

# Вершины политопа числа разбиений

# Введение

Всякое представление положительного целого числа  $n$  в виде суммы положительных целых чисел без учета их порядка называется разбиением числа:

$$n = i_1 + i_2 + \dots + i_k, \quad 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n$$

В данной работе используется полиэдральный подход к разбиениям чисел. Он заключается в том, что каждому разбиению числа  $n$  будет ставиться в соответствие вектор из  $\mathbb{R}^n$ , где  $i$ -ая координата вектора, говорит сколько раз часть размера  $i$  входит в разбиение. Например, разбиению  $7 = 1 + 2 + 1 + 3$  соответствует вектор  $x = (2, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ . Вектор  $x$  можем называть разбиением. Рассматривая все разбиения как вектора, можно получить политоп разбиений, путем выпуклой оболочки всех векторов разбиений.

Исследование некоторых свойств этого политопа проведено в данной работе.

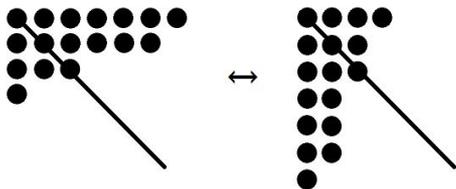
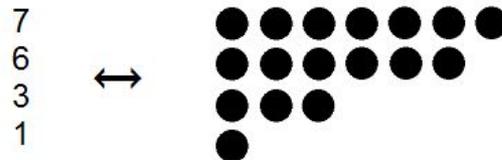
# Цели работы

1. Исследовать способ нахождения сопряженных разбиений
2. Сформулировать и доказать теорему о лифтинге вершин
3. Доказать теорему Шлыка для опорных вершин, сформулировать и доказать теорему о лифтинге опорных вершин.

# Основные теоретические понятия для нахождения сопряженных разбиений

*Граф Феррера.* Графическое представление разбиения.

Любой граф Феррера является разбиением и наоборот.



*Сопряженное разбиение.* Проведя главную диагональ в графе Феррера, проведем его транспонирование (операция сопряжения). Полученное разбиение называется сопряженным.

*Оператор Вонга.* Матрица следующего вида размеров  $n \times n$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Нахождение сопряженных разбиений

Введем операцию *пересмотра* : вектор  $x = (2, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$  будем рассматривать как следующее разбиение  $2+1+1+0+0+0+0=4$ .

**Теорема.** Оператор Вонга с последующей ему операцией пересмотра переводит разбиение числа в сопряженное ему разбиение, то есть последовательное их применение является операцией сопряжения.

# Критерий вершины и опорные вершины

**Критерий вершины.** Точка  $n \in \mathbb{R}^n$  принадлежащая некоторому политопу  $P \subset \mathbb{R}^n$ , является его вершиной тогда и только тогда, когда ее нельзя представить в виде выпуклой комбинации  $x = \sum_{j=1}^k \lambda_j y_j$ ,  $\lambda_j > 0$ , некоторых других точек  $y_j \in P$ ,  $1 \leq j \leq k$ . Это относится и к политопу разбиений  $P_n$ .

Для введения опорных вершин, понадобятся операции укрупнения частей.

Операция 1. Берем части размеров  $u, v$ . Пусть число частей  $u = a$  меньше числа частей  $v = b$ . Соединяем  $a$  частей размера  $u$  с  $a$  частями размера  $v$ , получая  $a$  частей  $u+v$ .

Операция 2. Соединяем все части одного размера в новую часть, число соединяемых частей больше 1.

Строгое определение операций укрупнения частей представлено в работе.

**Определение.** *Опорной вершиной* называется такая вершина политопа  $P_n$ , если ее нельзя получить в результате применения операций укрупнения частей к какой-либо другой вершине этого политопа.

# Лифтинг вершин

**Теорема Шлыка.** Пусть  $x \vdash n$  и  $x \in \text{vert } P_n$ . Если из разбиения  $x$  удалить часть размера  $i \in S(x)$ , то есть сделать из вектора  $x = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ , где  $x_i = 1$ , вектор  $y = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ , то вектор  $y$  будет вершиной политопа  $P_{n-i}$ .

**Теорема (о лифтинге вершин).** Пусть  $x \vdash n$  и  $x \in \text{vert } P_n$ , тогда если к разбиению  $x$  добавить :

- 1) часть размера  $i$ , где  $i \neq n$ ,  $i > n$ , то полученное разбиение  $y = (x_1, \dots, x_n, \dots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \dots, x_{n+i})$  будет являться вершиной политопа разбиений числа  $n+i$ ,  $x_j = 0$ ,  $j > n$
- 2) часть размера  $i \in S(x)$ , где  $n/2 < i < n$ , то полученное разбиение  $y = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \dots, x_n, \dots, x_{n+i})$  будет являться вершиной политопа разбиений числа  $n+i$ ,  $x_j = 0$ ,  $j > n$

На основе теоремы о лифтинге были получены следующие результаты для нижней границы количества вершин, которые можно вычислить с помощью этой теоремы.

$n$  - число, чей политоп рассматривается ;  $h$  -  $\lceil n/2 \rceil$  с округлением вверх ;

$v(n)$  - число вершин политопа разбиений  $n$  ;

$t$  - нижняя граница для количества вершин, которые можно вычислить с помощью теоремы о лифтинге вершин

$n$	$h$	$v(n)$	$t$	$(t / v(n)) * 100\%$
7	4	11	8	72.7%
25	13	258	138	53.5%
50	25	2 488	1 374	55.2%
75	38	18 454	8 009	43.4%
100	50	59 294	28 544	48.1%

# Теорема Шлыка для опорных вершин и лифтинг опорных вершин

**Теорема Шлыка (для опорных вершин).** Пусть  $x \vdash n$  и  $x \in \text{sup.vert } P_n$ . Если из разбиения  $x$  удалить часть размера  $i \in S(x)$ , где  $n/2 < i$ , то есть сделать из вектора  $x = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ , где  $x_i = 1$ , вектор  $y = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . Тогда вектор  $y$  будет опорной вершиной политопа  $P_{n-i}$ .

**Теорема (о лифтинге опорных вершин).** Пусть  $x \vdash n$  и  $x \in \text{sup.vert } P_n$ . Если к разбиению  $x$  добавить часть размера  $i \in S(x)$ , где  $n/2 < i$ , то есть сделать из вектора  $x = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ , где  $x_i = 1$ , вектор  $y = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . Тогда вектор  $y$  будет опорной вершиной политопа  $P_{n+i}$ .

Спасибо за внимание!