Делимость, как инвариант

Алгебра 7 класс

Математическая вертикаль

Учитель математики ГБОУ Школа №2127 г. Москвы

Матвеева Наталия Валерьевна

Инвариант — это то, что остается неизменным.

Часто инвариантом может быть четность, остаток от деления, просто сумма, то есть не число, а свойство.

Напомним основное определение.

Определение 1. Целое число a *делится* на натуральное число b, если первое из них можно разделить на второе нацело, без остатка. Иначе говоря, a предметов можно разложить на несколько одинаковых кучек по b предметов в каждой.

То же самое определение на более формальном языке звучит так.

Определение 2. Целое число a *делится* на натуральное число b, если найдётся такое целое число k, что $a = k \cdot b$.

Теорема. *Свойство 1.* Если целые числа a и b делятся на натуральное число m, то их сумма и разность также делятся на m.
Свойство 2. Если хотя бы одно из целых чисел a и b делится на натуральное число m, то их произведение также делятся на m.
Свойство 3. Если одно из целых чисел a и b делится на натуральное число m, а второе делится на натуральное число k, то их произведение $a \cdot b$ делится на $\ell = m \cdot k$.

Замечание 1. *Свойство 1* верно для любого числа слагаемых, а *свойство 2*— для любого числа сомножителей.

Теорема. *Свойство* $1'$. Если на некоторое число m делятся все слагаемые, кроме одного, то сумма на число m не делится.

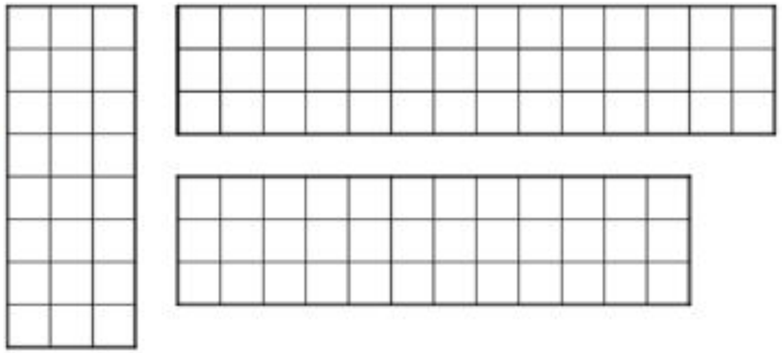
Пример 1. Устно выясните, делится ли **а)** 273 на 13? **б)** 349 на 7? **в)** 34010251 на 17?

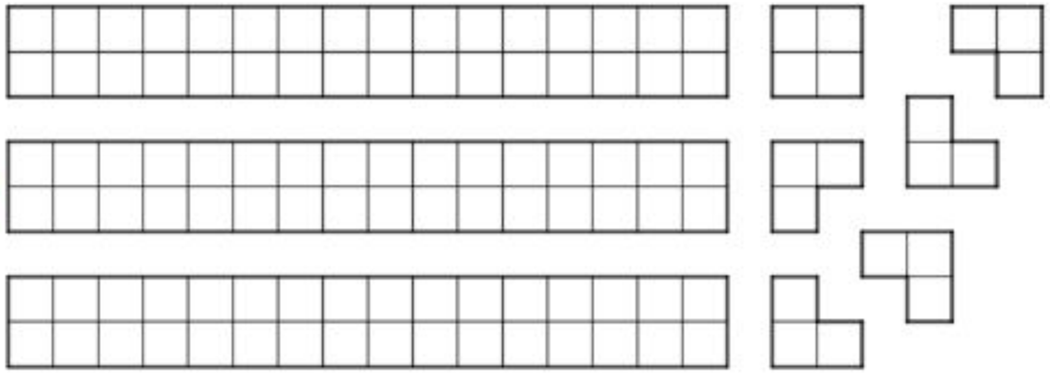
Решение. **а)** Какое число рядом с 273 делится на 13? 260! Ведь $260 = 13 \cdot 20$. А 273 ровно на 13 больше, чем 260, значит, 273 тоже делится на 13!

б) Какое число рядом с 349 делится на 7? 350! Ведь $350 = 7 \cdot 50$. Разность между 350 и 349 равна 1, что на 7 не делится, значит оба они делиться на 7 не могут. Это противоречило бы свойству 1. Раз 350 делится, то 349 — не делится.

в) Заметим, что $34010251 = 34000000 + 10200 + 51$. Сразу ясно, что $34 = 17 \cdot 2$, $51 = 17 \cdot 3$ — делятся на 17. Проверим ещё 102, но стоп! Ведь $102 = 51 \cdot 2$, значит, тоже делится на 17. По свойству 2 и $34000000 = 34 \cdot 1000000$, и $10200 = 102 \cdot 100$ делятся на 17. Итак, на 17 делятся все три слагаемых, значит, делится и сумма (по свойству 1).

Задача 1. На картинке схематично изображены шоколадки. Их разрешается ломать, но только так, чтобы не повредить дольки (изображённые в виде клеток). В каждом пункте выясните, удастся ли поровну разделить все эти шоколадки между тремя людьми?

а) 

б) 

Задача 3. Выясните, делится ли (не забудьте обосновать свой ответ):

а) $28 \cdot 17$ на 2?
б) $28 \cdot 17$ на 7?
в) $24 \cdot 23 \cdot 15$ на 3?
г) $24 \cdot 23 \cdot 15$ на 9?
д) $26 \cdot 18$ на 2?
е) $26 \cdot 18$ на 4?
ж) $89 \cdot 90 \cdot 91$ на 7?
з) $136 \cdot 27$ на 6?
и) $56 \cdot 72$ на 9?
к) $56 \cdot 72$ на 63?
л) $56 \cdot 72$ на 64?
м) $51 \cdot 52 \cdot 53$ на 3?
н) $177 \cdot 178 \cdot 179$ на 3?
о) $177 \cdot 178 \cdot 179$ на 6?
п) $47 \cdot 48 \cdot 49$ на 3?
р) $47 \cdot 48 \cdot 49$ на 42?

Задача 4. Друзья купили 51 набор новогодних шариков, в каждом по 12 шариков. Часть шариков они оставили дома, а остальные взяли с собой в лес и украсили ими ёлки. Друзья заметили, что на каждой ёлке число шариков делится на 34. Докажите, что когда они дома украсят ёлку оставшимися шариками, то их число тоже будет делиться на 34.

Задача 5. Не вычисляя сумму, назовите хотя бы один её делитель, не равный единице:

а) $48562 + 1824$;

б) $14 + 14 + 14 + 14 + 7 + 7 + 7$;

в) $630 + 2020 + 1520 + 1576$;

г) $3 + 33 + 333 + 3333 + 33333$;

д) $21 + 63 + 140 + 770 + 4900 + 350$;

е) $45 + 900 + 855 + 195 + 36 + 750$;

ж) $26 + 260 + 39 + 390 + 52 + 520 + 65 + 650$;

з) $303 + 606 + 909 + 2121 + 4747$.

Задача 6. Верно ли, что если целые числа a и b оба не делятся на целое число m, то их сумма также не делится на m?

Задача 7. Известно, что $(a-b)$ делится на m. Верно ли, что

а) если a делится на m, то b делится на m?

б) если b делится на m, то a делится на m?

в) если a не делится на m, то b не делится на m?

г) если b не делится на m, то a не делится на m?

Задача 8. Выясните, делится ли (не забудьте обосновать свой ответ):

а) $56 \cdot 39 - 26 \cdot 41 + 91$ на 13;

б) $56 \cdot 39 - 26 \cdot 41 + 101$ на 13;

в) $25 \cdot 27 - 36 \cdot 40 - 90$ на 15;

г) $25 \cdot 27 - 36 \cdot 41 + 12345$ на 15;

д) $\dfrac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18}{12}$ на 80;

е) $(377 + 555)(660 - 99 + 550)$ на 11;

ж) $(377 + 555)(660 - 99 + 222) + 659$ на 11;

з) $32 \cdot (693 + 381) - 112$ на 12;

и) $42 \cdot (573 - 199) - 312$ на 12;

к) $\dfrac{(566 - 138)(999 + 9999)}{12}$ на 3.

Задача 9. Делится ли:

а) 12312312312312 на 123?

б) 700 000 000 000 000 на 40 000 000 000 000?

в) 41000000410000082092 на 41?

г) 821231231646422 3 на 41?

Задача 10. **а)** На каждое ли из чисел $2, 6, 12, 16, 36$ делится их сумма $2 + 6 + 12 + 16 + 36$?

б) Найдите три различных натуральных числа, сумма которых делится на *каждое* из них.

в*) Придумайте четыре различных натуральных числа, сумма которых делится на *каждое* из них.

г*) Известно, что сумма чисел a, b, c, d, e делится на каждое из них. Какое число можно к ним добавить, чтобы получить шесть чисел, сумма которых делится на каждое из них?

д*) Придумайте 7 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.

Задача 11. **а)** Выберите из чисел $123, 124, 125, 126, 127, 128$ пять и раздайте их пятерым ребятам так, чтобы Але досталось число, делящееся на 2, Белле — делящееся на 3, Вале — делящееся на 4, Глебу — делящееся на 5, а Лене — делящееся на 6.
б) Верно ли, что какие бы 4 подряд идущих натуральных числа нам ни дали, мы сможем выдать троим ребятам три из них так, чтобы Антону досталось число, делящееся на 2, Богдану — делящееся на 3, а Вениамину — делящееся на 4?
в) Верно ли, что если взять любые семь подряд идущих натуральных чисел, то хотя бы одно из них будет делиться на 2, хотя бы одно на 3, хотя бы одно на 4, хотя бы одно на 5, хотя бы одно на 6 и хотя бы одно на 7?

г) Даны семь чисел:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 1;$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 2;$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 3;$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 4;$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 5;$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 6;$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 7.$$

Раздайте их семерым ребятам так, чтобы Арише досталось число, делящееся на 2, Боре — делящееся на 3, Валере — делящееся на 4, Грише — делящееся на 5, Даше — делящееся на 6, Егору — делящееся на 7, а Марине — число, которое не делится ни на одно из чисел от 2 до 7.

д*) Верно ли, что какие бы семь подряд идущих натуральных чисел нам ни дали, мы сможем раздать шесть из них семерым ребятам так, чтобы Арише досталось число, делящееся на 2, Боре — делящееся на 3, Валере — делящееся на 4, Грише — делящееся на 5, Даше — делящееся на 6, Егору — делящееся на 7?
е*) Докажите, что в натуральном ряду существуют 2020 подряд идущих составных чисел.

Задача 12*. Заметим, что:

- числа 2 и 3 делятся на последовательные нечётные числа 1 и 3 соответственно;
- числа 8, 9 и 10 — делятся на 1, 3 и 5 соответственно.

Найдутся ли аналогичные: **а)** 4; **б)** 5; **в)** 11 последовательных натуральных чисел? («Аналогичные» — значит, обладающие аналогичным свойством. Например, в пункте (в): найдётся ли 11 последовательных натуральных чисел, которые делятся на 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 и 21 соответственно.)

[*Московская устная олимпиада для 7 класса, 2011 год, №9*]