Лекция 2

- Случайные величины.
- Классификация ошибок измерений.
- Абсолютная и относительная погрешность.
- Прямые и косвенные измерения.
- Оценка погрешностей функций приближенных аргументов.

Случайные величины

Под случайной величиной понимают величину, принимающую в результате испытания значение, которое принципиально нельзя предсказать, исходя из условий опыта.

Случайная величина обладает целым набором допустимых значений, но в результате каждого отдельного опыта принимает лишь какое-то одно из них.

В отличие от неслучайных величин, изменяющих свое значение только при изменении условий опыта, случайная величина может принимать различные значения даже при неизменном комплексе основных факторов.

Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Возможные значения дискретных величин можно заранее перечислить.

Значения непрерывной случайной величины не могут быть заранее перечислены, они заполняют собой некоторый интервал. Набор допустимых значений сам по себе слабо характеризует случайную величину. Чтобы ее полностью охарактеризовать, необходимо не только указать, какие значения она может принимать, но и как часто. Каждый результат измерения — случайная величина. Отклонение результата реального измерения от истинного значения величины называется ошибкой измерения.

Ни одну физическую величину (длину, время, температуру и т.д.) невозможно измерить с полной определенностью. Лучшее, на что можно рассчитывать, — это свести ошибки к возможному минимуму и надежно рассчитать их величины.

Погрешностью измерения называется отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины. Так как истинное значение измеряемой величины неизвестно, то при количественной оценке погрешности пользуются действительным значениям физической величины. Это значение находится экспериментальным путем и настолько близко к истинному значению, что для поставленной измерительной задачи может использоваться вместо него.

Погрешность средств измерения определяется разностью между показаниями средства измерения и истинным (действительным) значением измеряемой физической величины. Она характеризует точность результатов измерений, проводимым используемым средством.

Погрешность результата измерений можно оценивать с разной точностью на основании различной исходной информации. В соответствии с этим различают измерения с точной, приближенной и предварительной оценкой погрешностей.

При измерении с *точной оценкой погрешности* учитывают индивидуальные метрологические свойства и характеристики каждого из применяемых средств измерения, анализируют метод измерений, контролируют условия измерений с целью учета их влияния на результаты измерения.

Если измерения ведутся *с приближенной оценкой погрешности,* то учитывают лишь метрологические характеристики средств измерения и оценивают влияние на их результат только отклонение условий измерений от нормальных.

Измерения *с предварительной оценкой погрешности* выполняются по типовым методикам, регламентированным нормативными документами, в которых указаны методы и условия измерений, типы и погрешности используемых средств измерений и на основе этих данных заранее оценена возможная погрешность результата.

Классификация погрешности измерений

По форме количественного выражения погрешность можно записать в виде абсолютной, относительной и приведенной

Под абсолютной ошибкой (или погрешностью) измеряемой величины называют отклонение результата измерения a от истинного значения A:

$$\Delta = |A - a|$$

выражаемая в единицах измеряемой величины.
Предельная абсолютная погрешность определяется как

$$\Delta_{\text{пр.}} \geq |A - a|$$

т. е. истинное значение искомой величины заведомо лежит в пределах

$$a - \Delta_{\text{пр.}} \leq A \leq a + \Delta_{\text{пр.}}$$

Относительная: безразмерная величина, выражаемая в разах или в процентах

$$\delta = \frac{\Delta}{A} \qquad 2.4$$

По аналогии с абсолютной погрешностью вводится также понятие предельной относительной погрешности:

$$\delta_{\text{пр.}} \geq \frac{\Delta}{|A|} \qquad 2.5$$

Приведенная:

$$\gamma = \frac{\Delta}{L}$$

где L – постоянная величина. Часто через приведенную погрешность выражается важная метрологическая характеристика – класс точности средства измерения. Если за L принять крайнюю отметку шкалы и задан класс точности, то $\Delta = \gamma L$ – абсолютная погрешность средства измерений.

По характеру проявления погрешности:

- 1. Грубые ошибки возникают вследствие нарушения основных условий измерения. Результат, содержащий грубую ошибку, резко отличается по величине от остальных измерений, на чем основаны некоторые критерии исключения грубых ошибок.
- 2. Систематические ошибки постоянны во всей серии измерений или изменяются по определенному закону. Выявление их требует специальных исследований, их всегда стремятся свести к минимуму, а при необходимости они обычно учитываются введением соответствующих поправок в результаты измерения.
- 3. Случайные ошибки — ошибки измерения, остающиеся после устранения всех выявленных грубых и систематических ошибок. Они вызываются большим количеством таких факторов, эффекты действия которых столь незначительны, что их нельзя выделить в отдельности. При этом распределение случайных ошибок обычно

Измерения делят на прямые и косвенные. В первом случае непосредственно измеряется определяемая величина, при косвенных измерениях она задается некоторой функцией от непосредственно измеряемых величин. Подавляющее большинство параметров процессов определяются в результате косвенных измерений, погрешность которых зависит от погрешностей непосредственно измеряемых величин, использованных в расчетах.

Предположим, что некоторые величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ измерены с абсолютными погрешностями $\Delta x_1, \Delta x, \dots, \Delta x_n$ и что измеренные значения используются для вычисления функции

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad 2.6$$

Очевидно, что погрешности приближенных аргументов должны привести к погрешности в значении искомой функции, что можно записать в следующем виде:

$$Z + \Delta z = f(X_1 + \Delta x_1, X_2 + \Delta x_2, \dots, X_n + \Delta x_n) \qquad 2.7$$

где Δz — абсолютная погрешность функции Z.

Разложим правую часть равенства (2.7) в ряд Тейлора:

$$Z + \Delta z = f(X_1, X_2, \dots, X_n) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right) \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2} \right) \Delta x_i^2 + \cdots \qquad 2.8$$

Если предположить, что измерения достаточно точны, так что величины Δx_i малы по сравнению со значениями аргументов x_i, то в выражении (2.8) можно отбросить все члены, содержащие абсолютные погрешности аргументов во второй и высшей степенях. Тогда

$$Z + \Delta z \approx f(X_1, X_2, \dots, X_n) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right) \Delta x_i \qquad 2.9$$

откуда с учетом (2.9) получаем

$$\Delta z \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right) \Delta x_i \qquad 2.10$$

Выражение для предельной абсолютной погрешности функции n переменных запишется в следующем виде:

$$\Delta_{\text{пр.}} \approx \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| |\Delta x_i| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| |\Delta_i| \qquad 2.11$$

т.е. предельная абсолютная погрешность функции независимых переменных равна сумме частных производных этой функции, умноженных на соответствующие абсолютные погрешности аргументов. В практических расчетах значения частных производных берутся в точках, соответствующих измеренным значениям x_i или средним арифметическим x_i, если проводились серии измерений.

В математической статистике также доказывается, что если абсолютные погрешности аргументов независимы и случайны, то наилучшей оценкой погрешности функции будет квадратичная сумма ее частных производных, умноженных на соответствующие погрешности аргументов:

$$\Delta z \approx \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2}$$

формулы для расчетов погрешностей косвенных измерений

- 1. Измеренная величина умножается на точное число. Если величина X измерена с погрешностью Δx и используется для вычисления

$$Z = BX$$

в котором B — точное число, то абсолютная погрешность в Z равна

$$\Delta z = B \cdot \Delta x$$

2. Погрешность в суммах и разностях. Если величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ измерены с малыми погрешностями $\Delta x_1, \Delta\, x_2, \dots, \Delta x_n$ и измеренные значения используются для вычисления функции

$$Z = (X_1 + \cdots + X_m) - (X_k + \cdots + X_n)$$

а погрешности аргументов независимы и случайны, то погрешность в Z равна квадратичной сумме исходных погрешностей:

$$|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2}$$

3. Погрешности в произведениях и частных. Если величины $X_1, X, \dots, X_n$ измерены с малыми погрешностями $\Delta x_1, \Delta\, x_2, \dots, \Delta x_n$ и измеренные значения используются для вычисления функции

$$Z = \frac{X_1 \times \dots \times X_m}{X_k \times \dots \times X_n}$$

а погрешности аргументов независимы и случайны, то относительная погрешность в Z равна квадратичной сумме исходных относительных погрешностей:

$$\frac{|\Delta z|}{Z} = \sqrt{\left(\frac{|\Delta x_1|}{|X_1|}\right)^2 + \dots + \left(\frac{|\Delta x_m|}{|X_m|}\right)^2 + \left(\frac{|\Delta x_k|}{|X_k|}\right)^2 + \dots + \left(\frac{|\Delta x_n|}{|X_n|}\right)^2}$$

4. Погрешность в произвольной функции одной переменной. Если величина Xизмерена с погрешностью Δx и используется для вычисления функции $Z = f(X)$, то абсолютная погрешность в Z равна

$$|\Delta z| = \left|\frac{\partial Z}{\partial X}\right| |\Delta x|$$

5. Погрешность в степенной функции. Если величина X измерена с погрешностью Δx и используется для вычисления степенной функции $Z = X^m$ (где m — фиксированное известное число), относительная погрешность в Z в m раз больше, чем в x:

$$\frac{|\Delta z|}{|\Delta Z|} = |m| \frac{|\Delta x|}{|X|}$$