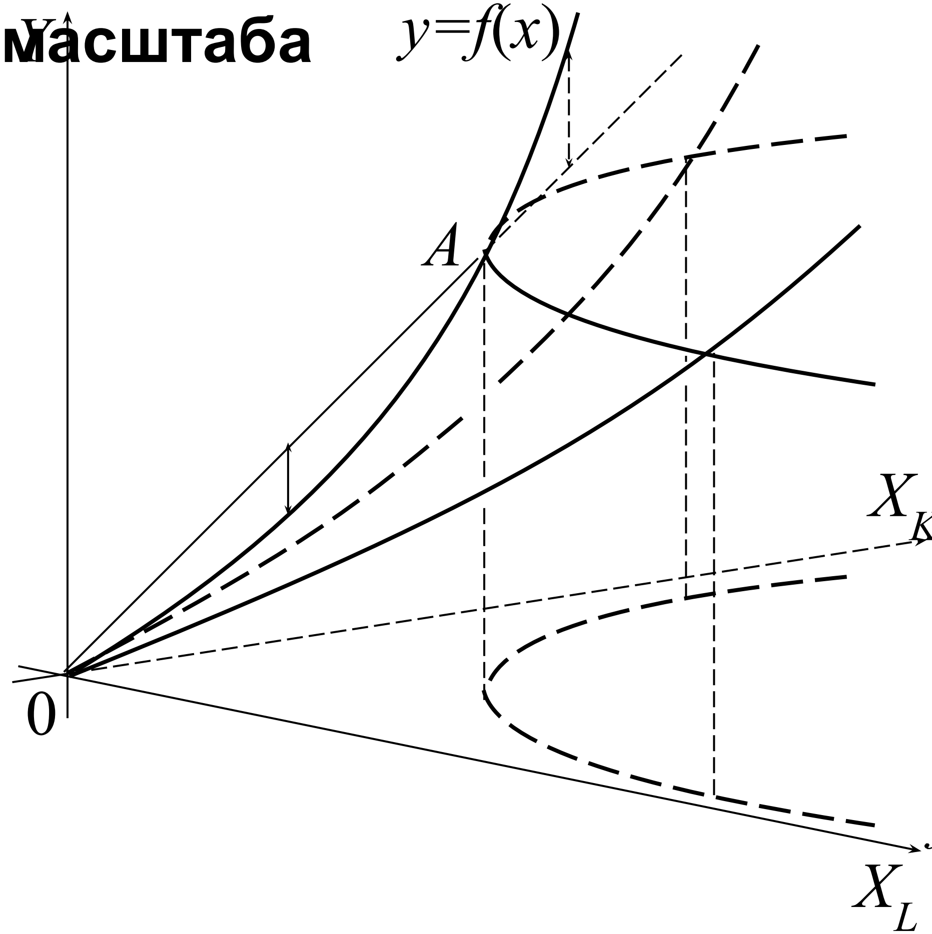
$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) > \min\{f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\};$$

$$x_1, x_2 \in X, \lambda \in \mathrm{R}, \lambda \in (0,1)$$

Квазивогнутой является функция, у которой подграфик (технологическое множество) является выпуклым в любом своем горизонтальном сечении и у которой на изоквантах (кривых безразличия) нет прямых участков..

Другими словами, квазивогнутой является функция, строго вогнутая в любом своем горизонтальном сечении.

Строго квазивогнутая функция с возрастающей отдачей от масштаба



Функция $f : X \to \mathrm{R}$, где X – это выпуклое множество, называется строго квазивогнутой, если ее верхние лебеговские множества являются выпуклыми и для любых двух различных точек, принадлежащих графику функции, никакая внутренняя точка соединяющего их отрезка не принадлежит графику функци

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) > \min\left\{f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right\};$$

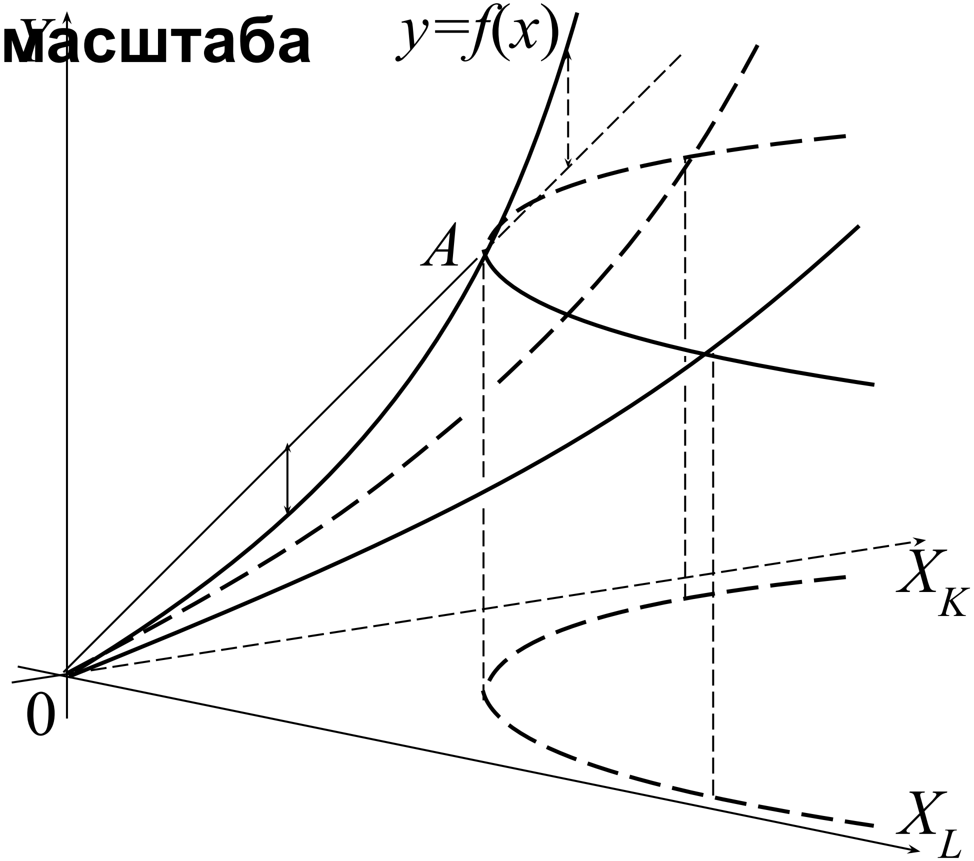
$$x_1, x_2 \in X, \lambda \in \mathrm{R}, \lambda \in (0,1)$$

Любая строго вогнутая функция обязательно является строго квазивогнутой.

Обратное утверждение, вообще говоря, не верно: не любая строго квазивогнутая функция является строго вогнутой.

Строго квазивогнутые функции допускают возможность любого типа (убывающего, постоянного и возрастающего) эффекта

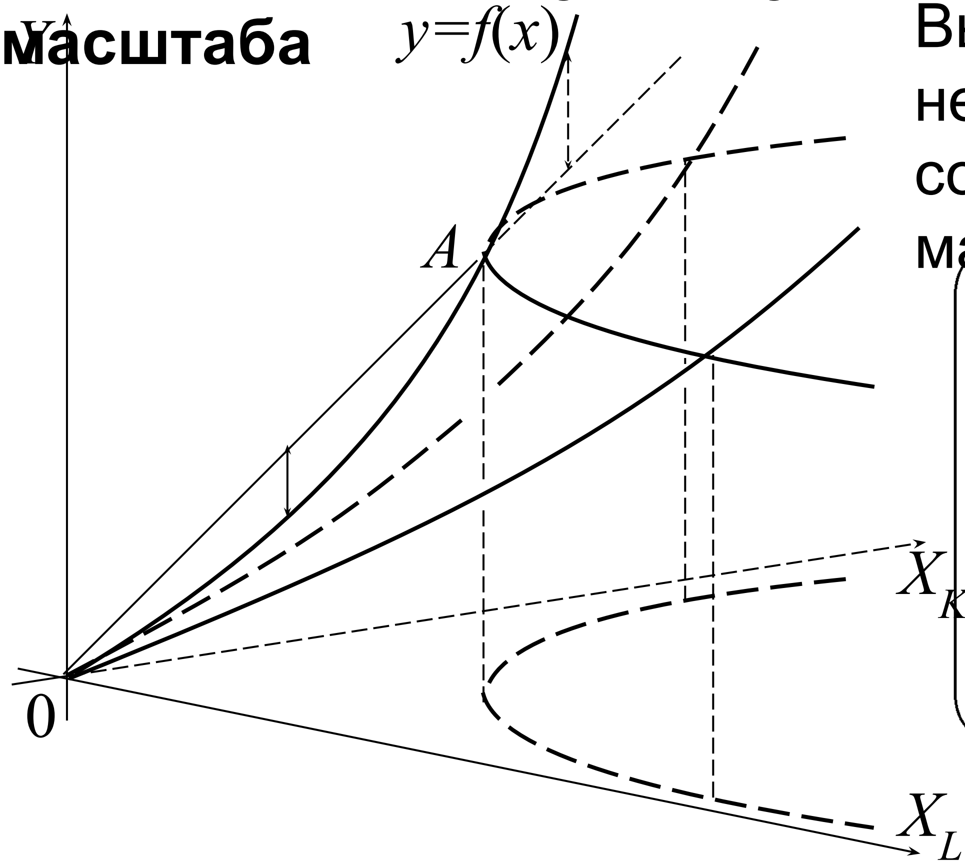
Строго квазивогнутая функция с возрастающей отдачей от масштаба



Функция $f : X \to \mathrm{R}$ является строго квазивогнутой тогда и только тогда, когда ее второй дифференциал отрицателен вдоль произвольной линии уровня:

$$\begin{cases} d^2y = \dfrac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_K^2} dx_K^2 + 2\dfrac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_K \partial x_L} dx_K dx_L + \dfrac{\partial^2 f(x_K, x_L)}{\partial x_L^2} dx_L^2 < 0 \\ dy = \dfrac{\partial f(x_K, x_L)}{\partial x_K} dx_K + \dfrac{\partial f(x_K, x_L)}{\partial x_K} dx_L = 0 \Leftrightarrow dx_L = -\dfrac{MP_K}{MP_L} dx_K \end{cases}$$

Строго квазивогнутая функция с возрастающей отдачей от масштаба



Выражение в левой части неравенства ниже представляет собой определитель окаймленной матрицы Гессе со знаком «–»:

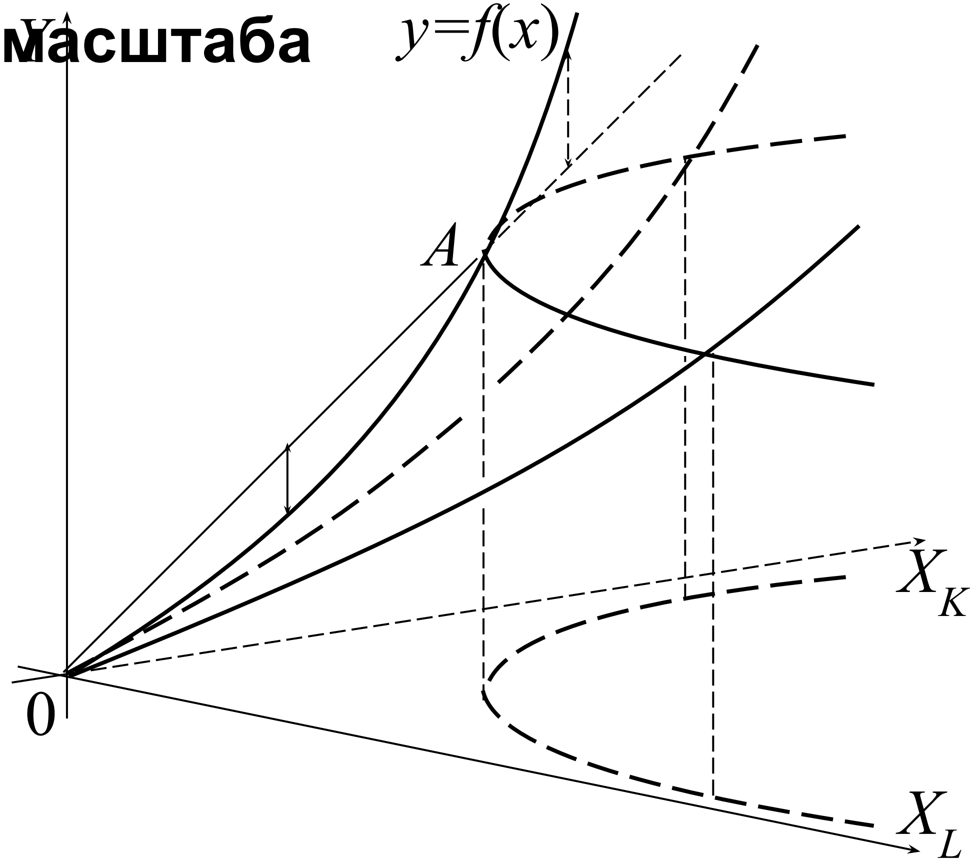
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_K} & \frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_L} \\ \frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_K} & \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K^2} & \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K \partial x_L} \\ \frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_L} & \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L \partial x_K} & \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L^2} \end{pmatrix}$$

Функция $f : X \to \mathrm{R}$ является строго квазивогнутой тогда и только тогда, когда ее второй дифференциал отрицателен вдоль произвольной линии уровня:

$$\frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K^2}\left(\frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_L}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K \partial x_L}\frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_K}\frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_L} + \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L^2}\left(\frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_K}\right)^2 < 0$$

Итак, функция $f : X \to \mathrm{R}$ является строго квазивогнутой тогда и только тогда, когда ее окаймленный гессиан положителен.

Строго квазивогнутая функция с возрастающей отдачей от масштаба



Свойства неоклассических производственных функций (функций полезности):

$$y = f\left(x_K, x_L\right) \in C^2$$

$$\frac{\partial f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K} > 0, \frac{\partial f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_L} > 0$$

$$\frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K^2} < 0, \frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_L^2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K \partial x_L} = \frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_L \partial x_K} > 0$$

Вдоль изокванты:

$$dy = \frac{\partial f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K} dx_K + \frac{\partial f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_L} dx_L = 0$$

Следовательно: $\left.\frac{dx_L}{dx_K}\right|_{y=const} = -\frac{MP_K}{MP_L} < 0$

$$\left.\frac{d}{dx_K}\left(\frac{dx_L}{dx_K}\right)\right|_{y=const} = -\frac{\frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K^2}\left(\frac{\partial f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_L}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K \partial x_L}\frac{\partial f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K}\frac{\partial f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_L} + \frac{\partial^2 f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_L^2}\left(\frac{\partial f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_K}\right)^2}{\left(\frac{\partial f\left(x_K, x_L\right)}{\partial x_L}\right)^3} > 0$$