

Лекция Плоскость и прямая в пространстве

Литература.

В.А.Ляховский, А.И.Мартыненко, В.Б.Миносцев.

Курс математики для технических высших учебных заведений
Учебное пособие часть I Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А.
Пушкаря. 2012г. Лекция 30, 31.

Плоскость, нормальный вектор. Связка плоскостей. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.

Общие, векторные, параметрические, канонические уравнения прямой в пространстве. Угол между прямыми. Пучок плоскостей. Пересечение прямой и плоскости.

Положение плоскости в пространстве можно задать точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащей этой плоскости, и вектором $\overline{N} = (A; B; C)$, перпендикулярным этой плоскости (рис. 160).

Вектор \overline{N} , перпендикулярный плоскости, называется нормальным вектором этой плоскости.

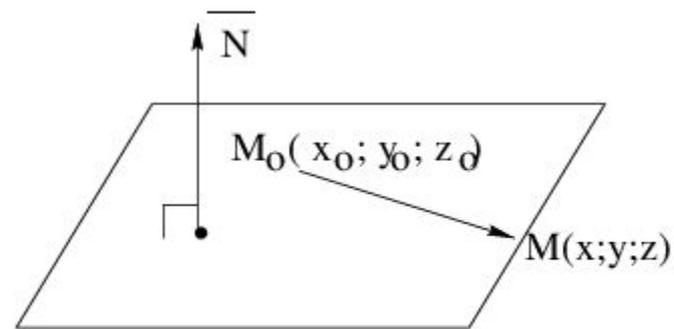


Рис. 160. Нормальный вектор плоскости

Выведем уравнение плоскости, задаваемой нормальным вектором \overline{N} и проходящей через данную точку M_0 . Рассмотрим произвольную точку $M(x; y; z)$, принадлежащую плоскости. Вектор $\overline{M_0M} \perp \overline{N}$, поэтому $\overline{M_0M} \cdot \overline{N} = 0$.

Найдя координаты вектора $\overline{M_0M} = (x - x_0)\overline{i} + (y - y_0)\overline{j} + (z - z_0)\overline{k}$, приравняем к нулю скалярное произведение. Обозначив $\overline{r} = \overline{OM}$ и $\overline{r_0} = \overline{OM_0}$ радиус-векторы точек M и M_0 соответственно, по формуле (28.3) получим: $\overline{M_0M} = \overline{r} - \overline{r_0}$ и далее, на основании условия (28.4) приравняв к нулю скалярное произведение, получим *векторное уравнение плоскости*:

$$(\overline{r} - \overline{r_0}) \cdot \overline{N} = 0. \quad (30.1)$$

Записав это уравнение в координатной форме, получаем уравнение плоскости, проходящей через данную точку с заданным нормальным вектором:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (30.2)$$

Координаты любой точки M плоскости удовлетворяют уравнению (30.2), а точки, не принадлежащие плоскости, не удовлетворяют, т.к. в этом случае $\overline{M_0M} \notin \overline{N}$.

ПРИМЕР 30.1. *Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; 2; 3)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = (2; -1; 1)$.*

Решение:

Здесь $A = 2, B = -1, C = 1$. На основании формулы (30.2) получаем:

$$2(x - 1) - 1(y - 2) + 1(z - 3) = 0 \text{ или } 2x - y + z - 3 = 0$$

Ответ. $2x - y + z - 3 = 0$.

Если в уравнении (30.1) раскрыть скобки, получится векторное уравнение плоскости в виде:

$$\overline{r} \cdot \overline{N} + D = 0, \tag{30.3}$$

где $D = -\overline{r_0} \cdot \overline{N}$.

Записав далее это уравнение с помощью формулы (28.18) в координатах, получим следующее уравнение:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{30.4}$$

Легко показать, что всякое уравнение первой степени вида (30.4) является уравнением некоторой плоскости, если хоть один из коэффициентов A , B , C не равен нулю. Действительно, если, например, $A \neq 0$, то уравнение (30.4) можно записать в виде (30.2):

$$A \left(x + \frac{D}{A} \right) + B(y - 0) + C(z - 0) = 0.$$

Т.е. уравнение (30.4) есть уравнение плоскости с нормальным вектором $\bar{N} = (A; B; C)$, проходящей через точку $M_0 \left(-\frac{D}{A}; 0; 0 \right)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30.1. Уравнение (30.4) называется общим уравнением плоскости, уравнение (30.2) – уравнением плоскости, проходящей через данную точку, уравнения (30.1) и (30.3) – соответствующими уравнениями в векторной форме.

Выведем уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой: $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ (рис. 161).

Обозначим $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}$ – радиус-векторы этих точек и текущей точки плоскости $M(x; y; z)$ соответственно.

В качестве нормального вектора плоскости выберем вектор $\vec{N} = \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}$, очевидно, перпендикулярный плоскости. В соответствии с (30.1) получаем векторное уравнение:

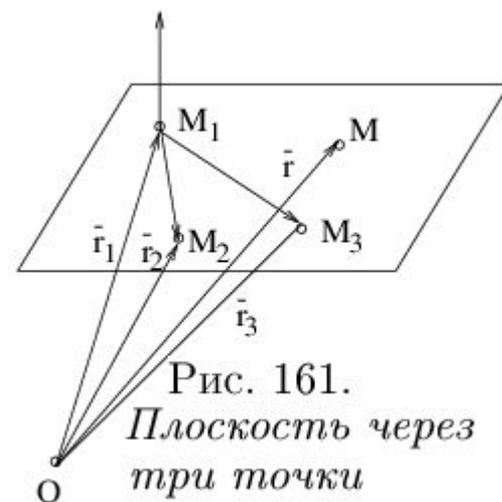
$$(\vec{r} - \vec{r}_1)((\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)) = 0.$$

Поскольку в соответствии с определением 29.5 левая часть этого уравнения есть смешанное произведение, векторное уравнение плоскости через три точки принимает вид:

$$((\vec{r} - \vec{r}_1)(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)) = 0. \quad (30.5)$$

Записав это уравнение с помощью формулы (29.5) в координатах, получим уравнение плоскости через три точки в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (30.6)$$



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30.2. Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку, называется связкой плоскостей.

Уравнение (30.2), в котором коэффициенты A , B и C могут принимать любые значения, является уравнением связки плоскостей.

30.2. Особые случаи расположения плоскости

Если коэффициент $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат, т.к. координаты точки $O(0; 0; 0)$ удовлетворяют уравнению

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Если коэффициент $A = 0$, то нормальный вектор плоскости перпендикулярен оси Ox (проверьте самостоятельно перпендикулярность векторов $\bar{N} = (0; B; C;)$ и $\bar{i} = (1; 0; 0)$) и, следовательно, данная плоскость $By + Cz + D = 0$ параллельна оси Ox .

Если коэффициенты $A = 0$ и $D = 0$, то плоскость $By + Cz = 0$ проходит через ось Ox , т.к. она параллельна оси Ox и проходит через начало координат.

Если коэффициенты $A = 0$ и $B = 0$, то нормальный вектор плоскости параллелен оси Oz (проверьте самостоятельно коллинеарность векторов $\bar{N} = (0; 0; C)$ и $\bar{k} = (0; 0; 1)$) и, следовательно, данная плоскость $Cz + D = 0$ параллельна плоскости Oxy и перпендикулярна оси Oz .

Если коэффициенты $A = B = D = 0$, то данная плоскость $z = 0$ является координатной плоскостью Oxy (параллельна плоскости Oxy и проходит через начало координат).

Двугранный угол между двумя плоскостями равен углу между их нормальными векторами (рис. 162).

Если даны две плоскости

$$\begin{aligned} \alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned} \quad (30.7)$$

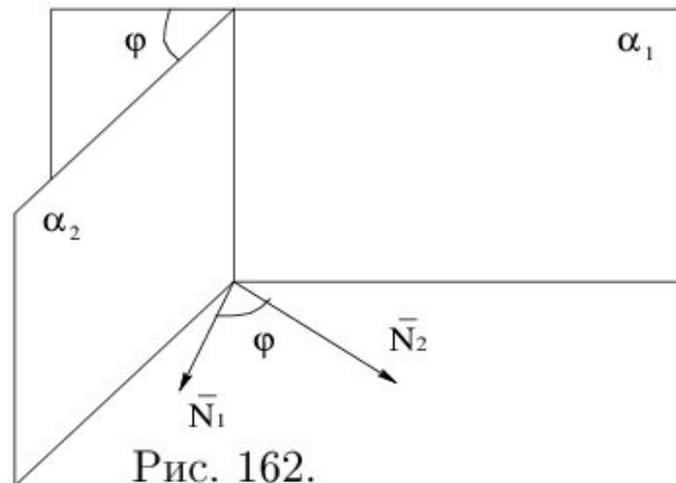


Рис. 162.

Угол между плоскостями

то угол между ними вычисляется как угол между их нормальными векторами $\bar{N}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\bar{N}_2 = (A_2; B_2; C_2)$:

$$\cos \varphi = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (30.8)$$

ПРИМЕР 30.2. Определить угол между плоскостями $2x + y - z + 1 = 0$
и $x - y + 3z = 0$.

Решение: По формуле (30.8) получаем:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} = -\frac{2}{\sqrt{66}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi &= \pi - \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{66}}\right) \approx 1,82. \end{aligned}$$

Ответ: $\cos \varphi = -\frac{2}{\sqrt{66}}$.

30.4. Параллельность и перпендикулярность плоскостей

Две плоскости будут параллельны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы параллельны и плоскости не совпадают. Т.е. необходимым и достаточным условием параллельности двух плоскостей (30.7) является условие (30.9):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \quad (30.9)$$

при условии, что плоскости не совпадают. Последнее условие легко проверяется приравниванием левых частей уравнений (30.7).

Аналогично, две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы перпендикулярны. Т.е. необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух плоскостей (30.7) является условие (30.10):

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0. \quad (30.10)$$

ПРИМЕР 30.3. При каком значении m две плоскости $2x - 3y + 5 = 0$ и $mx + 7y - 6 = 0$ будут параллельны?

Решение: Проверим выполнение условия (30.9): $\frac{2}{m} = \frac{-3}{7} = \frac{0}{0}$.

Решаем первое уравнение $\frac{2}{m} = \frac{-3}{7} \implies m = -\frac{14}{3}$.

При этом плоскости $2x - 3y + 5 = 0$ и $-\frac{14}{3}x + 7y - 6 = 0$, очевидно, различны, т.к. равенство $2x - 3y + 5 = -\frac{14}{3}x + 7y - 6$ не является тождеством.

Ответ: $m = -\frac{14}{3}$.

Пусть даны точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость α :
 $Ax + By + Cz + D = 0$. Докажем, что расстояние d от
 точки M_0 до плоскости α , т.е. длина перпендикуляра
 M_0M_1 на плоскость α (рис. 163), вычисляется по
 формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (30.11)$$

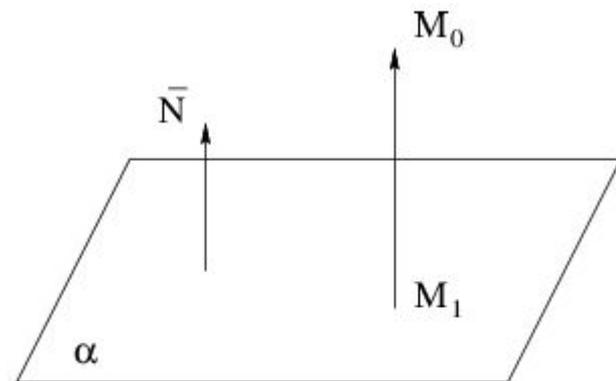


Рис. 163. Расстояние от точки до плоскости

Обозначим \bar{N} – нормальный вектор плоскости α : $\bar{N} = (A; B; C)$, координаты
 точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$. $d = |\overline{M_1M_0}|$, где вектор $\overline{M_1M_0}$ имеет координаты:
 $\overline{M_1M_0} = (x_0 - x_1)\bar{i} + (y_0 - y_1)\bar{j} + (z_0 - z_1)\bar{k}$. Поскольку $\bar{N} \parallel \overline{M_1M_0}$ ($\varphi = 0$ или
 $\varphi = \pi$), имеем по определению скалярного произведения:

$$\bar{N} \cdot \overline{M_1M_0} = |\bar{N}| \cdot |\overline{M_1M_0}| \cdot \cos \varphi = \pm |\bar{N}| \cdot |\overline{M_1M_0}|. \quad (30.12)$$

С другой стороны, в соответствии с формулой (28.18):

$$\bar{N} \cdot \overline{M_1M_0} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1). \quad (30.13)$$

Но точка $M_1 \in \alpha$, поэтому $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \implies -Ax_1 - By_1 - Cz_1 = D$
 и $\bar{N} \cdot \overline{M_1M_0} = Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1 =$
 $= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$ Учитывая, что $|\bar{N}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, $|\overline{M_1M_0}| = d$, из
 формул (30.12), (30.13) получаем:

$$\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot d = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D,$$

откуда

$$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

и, т.к. $d \geq 0$, получаем формулу (30.11).

В векторной форме формула расстояния от точки до плоскости получается с учётом (30.3) в виде:

$$d = \frac{|\vec{r}_0 \cdot \vec{N} + D|}{|\vec{N}|}. \quad (30.14)$$

Аналогично общему уравнению плоскости в пространстве (30.4), на плоскости уравнение (4.7)

$$Ax + By + C = 0, \quad \text{при } A^2 + B^2 \neq 0$$

задаёт прямую и называется общим уравнением прямой на плоскости.

Можно доказать, что вектор $\vec{N} = (A; B)$ будет перпендикулярен этой прямой; он называется нормальным вектором прямой и задаёт её направление.

Угол между двумя прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ равен углу между их нормальными векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (30.15)$$

Необходимым и достаточным условием параллельности двух различных прямых является условие $\overline{N_1} \parallel \overline{N_2}$, но прямые не совпадают:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}, \quad (30.16)$$

а условие их перпендикулярности условие $\overline{N_1} \perp \overline{N_2}$:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0. \quad (30.17)$$

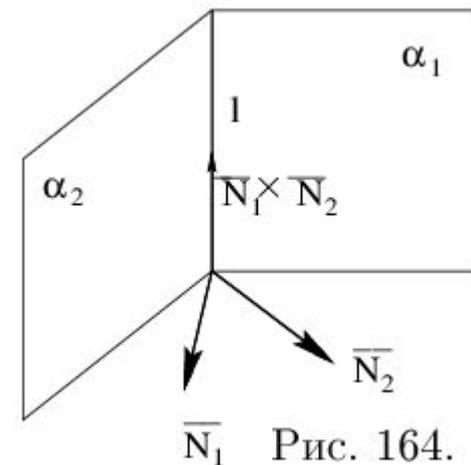
Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ на плоскости Oxy определяется по формуле (30.18):

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (30.18)$$

Доказательство этих формул повторяет приведённые выше для соответствующих уравнений в пространстве.

31.1. Прямая в пространстве

Прямую в пространстве зададим пересечением двух плоскостей (рис. 164), т.е. системой (31.1) в векторной форме или системой (31.2) в координатной:



$$\begin{cases} \overline{N}_1 \cdot \overline{r} + D_1 = 0, \\ \overline{N}_2 \cdot \overline{r} + D_2 = 0. \end{cases} \quad (31.1)$$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (31.2)$$

Если эти плоскости не параллельны, т.е. их нормальные векторы не коллинеарны: $\overline{N}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\overline{N}_2 = (A_2; B_2; C_2)$, $\overline{N}_1 \nparallel \overline{N}_2$, то системы (31.1), (31.2) определяют единственную прямую.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31.1. Уравнения (31.1), (31.2) называются общими уравнениями прямой.

Наряду с рассмотренным способом прямую в пространстве можно задать, определив принадлежащую ей точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектор $\overline{s} = (m; n; p)$, параллельный этой прямой. Вектор \overline{s} называется направляющим вектором прямой.

Для произвольной точки $M(x; y; z)$ прямой l (рис. 165) имеем: $\overline{OM} = \overline{OM_0} + \overline{M_0M}$. Вектор $\overline{M_0M} \parallel \overline{s} \implies \overline{M_0M} = \overline{s} \cdot t$, где параметр $t \in (-\infty; +\infty)$. Обозначая радиус-векторы точек M_0 и M соответственно $\overline{r_0} = \overline{OM_0}$ и $\overline{r} = \overline{OM}$, получаем:

$$\overline{r} = \overline{r_0} + t \cdot \overline{s}. \quad (31.3)$$

Уравнение (31.3) называется векторным уравнением прямой. Здесь каждому значению параметра t соответствует радиус-вектор \overline{r} точки $M \in l$.

Для получения параметрических уравнений прямой представим уравнение (31.3) в координатной форме:

$$\overline{r} = \overline{OM} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}, \quad \overline{r_0} = \overline{OM_0} = x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k},$$

$$t\overline{s} = tm\overline{i} + tn\overline{j} + tp\overline{k}.$$

$$\text{Получим:} \quad \begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp. \end{cases} \quad (31.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31.2. Уравнения (31.4) называются параметрическими уравнениями прямой. Они также определяют прямую заданием точки M_0 и направляющего вектора \overline{s} . При изменении параметра t изменяются координаты $x; y; z$ и точка $M(x; y; z)$ перемещается по прямой.

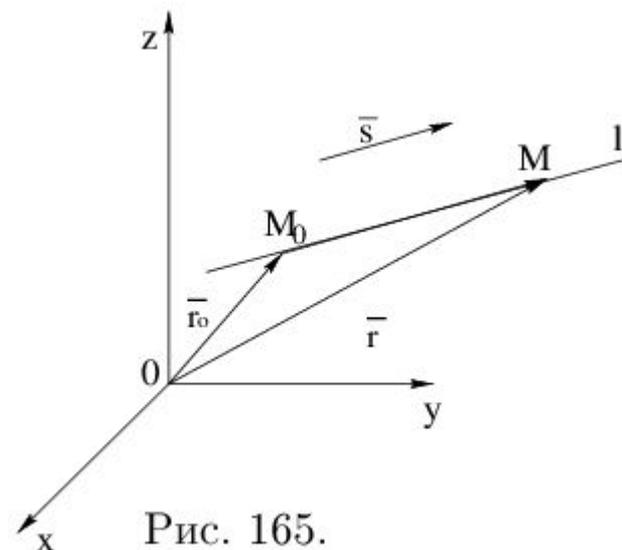


Рис. 165.

Направляющий вектор прямой

Выразим параметр t из каждого уравнения системы (31.4) и приравняем правые части полученных уравнений:

$$t = \frac{x - x_0}{m}, t = \frac{y - y_0}{n}, t = \frac{z - z_0}{p}.$$

Получим уравнения: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$, (31.5)
задающие прямую.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31.3. Уравнения (31.5) называются каноническими уравнениями прямой.

Заметим, что уравнения (31.5) равносильны системе двух уравнений первой степени:

$$\begin{cases} \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}, \\ \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}. \end{cases} \quad (31.6)$$

Третье уравнение $\frac{x - x_1}{m} = \frac{z - z_1}{p}$ является следствием этих двух. Таким образом, канонические уравнения (31.5) задают прямую пересечением двух плоскостей. Плоскости, задаваемые уравнениями (31.6), обладают особенностями: первая из них параллельна оси Oz , вторая – оси Ox (см. п. 30.2 лекции 30).

Замечание. Договоримся писать уравнения (31.5) в виде:

$$\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p},$$

если вектор \bar{s} имеет координаты $\bar{s} = (0; n; p)$. В этом случае $\bar{s} \perp Ox$ и $x = x_1$.

Аналогично прямая $\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{0} = \frac{z - z_1}{p}$

параллельна оси Oz , т.к. в этом случае $\bar{s} \perp Ox$ и $\bar{s} \perp Oy$ ($x = x_1, y = y_1$).

ПРИМЕР 31.1. Привести общие уравнения прямой $\begin{cases} 4x - y - z + 12 = 0, \\ y - z - 2 = 0. \end{cases}$ (31.7) к каноническому виду.

Решение: Для получения канонических уравнений необходимо найти точку M_0 и направляющий вектор \bar{s} прямой.

Для нахождения точки M_0 дадим одной из координат какое-нибудь значение, например, $z = 0$, и найдем две другие координаты из системы:

$$\begin{cases} 4x - y + 12 = 0, \\ y - 2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{5}{2}, \\ y_0 = 2. \end{cases} \quad (31.8)$$

Таким образом точка $M_0(-\frac{5}{2}; 2; 0) \in l$ найдена.

Для нахождения направляющего вектора \bar{s} заметим, что векторное произведение нормальных векторов $\bar{N}_1 = (4; -1; -1)$ и $\bar{N}_2 = (0; 1; -1)$ данных двух плоскостей можно принять в качестве направляющего вектора прямой их пересечения, т.к. вектор \bar{s} параллелен l (рис. 164): $\bar{s} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2, \bar{s} \perp \bar{N}_1, \bar{s} \perp \bar{N}_2$.

$$\text{Поэтому } \bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i}(1 + 1) - \bar{j}(-4) + \bar{k}(4) = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 4\bar{k}.$$

Окончательно, канонические уравнения прямой имеют вид:

$$\frac{x + \frac{5}{2}}{2} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z}{4}.$$

ПРИМЕР 31.2. Записать уравнения прямой $\frac{x + \frac{5}{2}}{2} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z}{4}$ в параметрическом виде.

Решение: Обозначим общее значение данных в условии выражений через

$$t : \frac{x + \frac{5}{2}}{2} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z}{4} = t, \text{ откуда:}$$

$$\begin{cases} \frac{x + \frac{5}{2}}{2} = t, \\ \frac{y - 2}{4} = t, \\ \frac{z}{4} = t. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2} + 2t, \\ y = 2 + 4t, \\ z = 4t. \end{cases}$$

ПРИМЕР 31.3. Записать общие уравнения прямой, заданной в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{2} + 2t, \\ y = 2 + 4t, \\ z = 4t. \end{cases}$$

Решение: Выражая параметр t из каждого уравнения и приравнявая правые части, получим канонические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{2} + 2t, \\ y = 2 + 4t, \\ z = 4t. \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{x + \frac{5}{2}}{2}, \\ t = \frac{y - 2}{4}, \\ t = \frac{z}{4}. \end{cases} \iff \frac{x + \frac{5}{2}}{2} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z}{4}.$$

Выбирая два из последних уравнений, получаем:

$$\begin{cases} \frac{x + \frac{5}{2}}{2} = \frac{y - 2}{4}, \\ \frac{y - 2}{4} = \frac{z}{4}. \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 5 = y - 2, \\ y - 2 = z. \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y + 7 = 0, \\ y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

Ответ:
$$\begin{cases} 2x - y + 7 = 0, \\ y - z - 2 = 0. \end{cases} \quad (31.9)$$

Заметим, что полученные общие уравнения (31.9) отличаются от уравнений (31.7), которыми эта прямая была задана в примере 31.1.

Однако и те и другие задают одну и ту же прямую. Чтобы убедиться в этом, проверьте, например, что точки $M_0(-\frac{5}{2}; 2; 0)$ и $M_1(-1; 5; 3)$ удовлетворяют уравнениям (31.7) и (31.9). Другими словами, уравнения (31.7) и (31.9) задают одну прямую M_0M_1 .

Для получения канонических уравнений прямой, проходящей через две точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$, заметим, что в качестве направляющего вектора в этом случае можно выбрать

$\vec{s} = \overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0)\vec{i} + (y_1 - y_0)\vec{j} + (z_1 - z_0)\vec{k}$. Тогда канонические уравнения прямой, проходящей через две точки, примут вид

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \quad (31.10)$$

ПРИМЕР 31.4. Написать канонические и общие уравнения прямой, проходящей через точки $M_0(-\frac{5}{2}; 2; 0)$ и $M_1(-1; 5; 3)$.

Решение: в соответствии с формулами (31.10) получаем канонические уравнения:

$$\frac{x + \frac{5}{2}}{-1 + \frac{5}{2}} = \frac{y - 2}{5 - 2} = \frac{z}{3} \iff \frac{x + \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z}{3}.$$

Для получения общих уравнений выберем два из последних трёх уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x + \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{y - 2}{3}, \\ \frac{y - 2}{3} = \frac{z}{3}, \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 5 = y - 2, \\ y - 2 = z, \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y + 7 = 0, \\ y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

Мы получили уравнения (31.9).

31.2. Угол между прямыми

Пусть в пространстве даны две прямые:

$$\begin{aligned} l_1 &: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \\ l_2 &: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}. \end{aligned} \quad (31.11)$$

Угол между ними вычисляется как угол между их направляющими векторами $\bar{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\bar{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$:

$$\cos \varphi = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (31.12)$$

Условием параллельности двух прямых (31.11) является условие коллинеарности их направляющих векторов:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (31.13)$$

при условии, что эти прямые не совпадают. Последнее условие легко проверяется подстановкой пары точек одной из этих прямых в уравнение другой.

Условием перпендикулярности двух прямых является условие перпендикулярности их направляющих векторов:

$$m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0. \quad (31.14)$$

Пусть в пространстве даны прямая l и плоскость α :

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad (31.15)$$

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0. \quad (31.16)$$

Найдем координаты точки $P(x_1; y_1; z_1)$ пересечения прямой l и плоскости α , для чего запишем уравнения прямой в параметрической форме (31.4) и, подставив значения x, y, z в левую часть уравнения (31.16), найдем значение параметра t_1 , при котором одновременно выполняются уравнения (31.15) и (31.16):

$$\begin{aligned} A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0 &\implies \\ \implies t_1 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}. &\quad (31.17) \end{aligned}$$

Подставив затем эти значения в формулы (31.4), получим координаты точки пересечения:

$$x_1 = x_0 + t_1 m, \quad y_1 = y_0 + t_1 n, \quad z_1 = z_0 + t_1 p. \quad (31.18)$$

Заметим, что формулы (31.15), (31.16) являются координатной формой записи соответствующих векторных уравнений прямой и плоскости:

$$\begin{cases} \bar{r} = \bar{r}_0 + t \cdot \bar{s}, \\ \bar{r} \cdot \bar{N} + D = 0. \end{cases}$$

Выразив \bar{r} из первого уравнения системы и подставив во второе, получим для t_1 формулу:

$$t_1 = -\frac{\bar{r}_0 \cdot \bar{N} + D}{\bar{N} \cdot \bar{s}}.$$

31.4. Угол между прямой и плоскостью

Угол φ между прямой (31.15) и плоскостью (31.17) легко определяется (рис. 166) через угол между направляющим вектором \bar{s} прямой и нормальным вектором \bar{N} плоскости:

$$\cos(\bar{N}; \bar{s}) = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi.$$

С другой стороны, по формуле (28.20) получаем:

$$\cos(\bar{N}; \bar{s}) = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Окончательно:

$$\sin \varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (31.19)$$

Условием параллельности прямой (31.15) и плоскости (31.16) является, очевидно, условие перпендикулярности направляющего вектора \bar{s} прямой и нормального вектора \bar{N} плоскости

$$Am + Bn + Cm = 0 \quad (31.20)$$

при условии что прямая не принадлежит плоскости. Последнее условие легко проверить подстановкой в уравнение плоскости двух точек прямой.

Условием перпендикулярности прямой и плоскости является условие коллинеарности направляющего вектора \bar{s} и нормального вектора \bar{N} плоскости:

$$\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}. \quad (31.21)$$

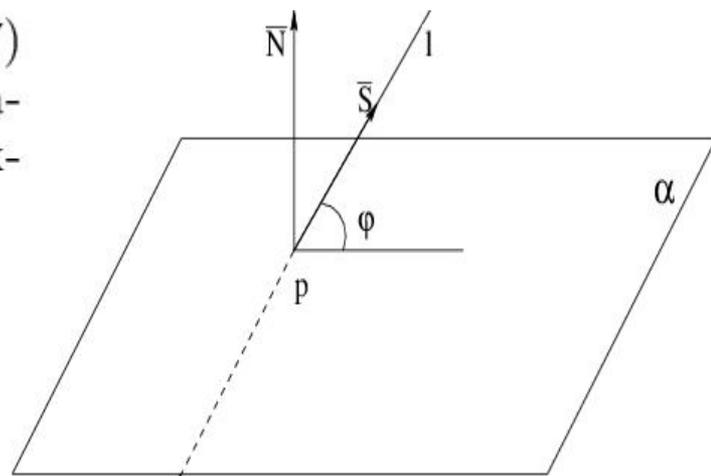


Рис. 166. Угол между прямой и плоскостью

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31.4. Совокупность всех плоскостей, проходящих через данную прямую l , называется пучком плоскостей, а прямая l – осью пучка (сравните с определением связки плоскостей в лекции 30).

Пусть ось пучка задана общими уравнениями прямой:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (31.22)$$

Докажем, что уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую (31.22), имеет вид:

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad (31.23)$$

где параметр λ принимает любые действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Доказательство. Уравнение (31.23) при любом конкретном значении λ определяет некоторую плоскость, т.к. является уравнением вида (30.4), где $A = A_1 + \lambda A_2$, $B = B_1 + \lambda B_2$, $C = C_1 + \lambda C_2$, $D = D_1 + \lambda D_2$. Эта плоскость проходит через прямую (31.22), т.к. значения $x; y; z$, удовлетворяющие системе (31.22), обращают в тождество и уравнение (31.23) (выражения в скобках равны нулю). Наоборот, покажем, что всякая плоскость пучка (кроме плоскости $\alpha_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$) может быть представлена в виде (31.23). Выберем произвольную точку $M_0(x_0; y_0; z_0) \notin \alpha_2$, т.е. $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 \neq 0$. Найдем значение λ_0 из условия, чтобы координаты точки M_0 удовлетворяли уравнению (31.23):

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 + \lambda_0(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0 \implies$$
$$\implies \lambda_0 = \frac{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1}{A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2}.$$

Подставив в уравнение (31.23) $\lambda = \lambda_0$, можно быть уверенным, что это будет уравнением плоскости, проходящей через прямую (31.22) (см. первую часть доказательства) и точку M_0 (значение λ_0 выбиралось из этого условия). Т.к. прямая (31.22) и точка M_0 , не принадлежащая этой прямой ($M_0 \notin \alpha_2$), однозначно определяют плоскость пучка, вторая часть доказательства закончена.

31.6. Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми

В заключение рассмотрим задачу нахождения кратчайшего расстояния между двумя скрещивающимися прямыми и условие пересечения двух прямых в пространстве.

Пусть прямые задаются точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и направляющими векторами $\vec{S}_1(m_1; n_1; p_1)$, $\vec{S}_2(m_2; n_2; p_2)$, $S_1 \nparallel S_2$.

Очевидно, что кратчайшее расстояние h между ними равно высоте параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{M_1M_2}$, \vec{S}_1 , \vec{S}_2 , т.е. расстоянию между плоскостями (основаниями параллелепипеда), параллельными этим прямым и содержащими их (рис. 167)

Эту высоту найдем из формулы для объёма параллелепипеда:

$$V = h \cdot S_{\text{осн}}, \quad \text{где:} \quad V = |(\overline{M_1M_2} \vec{S}_1 \vec{S}_2)|, \quad S_{\text{осн}} = |\vec{S}_1 \times \vec{S}_2|$$

Таким образом, кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми равно:

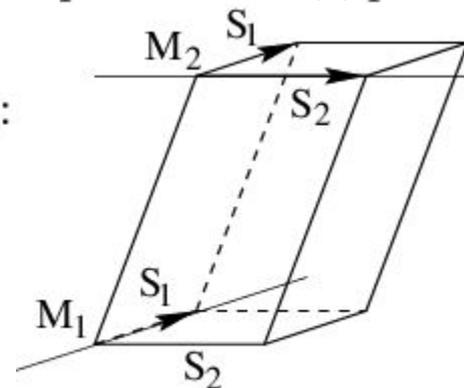


Рис. 167.

$$h = \frac{|(\overline{M_1M_2} \vec{S}_1 \vec{S}_2)|}{|\vec{S}_1 \times \vec{S}_2|} = \frac{1}{|\vec{S}_1 \times \vec{S}_2|} \left\| \begin{array}{ccc} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{array} \right\|. \quad (31.24)$$

Условие неколлинеарности векторов \bar{S}_1 и \bar{S}_2 гарантирует неравенство нулю знаменателя. Очевидно, что условием пересечения двух непараллельных прямых будет $h = 0$, т.е.:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\overline{M_1 M_2 S_1 S_2}) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \neq 0. \end{array} \right. \quad (31.25)$$

Спасибо за внимание