Вершины политопа числа разбиений

Введение

Всякое представление положительного целого числа n в виде суммы положительных целых чисел без учета их порядка называется разбиением числа:

$$n = i_1 + i_2 + \dots + i_k,\ 1 \le i_1, i_2, \dots i_k \le n$$

В данной работе используется полиэдральный подход к разбиениям чисел. Он заключается в том, что каждому разбиению числа n будет ставиться в соответствие вектор из $\mathbb{R}^n$, где i-ая координата вектора, говорит сколько раз часть размера i входит в разбиение. Например, разбиению 7 = 1 + 2 + 1 + 3 соответствует вектор x = (2,1,1,0,0,0,0). Вектор x можем называть разбиением. Рассматривая все разбиения как вектора, можно получить политоп разбиений, путем выпуклой оболочки всех векторов разбиений.

Исследование некоторых свойств этого политопа проведено в данной работе.

Цели работы

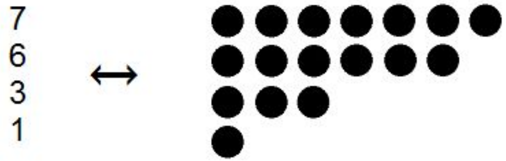
1. Исследовать способ нахождения сопряженных разбиений

2. Сформулировать и доказать теорему о лифтинге вершин

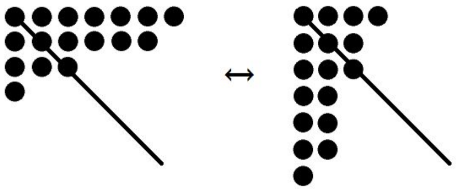
3. Доказать теорему Шлыка для опорных вершин, сформулировать и доказать теорему о лифтинге опорных вершин.

Основные теоретические понятия для нахождения сопряженных разбиений

Граф Феррера. Графическое представление разбиения.
Любой граф Феррера является разбиением
и наоборот.



Сопряженное разбиение. Проведя главную диагональ в графе Феррера, проведем его транспонирование (операция сопряжения). Полученное разбиение называется сопряженным.



Оператор Вонга. Матрица следующего вида размеров *n x n :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нахождение сопряженных разбиений

Введем операцию *пересмотра* : вектор $x = (2,1,1,0,0,0,0)$ будем рассматривать как следующее разбиение $2+1+1+0+0+0+0=4$.

Теорема. Оператор Вонга с последующей ему операцией пересмотра переводит разбиение числа в сопряженное ему разбиение, то есть последовательное их применение является операцией сопряжения.

Критерий вершины и опорные вершины

Критерий вершины. Точка $n \in \mathbb{R}^n$ принадлежащая некоторому политопу $P \subset \mathbb{R}^n$, является его вершиной тогда и только тогда, когда ее нельзя представить в виде выпуклой комбинации $x = j\ \lambda_{j\ y\ j,j\ \lambda j} = 1,\ \lambda_j > 0$, некоторых других точек y j $\in P,\ \ 1 \leq j \leq k$. Это относится и к политопу разбиений Pn .

Для введения опорных вершин, понадобятся операции укрупнения частей.

Операция 1. Берем части размеров *u,v.* Пусть число частей $u = a$ меньше числа частей $v = b$. Соединяем a частей размера u с a частями размера v, получая a частей $u+v$.

Операция 2. Соединяем все части одного размера в новую часть, число соединяемых частей больше 1.

Строгое определение операций укрупнения частей представлено в работе.

Определение. *Опорной вершиной* называется такая вершина политопа Pn , если ее нельзя получить в результате применения операций укрупнения частей к какой-либо другой вершине этого политопа.

Лифтинг вершин

Теорема Шлыка. Пусть $x \vdash n$ и $x \in vert\ P_n$. Если из разбиения x удалить часть размера $i \in S(x)$, то есть сделать из вектора $x=(x_1,\ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1},\ldots, x_n)$,где $x_i=1$,вектор $y=(x_1,\ldots, x_{i-1}, x_i -1, x_{i+1},\ldots, x_n)$, то вектор y будет вершиной политопа P_{n-i}.

Теорема (о лифтинге вершин). Пусть $x \vdash n$ и $x \in vertP_n$, тогда если к разбиению x добавить :

1) часть размера i, где $i \neq n, i > n$, то полученное разбиение $y=(x_1,\ldots,x_n,\ldots,x_{i-1},x_i+1,x_{i+1},\ldots,x_{n+i})$ будет являться вершиной политопа разбиений числа $n+i$, $x_j=0$, $j>n$
2) часть размера $i \in S(x)$, где $n/2 < i < n$, то полученное разбиение $y=(x_1,\ldots x_{i-1},x_i+1,x_{i+1},\ldots,x_n,\ldots,x_{n+i})$ будет являться вершиной политопа разбиений числа $n+i$, $x_j=0$, $j>n$

На основе теоремы о лифтинге были получены следующие результаты для нижней границы количества вершин, которые можно вычислить с помощью этой теоремы.
n - число, чей политоп рассматривается ; *h* - [*n*/2] с округлением вверх ;
v(n) - число вершин политопа разбиений *n* ;
t - нижняя граница для количества вершин, которые можно вычислить с помощью теоремы о лифтинге вершин

n	*h*	*v(n)*	*t*	(*t / v(n)*)* 100%
7	4	11	8	72.7%
25	13	258	138	53.5%
50	25	2 488	1 374	55.2%
75	38	18 454	8 009	43.4%
100	50	59 294	28 544	48.1%

Теорема Шлыка для опорных вершин и лифтинг опорных вершин

Теорема Шлыка (для опорных вершин). Пусть $x \vdash n$ и $x \in sup.vert\ P_n$. Если из разбиения x удалить часть размера $i \in S(x)$, где $n/2<i$, то есть сделать из вектора $x=(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$, где $x_i=1$, вектор $y=(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i-1,x_{i+1},\ldots,x_n)$. Тогда вектор y будет опорной вершиной политопа P_{n-i}.

Теорема (о лифтинге опорных вершин). Пусть $x \vdash n$ и $x \in sup.vert\ P_n$. Если к разбиению x добавить часть размера $i \in S(x)$, где $n/2<i$, то есть сделать из вектора $x=(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$, где $x_i=1$, вектор $y=(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+1,x_{i+1},\ldots,x_n)$. Тогда вектор y будет опорной вершиной политопа P_{n+i}.

Спасибо за внимание!