

Тема: Признаки  
монотонности функции.  
Экстремум функции.  
Исследование функции на  
монотонность и экстремум.

Эти определения у вас уже есть!

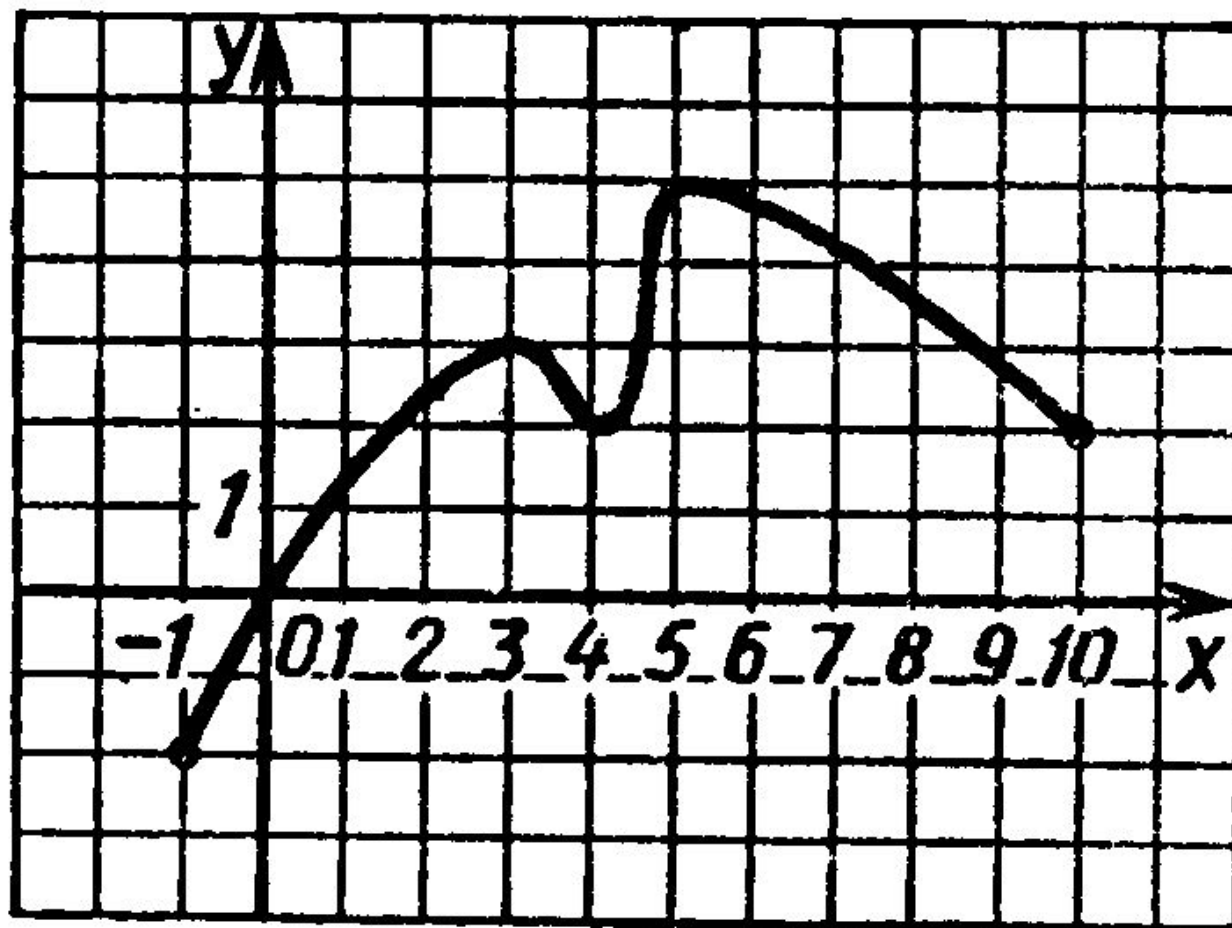
**О п р е д е л е н и е.** Функция  $f$  *возрастает* на множестве  $P$ , если для любых  $x_1$  и  $x_2$  из множества  $P$ , таких, что  $x_2 > x_1$ , выполнено неравенство  $f(x_2) > f(x_1)$ .

**О п р е д е л е н и е.** Функция  $f$  *убывает* на множестве  $P$ , если для любых  $x_1$  и  $x_2$  из множества  $P$ , таких, что  $x_2 > x_1$ , выполнено неравенство  $f(x_2) < f(x_1)$ .

Иными словами, функция  $f$  называется *возрастающей* на множестве  $P$ , если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции. Функция  $f$  называется *убывающей* на множестве  $P$ , если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

$f(x) \nearrow$  при  $x \in$

$f(x) \searrow$  при  $x \in$



Рассмотрим применение производной к нахождению промежутков возрастания и убывания функций.

Пусть значения производной функции  $y = f(x)$  положительны на некотором промежутке, т. е.

$f'(x) > 0$ . Тогда угловой коэффициент касательной  $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$  к графику этой функции в каждой точке данного промежутка положителен. Это означает, что касательная к графику функции направлена вверх, и поэтому график функции на этом промежутке «поднимается», т. е. функция  $f(x)$  возрастает (рис. 120).

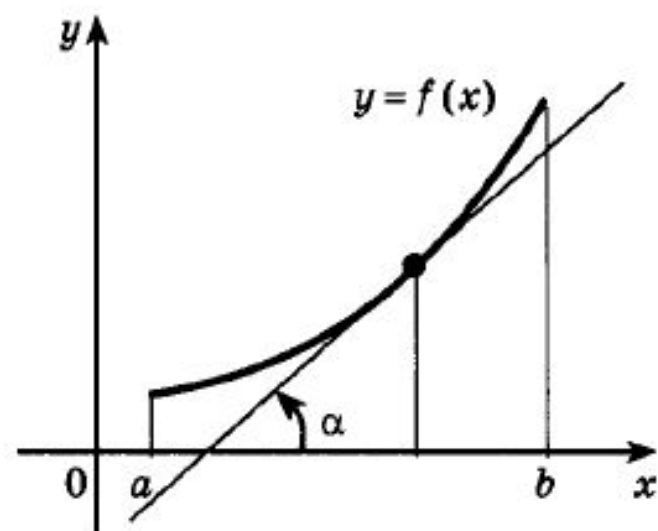


Рис. 120

Если  $f'(x) < 0$  на некотором промежутке, то угловой коэффициент касательной  $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$  к графику

функции  $y = f(x)$  отрицателен. Это означает, что касательная к графику функции направлена вниз, и поэтому график функции на этом промежутке «опускается», т. е. функция  $f(x)$  убывает (рис. 121).

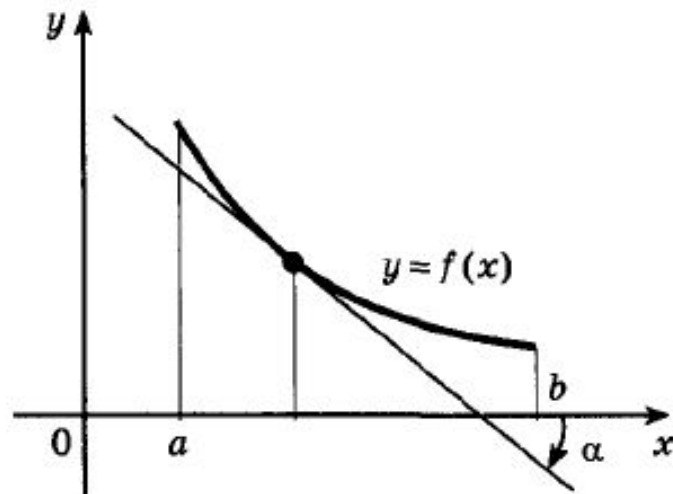


Рис. 121

**Итак, если  $f'(x) > 0$  на промежутке, то функция возрастает на этом промежутке.**

**Если  $f'(x) < 0$  на промежутке, то функция  $f(x)$  убывает на этом промежутке.**

# Эти определения у вас уже есть!

**Определение.** Точка  $x_0$  называется *точкой минимума* функции  $f$ , если для всех  $x$  из некоторой окрестности  $x_0$  выполнено неравенство  $f(x) \geq f(x_0)$  (рис. 42).

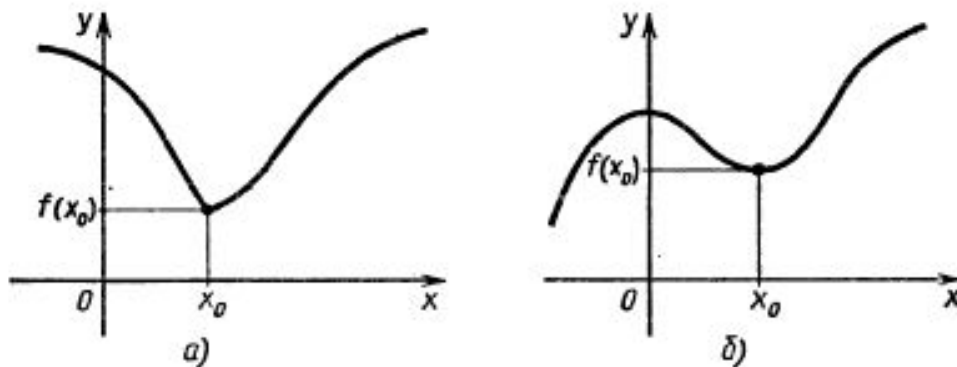
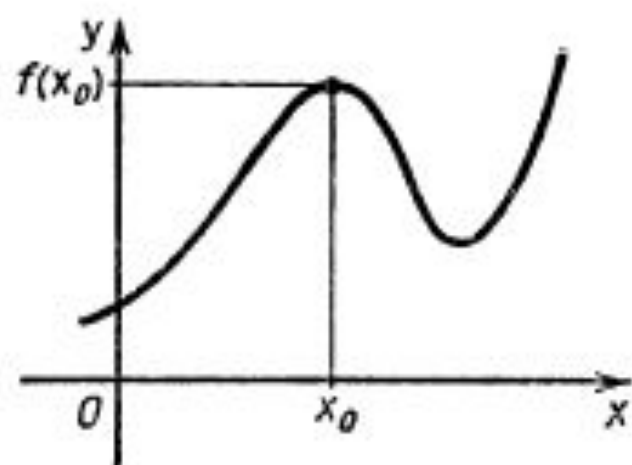
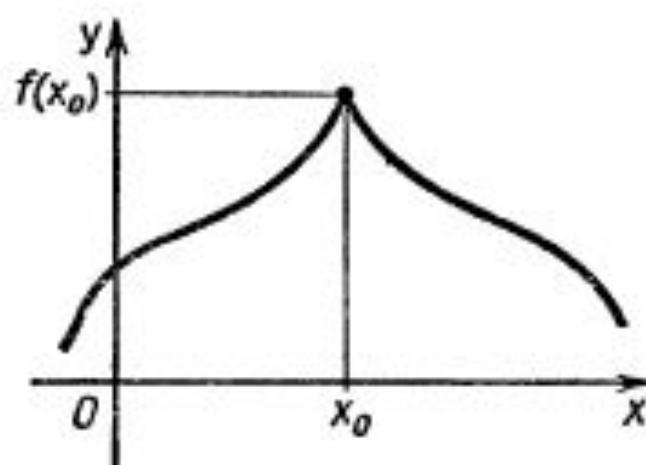


Рис. 42

В окрестности точки минимума графики, как правило, изображаются в виде «впадины», тоже или гладкой (рис. 42, б — точка  $x_0$ , рис. 44 — точки  $x_4, x_5$ ), или заостренной (рис. 42, а — точка  $x_0$  и рис. 44 — точка  $x_6$ ).



а)



б)

Рис. 43

**О п р е д е л е н и е.** Точка  $x_0$  называется *точкой максимума* функции  $f$ , если для всех  $x$  из некоторой окрестности  $x_0$  выполнено неравенство  $f(x) \leq f(x_0)$  (рис. 43).

По определению значение функции  $f$  в точке максимума  $x_0$  является наибольшим среди значений функции из некоторой окрестности этой точки, поэтому график функции в окрестности  $x_0$ , как правило, имеет вид гладкого «холма» (рис. 43, а и рис. 44 — точки  $x_1, x_2, x_3$ ) или заостренного «пика» (рис. 43, б).

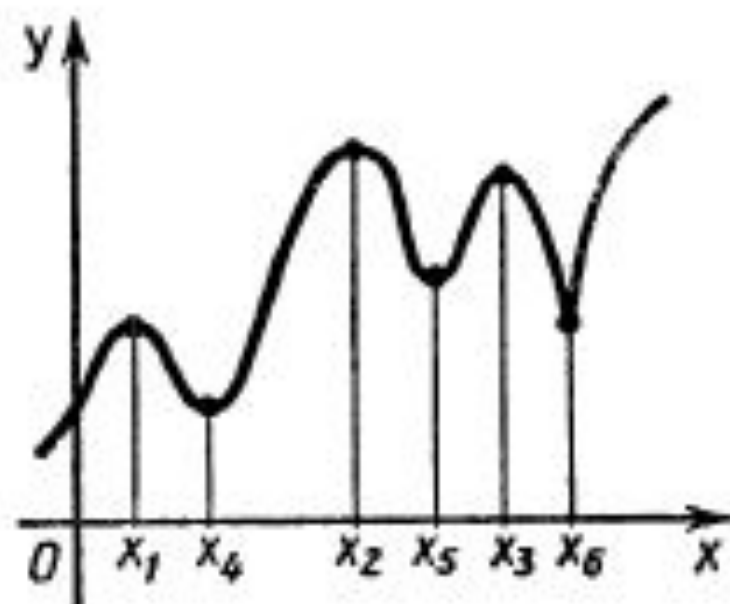


Рис. 44

Для точек максимума и минимума функции принято общее название — их называют *точками экстремума*. Значения функции в этих точках называют соответственно *максимумами* и *минимумами* функции (общее название — *экстремум функции*). Точки максимума обозначают  $x_{\max}$ , а точки минимума  $x_{\min}$ . Значения функции в этих точках обозначаются соответственно  $y_{\max}$  и  $y_{\min}$ .



Внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками* этой функции. Эти точки играют важную роль при построении графика функции, поскольку только они могут быть точками экстремума функции

288. Найдите критические точки функции:

а)  $f(x) = 4 - 2x + 7x^2$ ;

б)  $f(x) = 1 + \cos 2x$ ;

в)  $f(x) = x - 2 \sin x$ ;

г)  $f(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$ .

**900.** Найти интервалы возрастания и убывания функции:

1)  $y = x^2 - x;$

2)  $y = 5x^2 - 3x - 1;$

3)  $y = x^2 - 2x;$

4)  $y = x^2 + 12x - 100;$

5)  $y = x^3 - 3x;$

6)  $y = x^4 - 2x^2;$

7)  $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40;$

8)  $y = x^3 - 6x^2 + 9.$

2)  $y = 5x^2 - 3x - 1$

Функция определена на множестве  $\mathbb{R}$ .

$$y' = 10x - 3$$

Производная определена на множестве  $\mathbb{R}$ .

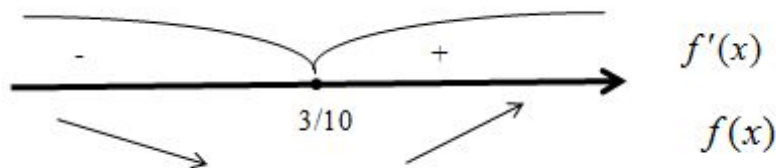
Найдем критические точки (т.е. точки, в которых производная равна 0)

$$10x - 3 = 0$$

$$10x = 3$$

$$x = 3/10$$

На числовой прямой отметим критическую точку (она делит область определения на два интервала) и найдем **знак производной** в интервалах.



$$f(x) \uparrow \text{ при } x \in \left[ \frac{3}{10}; +\infty \right)$$

$$f(x) \downarrow \text{ при } x \in \left( -\infty; \frac{3}{10} \right]$$

**900.** Найти интервалы возрастания и убывания функции:

1)  $y = x^2 - x$ ;

2)  $y = 5x^2 - 3x - 1$ ;

3)  $y = x^2 - 2x$ ;

4)  $y = x^2 + 12x - 100$ ;

5)  $y = x^3 - 3x$ ;

6)  $y = x^4 - 2x^2$ ;

7)  $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$ ;

8)  $y = x^3 - 6x^2 + 9$ .

**Признак минимума функции.** Если функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ ,  $f'(x) < 0$  на интервале  $(a; x_0)$  и  $f'(x) > 0$  на интервале  $(x_0; b)$ , то точка  $x_0$  является точкой минимума функции  $f$ .

Удобно пользоваться упрощенной формулировкой этого признака: если в точке  $x_0$  производная меняет знак с минуса на плюс, то  $x_0$  есть точка минимума.

**Признак максимума функции.** Если функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , а  $f'(x) > 0$  на интервале  $(a; x_0)$  и  $f'(x) < 0$  на интервале  $(x_0; b)$ , то точка  $x_0$  является точкой максимума функции  $f$ .

Удобно пользоваться упрощенной формулировкой этого признака: если в точке  $x_0$  производная меняет знак с плюса на минус, то  $x_0$  есть точка максимума.

Точками экстремума могут служить только критические точки, т. е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная  $f'(x)$  обращается в нуль или терпит разрыв.

Если при переходе через критическую точку  $x_0$  производная  $f'(x)$  меняет знак, то функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  экстремум: минимум в том случае, когда производная меняет знак с минуса на плюс, и максимум — когда с плюса на минус. Если же при переходе через критическую точку  $x_0$  производная  $f'(x)$  не меняет знака, то функция  $f(x)$  в точке  $x_0$  не имеет экстремума.

### Правило нахождения экстремумов функции $y=f(x)$ с помощью первой производной

I. Найти производную  $f'(x)$ .

II. Найти критические точки функции  $y=f(x)$ , т. е. точки, в которых  $f'(x)$  обращается в нуль или терпит разрыв.

III. Исследовать знак производной  $f'(x)$  в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции  $f(x)$ . При

этом критическая точка  $x_0$  есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором  $f'(x) < 0$ , от промежутка, в котором  $f'(x) > 0$ , и точка максимума — в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой  $x_0$ , знак производной не меняется, то в точке  $x_0$  функция экстремума не имеет.

IV. Вычислить значения функции в точках экстремума.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1;$$

Например:

Функция определена на множестве  $\mathbb{R}$ .

$$y' = 3x^2 - 6x$$

Производная определена на множестве  $\mathbb{R}$ .

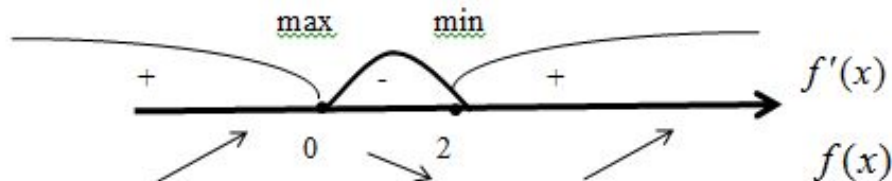
Найдем критические точки (т.е. точки, в которых производная равна 0)

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x = 2$$

На числовой прямой отметим критические точки (они делят область определения на три интервала) и найдем **знак производной** в интервалах.



Чтобы найти экстремумы, надо значения точек экстремума подставить **в функцию**.

$$x_{\max} = 0, y_{\max} = 1$$

$$x_{\min} = 2, y_{\min} = -3$$

Исследовать функцию на монотонность и экстремумы:

281. а)  $f(x) = 12x + 3x^2 - 2x^3$ ;      б)  $f(x) = 4 - x^4$ ;

в)  $f(x) = x(x^2 - 12)$ ;      г)  $f(x) = \frac{3}{x^2}$ .

283. а)  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ ;      б)  $f(x) = 4x^3 - 1,5x^4$ ;

в)  $f(x) = 2 + 9x + 3x^2 - x^3$ ;      г)  $f(x) = x^4 - 2x^2$ .