Лекция Плоскость и прямая в пространстве

Литература.

В.А.Ляховский, А.И.Мартыненко, В.Б.Миносцев.
Курс математики для технических высших учебных заведений
Учебное пособие часть I Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А. Пушкаря. 2012г.   Лекция 30, 31.

Плоскость, нормальный вектор. Связка плоскостей. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между плоскостями.   Расстояние от точки до плоскости.

Общие, векторные, параметрические, канонические уравнения прямой в пространстве. Угол между прямыми. Пучок плоскостей. Пересечение прямой и плоскости.

30.1. Уравнение плоскости

Положение плоскости в пространстве можно задать точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащей этой плоскости, и вектором $\overline{N} = (A; B; C)$, перпендикулярным этой плоскости (рис. 160).
Вектор $\overline{N}$*, перпендикулярный плоскости, называется нормальным вектором этой плоскости.*

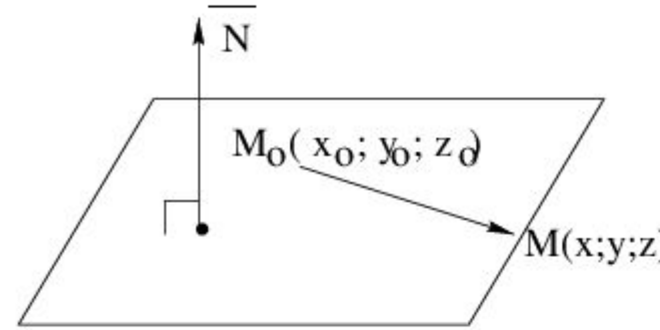

Рис. 160. *Нормальный вектор плоскости*

Выведем уравнение плоскости, задаваемой нормальным вектором $\overline{N}$ и проходящей через данную точку M_0. Рассмотрим произвольную точку $M(x; y; z)$, принадлежащую плоскости. Вектор $\overline{M_0M} \perp \overline{N}$, поэтому $\overline{M_0M} \cdot \overline{N} = 0$.

Найдя координаты вектора $\overline{M_0M} = (x - x_0)\bar{\imath} + (y - y_0)\bar{\jmath} + (z - z_0)\bar{k}$, приравняем к нулю скалярное произведение. Обозначив $\bar{r} = \overline{OM}$ и $\overline{r_0} = \overline{OM_0}$ радиус-векторы точек M и M_0 соответственно, по формуле (28.3) получим: $\overline{M_0M} = \bar{r} - \overline{r_0}$ и далее, на основании условия (28.4) приравняв к нулю скалярное произведение, получим *векторное уравнение плоскости*:

$$(\bar{r} - \overline{r_0}) \cdot \overline{N} = 0. \qquad (30.1)$$

Записав это уравнение в координатной форме, получаем уравнение плоскости, проходящей через данную точку с заданным нормальным вектором:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (30.2)$$

Координаты любой точки M плоскости удовлетворяют уравнению (30.2), а точки, не принадлежащие плоскости, не удовлетворяют, т.к. в этом случае $\overline{M_0M} \not\perp \overline{N}$.

Пример 30.1. *Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;2;3)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = (2;-1;1)$.*

Р е ш е н и е:
Здесь $A = 2$, $B = -1$, $C = 1$. На основании формулы (30.2) получаем:
$2(x-1) - 1(y-2) + 1(z-3) = 0$ или $2x - y + z - 3 = 0$
Ответ. $2x - y + z - 3 = 0$.

Если в уравнении (30.1) раскрыть скобки, получится векторное уравнение плоскости в виде:

$$\overline{r} \cdot \overline{N} + D = 0, \qquad (30.3)$$

где $D = -\overline{r_0} \cdot \overline{N}$.

Записав далее это уравнение с помощью формулы (28.18) в координатах, получим следующее уравнение:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (30.4)$$

Легко показать, что всякое уравнение первой степени вида (30.4) является уравнением некоторой плоскости, если хоть один из коэффициентов A, B, C не равен нулю. Действительно, если, например, $A \neq 0$, то уравнение (30.4) можно записать в виде (30.2):

$$A\left(x+\frac{D}{A}\right)+B(y-0)+C(z-0)=0.$$

Т.е. уравнение (30.4) есть уравнение плоскости с нормальным вектором $\overline{N}=(A;B;C)$, проходящей через точку $M_0\left(-\frac{D}{A};0;0\right)$.

Определение 30.1. *Уравнение (30.4) называется общим уравнением плоскости, уравнение (30.2) – уравнением плоскости, проходящей через данную точку, уравнения (30.1) и (30.3) – соответствующими уравнениями в векторной форме.*

Выведем уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой: $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ (рис. 161).
Обозначим $\overline{r_1}, \overline{r_2}, \overline{r_3}, \overline{r}$ – радиус-векторы этих точек и текущей точки плоскости $M(x; y; z)$ соответственно.

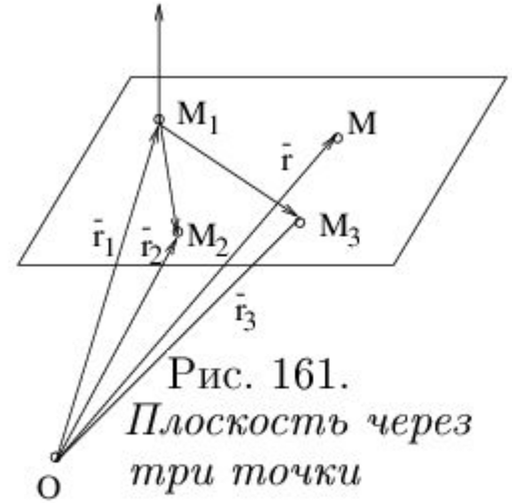

Рис. 161.
Плоскость через три точки

В качестве нормального вектора плоскости выберем вектор $\overline{N} = \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}$, очевидно, перпендикулярный плоскости. В соответствии с (30.1) получаем векторное уравнение:

$$(\overline{r} - \overline{r_1})((\overline{r_2} - \overline{r_1}) \times (\overline{r_3} - \overline{r_1})) = 0.$$

Поскольку в соответствии с определением 29.5 левая часть этого уравнения есть смешанное произведение, векторное уравнение плоскости через три точки принимает вид:

$$((\overline{r} - \overline{r_1})(\overline{r_3} - \overline{r_1})(\overline{r_2} - \overline{r_1})) = 0. \qquad (30.5)$$

Записав это уравнение с помощью формулы (29.5) в координатах, получим уравнение плоскости через три точки в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (30.6)$$

Определение 30.2. *Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку, называется связкой плоскостей.*

Уравнение (30.2), в котором коэффициенты A, B и C могут принимать любые значения, является уравнением связки плоскостей.

30.2. Особые случаи расположения плоскости

Если коэффициент $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат, т.к. координаты точки $O(0;0;0)$ удовлетворяют уравнению

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Если коэффициент $A = 0$, то нормальный вектор плоскости перпендикулярен оси Ox (проверьте самостоятельно перпендикулярность векторов $\overline{N} = (0; B; C;)$ и $\overline{i} = (1;0;0)$) и, следовательно, данная плоскость $By + Cz + D = 0$ параллельна оси Ox.

Если коэффициенты $A = 0$ и $D = 0$, то плоскость $By + Cz = 0$ проходит через ось Ox, т.к. она параллельна оси Ox и проходит через начало координат.

Если коэффициенты $A = 0$ и $B = 0$, то нормальный вектор плоскости параллелен оси Oz (проверьте самостоятельно коллинеарность векторов $\overline{N} = (0;0;C)$ и $\overline{k} = (0;0;1)$ и, следовательно, данная плоскость $Cz + D = 0$ параллельна плоскости Oxy и перпендикулярна оси Oz.

Если коэффициенты $A = B = D = 0$, то данная плоскость $z = 0$ является координатной плоскостью Oxy (параллельна плоскости Oxy и проходит через начало координат).

30.3. Угол между плоскостями

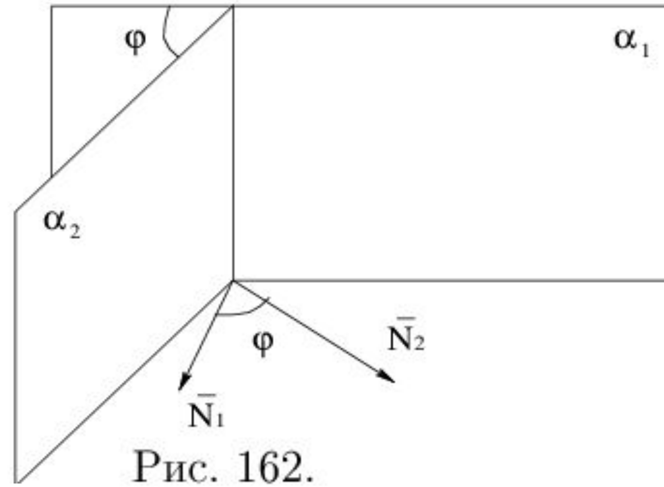

Рис. 162.
Угол между плоскостями

Двугранный угол между двумя плоскостями равен углу между их нормальными векторами (рис. 162).

Если даны две плоскости

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{30.7}$$

то угол между ними вычисляется как угол между их нормальными векторами $\overline{N}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\overline{N}_2 = (A_2; B_2; C_2)$:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{\left|\overline{N}_1\right| \cdot \left|\overline{N}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{30.8}$$

Пример 30.2. *Определить угол между плоскостями* $2x + y - z + 1 = 0$ *и* $x - y + 3z = 0$.

Р е ш е н и е: По формуле (30.8) получаем:

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} = -\frac{2}{\sqrt{66}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \pi - \arccos(\frac{2}{\sqrt{66}}) \approx 1,82.$$

Ответ: $\cos\varphi = -\dfrac{2}{\sqrt{66}}$.

30.4. Параллельность и перпендикулярность плоскостей

Две плоскости будут параллельны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы параллельны и плоскости не совпадают. Т.е. необходимым и достаточным условием параллельности двух плоскостей (30.7) является условие (30.9):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \qquad (30.9)$$

при условии, что плоскости не совпадают. Последнее условие легко проверяется приравниванием левых частей уравнений (30.7).

Аналогично, две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы перпендикулярны. Т.е. необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух плоскостей (30.7) является условие (30.10):

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0. \qquad (30.10)$$

Пример 30.3. *При каком значении m две плоскости $2x - 3y + 5 = 0$ и $mx + 7y - 6 = 0$ будут параллельны?*

Р е ш е н и е: Проверим выполнение условия (30.9): $\dfrac{2}{m} = \dfrac{-3}{7} = \dfrac{0}{0}$.

Решаем первое уравнение $\dfrac{2}{m} = \dfrac{-3}{7} \Longrightarrow m = -\dfrac{14}{3}$.

При этом плоскости $2x - 3y + 5 = 0$ и $-\dfrac{14}{3}x + 7y - 6 = 0$, очевидно, различны, т.к. равенство $2x - 3y + 5 = -\dfrac{14}{3}x + 7y - 6$ не является тождеством.

Ответ: $m = -\dfrac{14}{3}$.

30.5. Расстояние от точки до плоскости

Пусть даны точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость α : $Ax + By + Cz + D = 0$. Докажем, что расстояние d от точки M_0 до плоскости α, т.е. длина перпендикуляра M_0M_1 на плоскость α (рис. 163), вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (30.11)$$

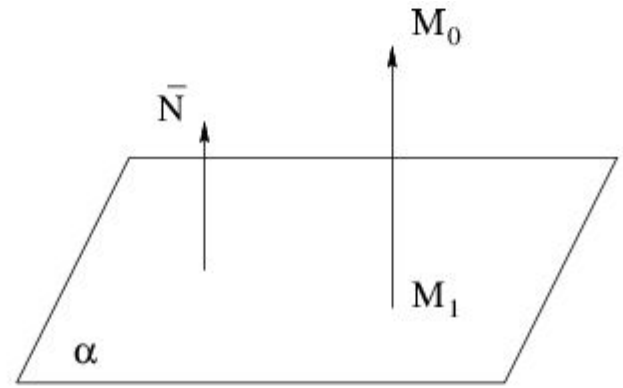

Рис. 163. *Расстояние от точки до плоскости*

Обозначим $\overline{N}$ – нормальный вектор плоскости α : $\overline{N} = (A; B; C)$, координаты точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$. $d = \left|\overline{M_1M_0}\right|$, где вектор $\overline{M_1M_0}$ имеет координаты: $\overline{M_1M_0} = (x_0 - x_1)\bar{\imath} + (y_0 - y_1)\bar{\jmath} + (z_0 - z_1)\bar{k}$. Поскольку $\overline{N} \parallel \overline{M_1M_0}$ ($\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$), имеем по определению скалярного произведения:

$$\overline{N} \cdot \overline{M_1M_0} = \left|\overline{N}\right| \cdot \left|\overline{M_1M_0}\right| \cdot \cos\varphi = \pm\left|\overline{N}\right| \cdot \left|\overline{M_1M_0}\right|. \qquad (30.12)$$

С другой стороны, в соответствии с формулой (28.18):

$$\overline{N} \cdot \overline{M_1M_0} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1). \qquad (30.13)$$

Но точка $M_1 \in \alpha$, поэтому $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \Longrightarrow -Ax_1 - By_1 - Cz_1 = D$ и $\overline{N} \cdot \overline{M_1M_0} = Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1 =$
$= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$ Учитывая, что $\left|\overline{N}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, $\left|\overline{M_1M_0}\right| = d$, из формул (30.12), (30.13) получаем:

$$\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot d = Ax_0+By_0+Cz_0+D,$$

откуда

$$d=\pm\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

и, т.к. $d\geq 0$, получаем формулу (30.11).

В векторной форме формула расстояния от точки до плоскости получается с учётом (30.3) в виде:

$$d=\frac{\left|\overline{r_0}\cdot\overline{N}+D\right|}{|\overline{N}|}. \tag{30.14}$$

Аналогично общему уравнению плоскости в пространстве (30.4), на плоскости уравнение (4.7)

$$Ax+By+C=0, \qquad \text{при} \quad A^2+B^2\neq 0$$

задаёт прямую и называется общим уравнением прямой на плоскости.
Можно доказать, что вектор $\overline{N}=(A;B)$ будет перпендикулярен этой прямой; он называется нормальным вектором прямой и задаёт её направление.
Угол между двумя прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ равен углу между их нормальными векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{N}_1\cdot\overline{N}_2}{|\overline{N}_1|\cdot|\overline{N}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \tag{30.15}$$

Необходимым и достаточным условием параллельности двух различных прямых является условие $\overline{N_1} \| \overline{N_2}$, но прямые не совпадают:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}, \tag{30.16}$$

а условие их перпендикулярности условие $\overline{N_1} \perp \overline{N_2}$:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0. \tag{30.17}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ на плоскости Oxy определяется по формуле (30.18):

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{30.18}$$

Доказательство этих формул повторяет приведённые выше для соответствующих уравнений в пространстве.

31.1. Прямая в пространстве

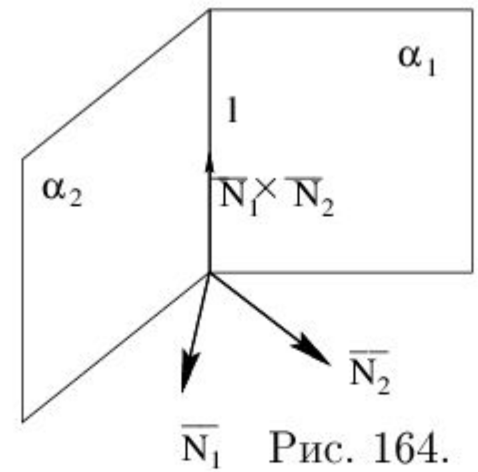

Рис. 164.

Прямую в пространстве зададим пересечением двух плоскостей (рис. 164), т.е. системой (31.1) в векторной форме или системой (31.2) в координатной:

$$\begin{cases} \overline{N_1} \cdot \overline{r} + D_1 = 0, \\ \overline{N_2} \cdot \overline{r} + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (31.1)$$

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (31.2)$$

Если эти плоскости не параллельны, т.е. их нормальные векторы не коллинеарны: $\overline{N}_1 = (A_1; B_1; C_1), \overline{N}_2 = (A_2; B_2; C_2), \overline{N}_1 \nparallel \overline{N}_2$, то системы (31.1), (31.2) определяют единственную прямую.

Определение 31.1. *Уравнения (31.1), (31.2) называются общими уравнениями прямой.*

Наряду с рассмотренным способом прямую в пространстве можно задать, определив принадлежащую ей точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектор $\overline{s} = (m; n; p)$, параллельный этой прямой. *Вектор $\overline{s}$ называется направляющим вектором прямой.*

Для произвольной точки $M(x;y;z)$ прямой l (рис. 165) имеем: $\overline{OM} = \overline{OM_0} + \overline{M_0M}$. Вектор $\overline{M_0M} \parallel \overline{s} \implies \overline{M_0M} = \overline{s} \cdot t$, где параметр $t \in (-\infty;+\infty)$. Обозначая радиус-векторы точек M_0 и M соответственно $\overline{r}_0 = \overline{OM_0}$ и $\overline{r} = \overline{OM}$, получаем:

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + t \cdot \overline{s}. \qquad (31.3)$$

Уравнение (31.3) называется векторным уравнением прямой. Здесь каждому значению параметра t соответствует радиус-вектор $\overline{r}$ точки $M \in l$.

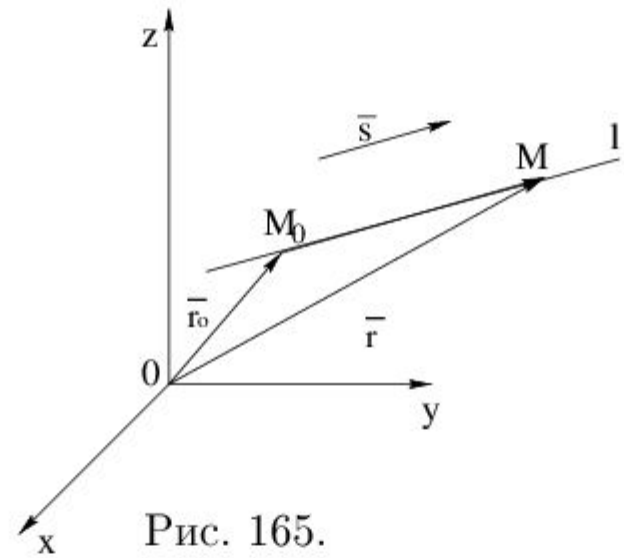

Рис. 165.

Направляющий вектор прямой

Для получения параметрических уравнений прямой представим уравнение (31.3) в координатной форме:

$$\overline{r} = \overline{OM} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k},\ \overline{r}_0 = \overline{OM_0} = x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k},$$

$$t\overline{s} = tm\overline{i} + tn\overline{j} + tp\overline{k}.$$

Получим:
$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp. \end{cases} \qquad (31.4)$$

Определение 31.2. *Уравнения (31.4) называются параметрическими уравнениями прямой. Они также определяют прямую заданием точки M_0 и направляющего вектора $\overline{s}$. При изменении параметра t изменяются координаты $x;y;z$ и точка $M(x;y;z)$ перемещается по прямой.*

Выразим параметр t из каждого уравнения системы (31.4) и приравняем правые части полученных уравнений:

$$t = \frac{x - x_0}{m}, \ t = \frac{y - y_0}{n}, \ t = \frac{z - z_0}{p}.$$

Получим уравнения: $$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \qquad (31.5)$$
задающие прямую.

Определение 31.3. *Уравнения (31.5) называются каноническими уравнениями прямой.*

Заметим, что уравнения (31.5) равносильны системе двух уравнений первой степени:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n}, \\ \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}. \end{cases} \qquad (31.6)$$

Третье уравнение $\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{p}$ является следствием этих двух. Таким образом, канонические уравнения (31.5) задают прямую пересечением двух плоскостей. Плоскости, задаваемые уравнениями (31.6), обладают особенностями: первая из них параллельна оси Oz, вторая – оси Ox (см. п. 30.2 лекции 30).

Замечание. Договоримся писать уравнения (31.5) в виде:

$$\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p},$$

если вектор $\bar{s}$ имеет координаты $\bar{s}=(0;n;p)$. В этом случае $\bar{s}\perp Ox$ и $x=x_1$.

Аналогично прямая $\dfrac{x-x_1}{0}=\dfrac{y-y_1}{0}=\dfrac{z-z_1}{p}$

параллельна оси Oz, т.к. в этом случае $\bar{s}\perp Ox$ и $\bar{s}\perp Oy$ $(x=x_1,\ y=y_1)$.

Пример 31.1. *Привести общие уравнения прямой* $\begin{cases} 4x - y - z + 12 = 0, \\ y - z - 2 = 0. \end{cases}$ (31.7) *к каноническому виду.*

Р е ш е н и е: Для получения канонических уравнений необходимо найти точку M_0 и направляющий вектор $\overline{s}$ прямой.
Для нахождения точки M_0 дадим одной из координат какое-нибудь значение, например, $z = 0$, и найдем две другие координаты из системы:

$$\begin{cases} 4x - y + 12 = 0, \\ y - 2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{5}{2}, \\ y_0 = 2. \end{cases} \qquad (31.8)$$

Таким образом точка $M_0(-\frac{5}{2}; 2; 0) \in l$ найдена.

Для нахождения направляющего вектора $\overline{s}$ заметим, что векторное произведение нормальных векторов $\overline{N_1} = (4; -1; -1)$ и $\overline{N_2} = (0; 1; -1)$ данных двух плоскостей можно принять в качестве направляющего вектора прямой их пересечения, т.к. вектор $\overline{s}$ параллелен l (рис. 164): $\overline{s} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2, \overline{s} \perp \overline{N}_1, \overline{s} \perp \overline{N}_2$.

Поэтому $\overline{s} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \overline{i}(1+1) - \overline{j}(-4) + \overline{k}(4) = 2\overline{i} + 4\overline{j} + 4\overline{k}$.

Окончательно, канонические уравнения прямой имеют вид:

$$\frac{x + \frac{5}{2}}{2} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z}{4}.$$

Пример 31.2. *Записать уравнения прямой* $\dfrac{x+\dfrac{5}{2}}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z}{4}$ *в параметрическом виде.*

Р е ш е н и е: Обозначим общее значение данных в условии выражений через t: $\dfrac{x+\dfrac{5}{2}}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z}{4}=t$, откуда:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{x+\frac{5}{2}}{2}&=t,\\ \frac{y-2}{4}&=t,\\ \frac{z}{4}&=t.\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}x&=-\frac{5}{2}+2t,\\ y&=2+4t,\\ z&=4t.\end{aligned}\right.$$

Пример 31.3. *Записать общие уравнения прямой, заданной в параметрическом виде:*

$$\begin{cases} x = -\dfrac{5}{2} + 2t, \\ y = 2 + 4t, \\ z = 4t. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Выражая параметр t из каждого уравнения и приравнивая правые части, получим канонические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{5}{2} + 2t, \\ y = 2 + 4t, \\ z = 4t. \end{cases} \iff \begin{cases} t = \dfrac{x + \frac{5}{2}}{2}, \\ t = \dfrac{y - 2}{4}, \\ \quad z \end{cases} \iff \frac{x + \frac{5}{2}}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{4}.$$

Выбирая два из последних уравнений, получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{x + \frac{5}{2}}{2} = \dfrac{y-2}{4}, \\ \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z}{4}. \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 5 = y - 2, \\ y - 2 = z. \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y + 7 = 0, \\ y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $$\begin{cases} 2x - y + 7 = 0, \\ y - z - 2 = 0. \end{cases} \tag{31.9}$$

Заметим, что полученные общие уравнения (31.9) отличаются от уравнений (31.7), которыми эта прямая была задана в примере 31.1.

Однако и те и другие задают одну и ту же прямую. Чтобы убедиться в этом, проверьте, например, что точки $M_0(-\frac{5}{2};2;0)$ и $M_1(-1;5;3)$ удовлетворяют уравнениям (31.7) и (31.9). Другими словами, уравнения (31.7) и (31.9) задают одну прямую M_0M_1.

Для получения канонических уравнений прямой, проходящей через две точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и $M_1(x_1;y_1;z_1)$, заметим, что в качестве направляющего вектора в этом случае можно выбрать
$\overline{s} = \overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0)\overline{i} + (y_1 - y_0)\overline{j} + (z_1 - z_0)\overline{k}$. Тогда канонические уравнения прямой, проходящей через две точки, примут вид

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \qquad (31.10)$$

Пример 31.4. *Написать канонические и общие уравнения прямой, проходящей через точки* $M_0(-\frac{5}{2};2;0)$ *и* $M_1(-1;5;3)$.

Решение: в соответствии с формулами (31.10) получаем канонические уравнения:

$$\frac{x+\frac{5}{2}}{-1+\frac{5}{2}}=\frac{y-2}{5-2}=\frac{z}{3}\iff\frac{x+\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{3}.$$

Для получения общих уравнений выберем два из последних трёх уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{x+\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{y-2}{3},\\ \dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{3},\end{cases}\iff\begin{cases}2x+5=y-2,\\ y-2=z,\end{cases}\iff\begin{cases}2x-y+7=0,\\ y-z-2=0.\end{cases}$$

Мы получили уравнения (31.9).

31.2. Угол между прямыми

Пусть в пространстве даны две прямые:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$
$$l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}. \qquad (31.11)$$

Угол между ними вычисляется как угол между их направляющими векторами $\overline{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\overline{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2}{|\overline{s}_1| \cdot |\overline{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (31.12)$$

Условием параллельности двух прямых (31.11) является условие коллинеарности их направляющих векторов: $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$ (31.13)

при условии, что эти прямые не совпадают. Последнее условие легко проверяется подстановкой пары точек одной из этих прямых в уравнение другой. Условием перпендикулярности двух прямых является условие перпендикулярности их направляющих векторов:

$$m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0. \qquad (31.14)$$

31.3. Пересечение прямой и плоскости

Пусть в пространстве даны прямая l и плоскость α:

$$l: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \qquad (31.15)$$

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (31.16)$$

Найдем координаты точки $P(x_1; y_1; z_1)$ пересечения прямой l и плоскости α, для чего запишем уравнения прямой в параметрической форме (31.4) и, подставив значения x, y, z в левую часть уравнения (31.16), найдем значение параметра t_1, при котором одновременно выполняются уравнения (31.15) и (31.16):

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow t_1 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}. \qquad (31.17)$$

Подставив затем эти значения в формулы (31.4), получим координаты точки пересечения:

$$x_1 = x_0 + t_1 m, \quad y_1 = y_0 + t_1 n, \quad z = z_0 + t_1 p. \qquad (31.18)$$

Заметим, что формулы (31.15),(31.16) являются координатной формой записи соответствующих векторных уравнений прямой и плоскости:

$$\begin{cases} \overline{r} = \overline{r_0} + t \cdot \overline{s}, \\ \overline{r} \cdot \overline{N} + D = 0. \end{cases}$$

Выразив $\overline{r}$ из первого уравнения системы и подставив во второе, получим для t_1 формулу:

$$t_1 = -\frac{\overline{r_0} \cdot \overline{N} + D}{\overline{N} \cdot \overline{s}}.$$

31.4. Угол между прямой и плоскостью

Угол φ между прямой (31.15) и плоскостью (31.17) легко определяется (рис. 166) через угол между направляющим вектором $\overline{s}$ прямой и нормальным вектором $\overline{N}$ плоскости:

$$\cos(\overline{N};\overline{s}) = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin\varphi.$$

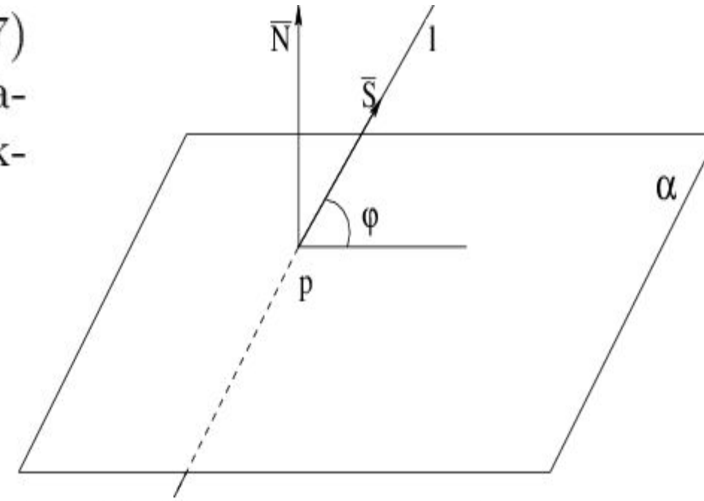

Рис. 166. *Угол между прямой и плоскостью*

С другой стороны, по формуле (28.20) получаем:

$$\cos(\overline{N};\overline{s}) = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Окончательно:

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (31.19)$$

Условием параллельности прямой (31.15) и плоскости (31.16) является, очевидно, условие перпендикулярности направляющего вектора $\overline{s}$ прямой и нормального вектора $\overline{N}$ плоскости

$$Am + Bn + Cm = 0 \qquad (31.20)$$

при условии что прямая не принадлежит плоскости. Последнее условие легко проверить подстановкой в уравнение плоскости двух точек прямой.

Условием перпендикулярности прямой и плоскости является условие коллинеарности направляющего вектора $\overline{s}$ и нормального вектора $\overline{N}$ плоскости:

$$\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}. \qquad (31.21)$$

31.5. Пучок плоскостей

Определение 31.4. *Совокупность всех плоскостей, проходящих через данную прямую l, называется пучком плоскостей, а прямая l – осью пучка (сравните с определением связки плоскостей в лекции 30).*

Пусть ось пучка задана общими уравнениями прямой:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (31.22)$$

Докажем, что уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую (31.22), имеет вид:

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (31.23)$$

где параметр λ принимает любые действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Доказательство. Уравнение (31.23) при любом конкретном значении λ определяет некоторую плоскость, т.к. является уравнением вида (30.4), где $A = A_1 + \lambda A_2, B = B_1 + \lambda B_2, C = C_1 + \lambda C_2, D = D_1 + \lambda D_2$. Эта плоскость проходит через прямую (31.22), т.к. значения $x; y; z$, удовлетворяющие системе (31.22), обращают в тождество и уравнение (31.23) (выражения в скобках равны нулю). Наоборот, покажем, что всякая плоскость пучка (кроме плоскости α_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$) может быть представлена в виде (31.23). Выберем произвольную точку $M_0(x_0; y_0; z_0) \notin \alpha_2$, т.е. $A_2x_0 + B_2y_0 + {}$ ${}+C_2z_0 + D_2 \neq 0$. Найдем значение λ_0 из условия, чтобы координаты точки M_0 удовлетворяли уравнению (31.23):

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 + \lambda_0(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \lambda_0 = \frac{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1}{A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2}.$$

Подставив в уравнение (31.23) $\lambda = \lambda_0$, можно быть уверенным, что это будет уравнением плоскости, проходящей через прямую (31.22) (см. первую часть доказательства) и точку M_0 (значение λ_0 выбиралось из этого условия). Т.к. прямая (31.22) и точка M_0, не принадлежащая этой прямой ($M_0 \notin \alpha_2$), однозначно определяют плоскость пучка, вторая часть доказательства закончена.

31.6. Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми

В заключение рассмотрим задачу нахождения кратчайшего расстояния между двумя скрещивающимися прямыми и условие пересечения двух прямых в пространстве.

Пусть прямые задаются точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и направляющими векторами $\overline{S}_1(m_1;n_1;p_1)$, $\overline{S}_2(m_2;n_2;p_2)$, $S_1 \nparallel S_2$.

Очевидно, что кратчайшее расстояние h между ними равно высоте параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{M_1M_2}$, $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, т.е. расстоянию между плоскостями (основаниями параллелепипеда), параллельными этим прямым и содержащими их (рис. 167)

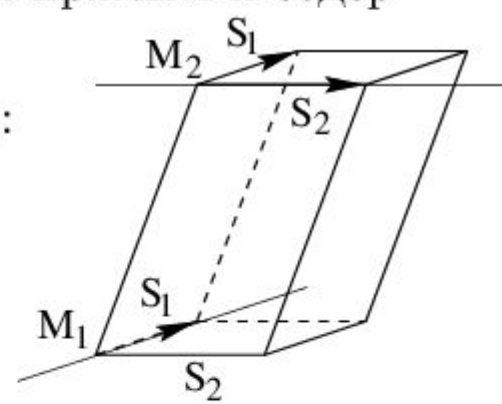

Рис. 167.

Эту высоту найдем из формулы для объёма параллелепипеда:

$V = h \cdot S_{\text{осн}}$, где: $\quad V = |(\overline{M_1M_2}\,\overline{S}_1\overline{S}_2)|, \quad S_{\text{осн}} = |\overline{S}_1 \times \overline{S}_2|$

Таким образом, кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми равно:

$$h = \frac{|(\overline{M_1M_2}\,\overline{S}_1\overline{S}_2)|}{|\overline{S}_1 \times \overline{S}_2|} = \frac{1}{|\overline{S}_1 \times \overline{S}_2|} \left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{matrix} \right\|. \quad (31.24)$$

Условие неколлинеарности векторов $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ гарантирует неравенство нулю знаменателя. Очевидно, что условием пересечения двух непараллельных прямых будет $h = 0$, т.е.:

$$\begin{cases} (\overline{M_1M_2}\,\overline{S}_1\overline{S}_2) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \overline{S}_1 \times \overline{S}_2 \neq 0. \end{cases} \qquad (31.25)$$

Спасибо за внимание