

6 июня 2020 г.

Решение простейших тригонометрических уравнений

тригонометрических уравнений

$$\sin x = a$$

если $|a| > 1$, то корней нет

$$\sin x = -3,5$$

если $a = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\sin x = 1$$

если $a = 0$, то $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\sin x = 0$$

если $a = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\sin x = -1$$

для остальных a

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0,6$$

тригонометрических уравнений

Замечани

Иногда удобно решения уравнения $\sin x = a$ записывать не одной, а двумя формулами

$$\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

тригонометрических уравнений

$$\cos x = a$$

если $|a| > 1$, то корней нет

$$\cos x = 3,2$$

если $a = 1$, то $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\cos x = 1$$

если $a = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\cos x = 0$$

если $a = -1$, то $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\cos x = -1$$

для остальных a

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

тригонометрических уравнений

$$\operatorname{tg} x = a$$

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = a$$

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(a \in \mathbb{R})$$

Решите уравнения

138. а) $\sin x = \frac{1}{2}$;

б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;



$\cos x = 1$

$\sin x = 0.6$

если $a = 1$ то $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

| α | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
|-----------------------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------|
| $\sin \alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\cos \alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 |
| $\operatorname{tg} \alpha$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | — | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | — | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | -1 | $-\sqrt{3}$ | — |

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

если |

$$(-1)^k \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \dots \cdot (-1)}_{kk + 1} \cdot (-1) \cdot \frac{\pi}{3}$$

Решите уравнения

140. а) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

б) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$;

$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Иногда удобно решения уравнения $\sin x = a$ записывать не одной, а двумя формулами

$$\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

| α | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
|-----------------------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------|
| $\sin \alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\cos \alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 |
| $\operatorname{tg} \alpha$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | — | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | — | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | -1 | $-\sqrt{3}$ | — |

$\operatorname{arcsin} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\pi - \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

\mathbb{R})

Решите уравнения

137.— а) $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$;

б) $\sqrt{2} \cos x - 1 = 0$;

$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

а) $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) $\sqrt{2} \cos x - 1 = 0$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Решите уравнения

145.— а) $2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$;

а) $2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 4\pi n \\ x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 4\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 4\pi n \\ x = 4\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n; 4\pi n; n \in \mathbb{Z}$.

Решите уравнения

145.— б) $2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2};$

$$\text{б) } 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ 3x - \frac{\pi}{4} = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{cases} 3x = 2\pi n, \\ 3x = \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi n}{3}, \\ 3x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Иногда удобно решения уравнения $\sin x = a$ записывать не одной, а двумя формулами:

$$\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi n}{3}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Ответ: $\frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}; n \in \mathbb{Z}.$

149. — Решите уравнения $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

и найдите для каждого из них:

а) наименьший положительный корень;

б) корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) наибольший отрицательный корень;

г) корни, принадлежащие промежутку $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} -2x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

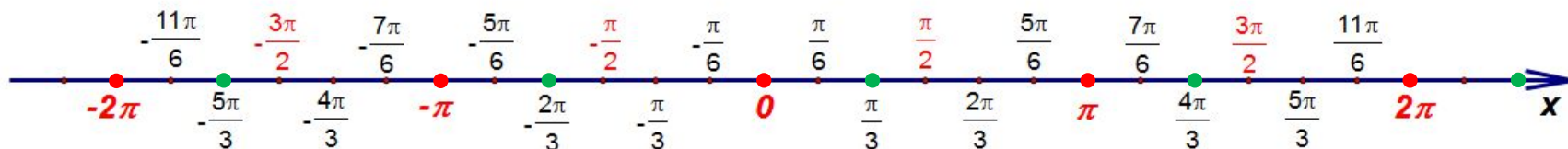
$$\frac{\pi}{3} - 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \bullet \\ x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \bullet \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{3} - 2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{3} - 2x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

а) $x = \frac{\pi}{3}$; б) $0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{4\pi}{3}$; в) $-\frac{2\pi}{3}$; г) $-\frac{2\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}$.



149. — Решите уравнения $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

и найдите для каждого из них:

а) наименьший положительный корень;

б) корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]; \left[-\frac{4\pi}{8}; \frac{6\pi}{8}\right]$

в) наибольший отрицательный корень;

г) корни, принадлежащие промежутку $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(-\frac{8\pi}{8}; \frac{4\pi}{8}\right)$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$n = 0 \quad x = -\frac{3\pi}{8}$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$n = 1$$

2π

$$2x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$n = 2$$

$$x = -\frac{3\pi}{8} + 2\pi = \frac{13\pi}{8}$$

$$x = -\frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$n = -1$$

2π

а) $\frac{5\pi}{8}$; б) $-\frac{3\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}$; в) $-\frac{3\pi}{8}$; г) $-\frac{3\pi}{8}$.

