Тема: Признаки монотонности функции. Экстремум функции. Исследование функции на монотонность и экстремум.

Эти определения у вас уже есть!

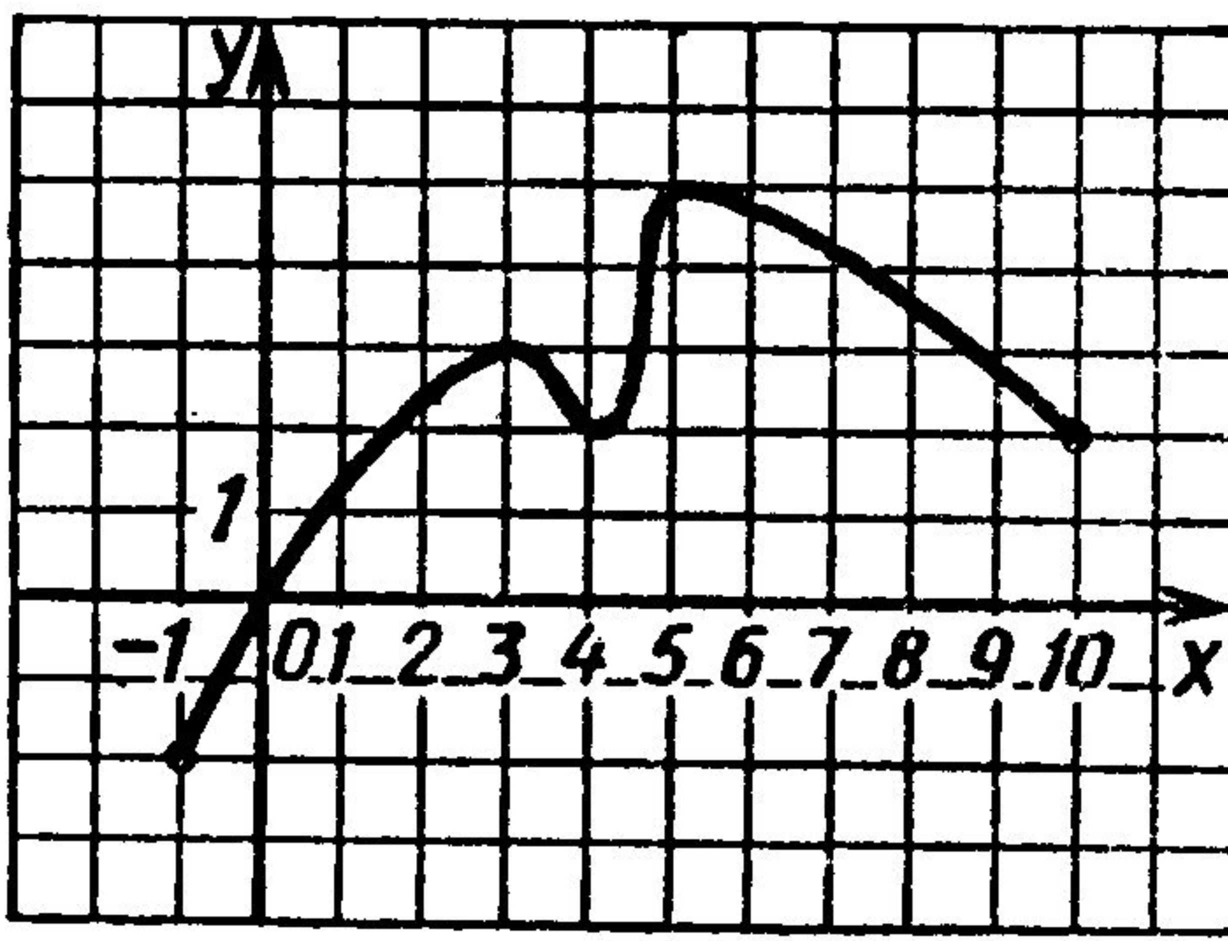
О п р е д е л е н и е. **Функция f *возрастает* на множестве P, если для любых x_1 и x_2 из множества P, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.**

О п р е д е л е н и е. **Функция f *убывает* на множестве P, если для любых x_1 и x_2 из множества P, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.**

Иными словами, функция f называется возрастающей на множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции. Функция f называется убывающей на множестве P, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

$f(x) \nearrow$ при $x \in$

$f(x) \searrow$ при $x \in$



Рассмотрим *применение производной к нахождению промежутков возрастания и убывания функций.*

Пусть значения производной функции $y = f(x)$ положительны на некотором промежутке, т. е. $f'(x) > 0$. Тогда угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ к графику этой функции в каждой точке данного промежутка положителен. Это означает, что касательная к графику функции направлена вверх, и поэтому график функции на этом промежутке «поднимается», т. е. функция $f(x)$ возрастает (рис. 120).

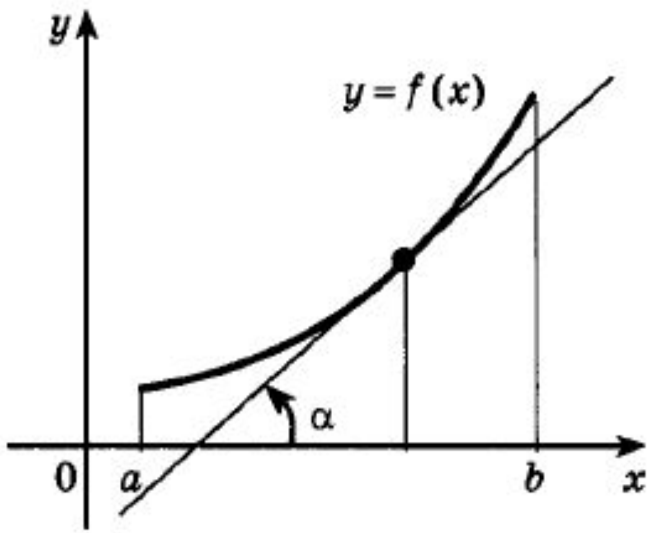


Рис. 120

Если $f'(x) < 0$ на некотором промежутке, то угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$ к графику функции $y = f(x)$ отрицателен. Это означает, что касательная к графику функции направлена вниз, и поэтому график функции на этом промежутке «опускается», т. е. функция $f(x)$ убывает (рис. 121).

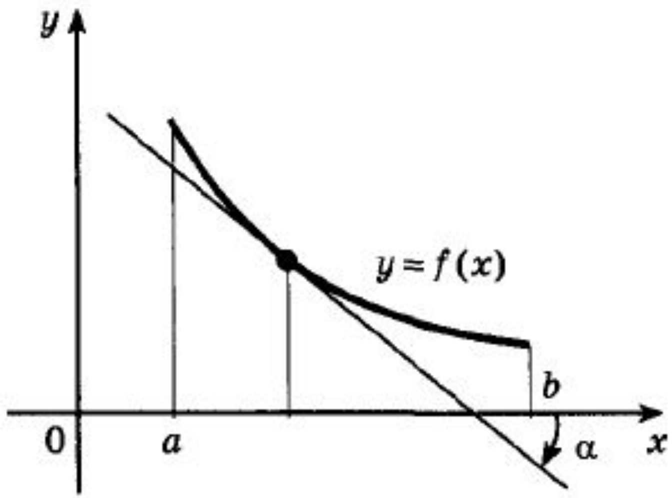


Рис. 121

Итак, если $f'(x) > 0$ на промежутке, то функция *возрастает* на этом промежутке.
Если $f'(x) < 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ *убывает* на этом промежутке.

Эти определения у вас уже есть!

Определение. Точка x_0 называется *точкой минимума функции* f, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$ (рис. 42).

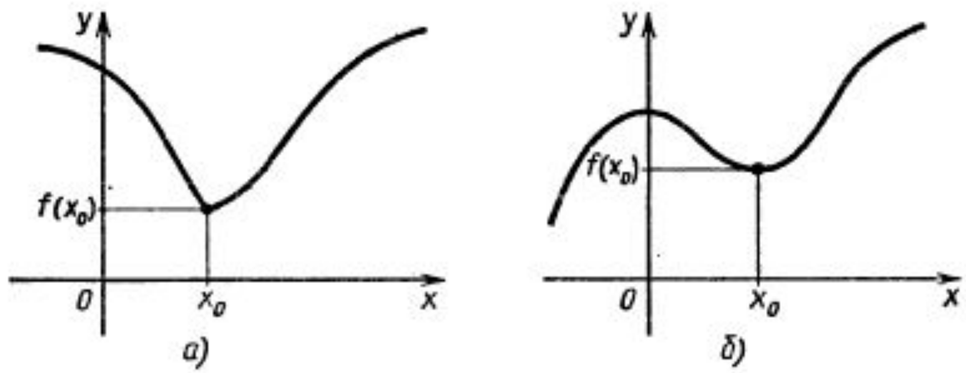


Рис. 42

В окрестности точки минимума графики, как правило, изображаются в виде «впадины», тоже или гладкой (рис. 42, *б* — точка x_0, рис. 44 — точки x_4, x_5), или заостренной (рис. 42, *а* — точка x_0 и рис. 44— точка x_6).

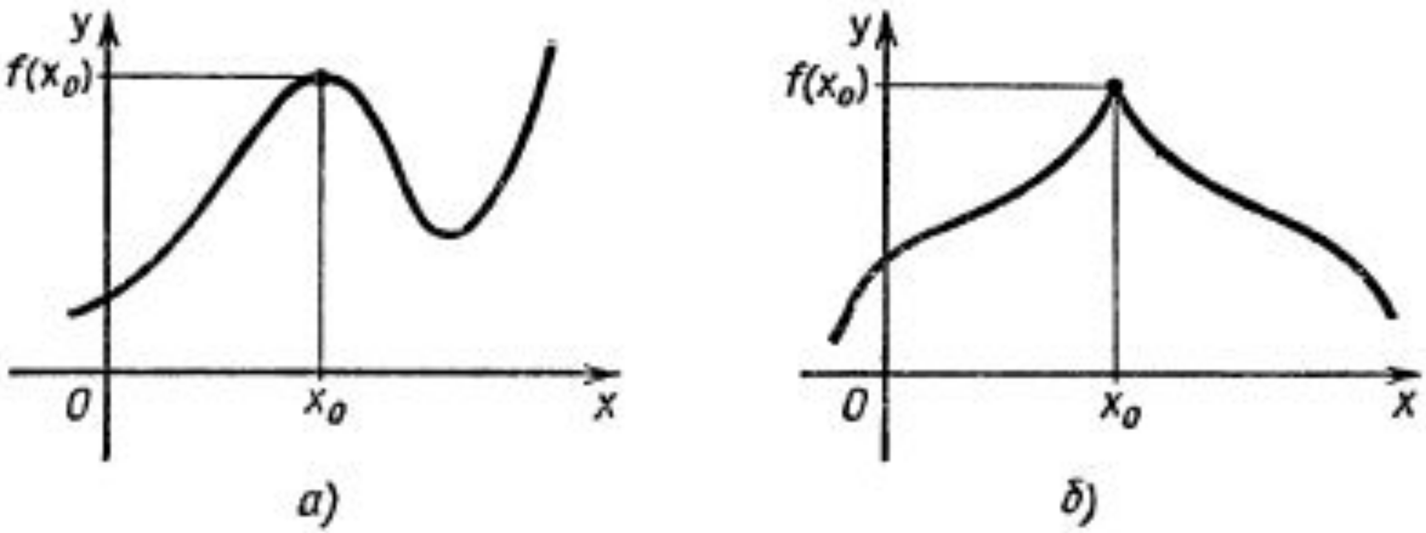


Рис. 43

Определение. **Точка x_0 называется *точкой максимума* функции f, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$** (рис. 43).

По определению значение функции f в точке максимума x_0 является наибольшим среди значений функции из некоторой окрестности этой точки, поэтому график функции в окрестности x_0, как правило, имеет вид гладкого «холма» (рис. 43, *а* и рис. 44 — точки x_1, x_2, x_3) или заостренного «пика» (рис. 43, *б*).

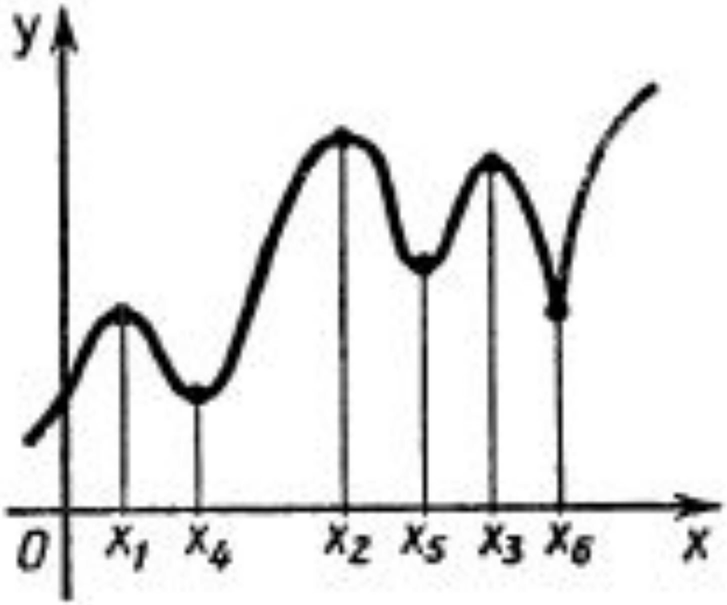


Рис. 44

Для точек максимума и минимума функции принято общее название — их называют *точками экстремума.* Значения функции в этих точках называют соответственно *максимумами* и *минимумами* функции (общее название — *экстремум функции*). Точки максимума обозначают $x_{\max}$, а точки минимума $x_{\min}$. Значения функции в этих точках обозначаются соответственно $y_{\max}$ и $y_{\min}$.

Внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками* этой функции. Эти точки играют важную роль при построении графика функции, поскольку только они могут быть точками экстремума функции

288. Найдите критические точки функции:

а) $f(x) = 4 - 2x + 7x^2$;
б) $f(x) = 1 + \cos 2x$;
в) $f(x) = x - 2\sin x$;
г) $f(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$.

900 **Найти интервалы возрастания и убывания функции:**

1) $y = x^2 - x$;
2) $y = 5x^2 - 3x - 1$;
3) $y = x^2 - 2x$;
4) $y = x^2 + 12x - 100$;
5) $y = x^3 - 3x$;
6) $y = x^4 - 2x^2$;
7) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$;
8) $y = x^3 - 6x^2 + 9$.

2) $y=5x^2-3x-1$

Функция определена на множестве R.

$$y' = 10x - 3$$

Производная определена на множестве R.

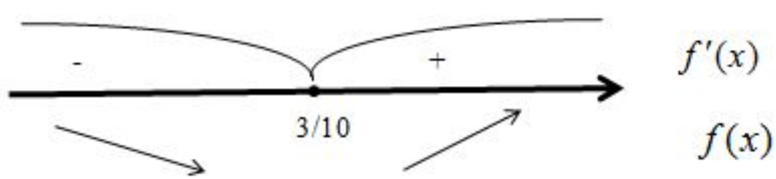
Найдем критические точки (т.е. точки, в которых производная равна 0)

10x-3=0

10x=3

x=3/10

На числовой прямой отметим критическую точку (она делит область определения на два интервала) и найдем **знак производной** в интервалах.



$$f(x)\uparrow \text{при}(x)\in\left[\frac{3}{10};+\infty\right)$$

$$f(x)\downarrow \text{при}(x)\in\left(-\infty;\frac{3}{10}\right]$$

900 Найти интервалы возрастания и убывания функции:

1) $y = x^2 - x$;
2) $y = 5x^2 - 3x - 1$;
3) $y = x^2 - 2x$;
4) $y = x^2 + 12x - 100$;
5) $y = x^3 - 3x$;
6) $y = x^4 - 2x^2$;
7) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$;
8) $y = x^3 - 6x^2 + 9$.

Признак минимума функции. ***Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x)<0$ на интервале $(a;\ x_0)$ и $f'(x)>0$ на интервале $(x_0;\ b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции f.***

Удобно пользоваться упрощенной формулировкой этого признака: *если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума.*

Признак максимума функции. ***Если функция f непрерывна в точке x_0, а $f'(x)>0$ на интервале $(a;\ x_0)$ и $f'(x)<0$ на интервале $(x_0;\ b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f.***

Удобно пользоваться упрощенной формулировкой этого признака: *если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума.*

Точками экстремума могут служить только *критические точки*, т. е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Если при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум: минимум в том случае, когда производная меняет знак с минуса на плюс, и максимум — когда с плюса на минус. Если же при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ не меняет знака, то функция $f(x)$ в точке x_0 не имеет экстремума.

Правило нахождения экстремумов функции $y=f(x)$ с помощью первой производной

I. Найти производную $f'(x)$.

II. Найти критические точки функции $y=f(x)$, т. е. точки, в которых $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

III. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определеиия функции $f(x)$. При этом критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x)<0$, от промежутка, в котором $f'(x)>0$, и точка максимума — в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

IV. Вычислить значения функции в точках экстремума.

Например:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1;$$

Функция определена на множестве R.

$$y' = 3x^2 - 6x$$

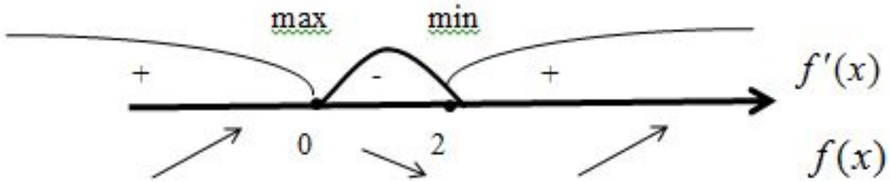
Производная определена на множестве R.
Найдем критические точки (т.е. точки, в которых производная равна 0)

$3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

$x = 0$ или $x = 2$

На числовой прямой отметим критические точки (они делят область определения на три интервала) и найдем **знак производной** в интервалах.



Чтобы найти экстремумы, надо значения точек экстремума подставить **в функцию.**

$$x_{\max} = 0, y_{\max} = 1$$

$$x_{\min} = 2, y_{\min} = -3$$

Исследовать функцию на монотонность и экстремумы:

281. а) $f(x) = 12x + 3x^2 - 2x^3$; б) $f(x) = 4 - x^4$;

в) $f(x) = x(x^2 - 12)$; г) $f(x) = \frac{3}{x^2}$.

283. а) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$; б) $f(x) = 4x^3 - 1{,}5x^4$;

в) $f(x) = 2 + 9x + 3x^2 - x^3$; г) $f(x) = x^4 - 2x^2$.