6 июня 2020 г.

Решение простейших тригонометрических уравнений

тригонометрических уравнений

$$\sin x = a$$

если $|a| > 1$, то корней нет — $\sin x = -3{,}5$

если $a = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ — $\sin x = 1$

если $a = 0$, то $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ — $\sin x = 0$

если $a = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ — $\sin x = -1$

для остальных a — $\sin x = 0{,}6$

$$\boldsymbol{x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}}$$

тригонометрических уравнений

Замечание.

Иногда удобно решения уравнения $\sin x = a$ записывать не одной, а двумя формулами

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{array}\right. \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

тригонометрических уравнений

$$\cos x = a$$

если $|a| > 1$, то корней нет — $\cos x = 3,2$

если $a = 1$, то $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ — $\cos x = 1$

если $a = 0$, то $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ — $\cos x = 0$

если $a = -1$, то $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ — $\cos x = -1$

для остальных a

$$\boldsymbol{x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}}$$

$\cos x = \dfrac{2}{3}$

тригонометрических уравнений

$$\operatorname{tg} x = a$$

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = a$$

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(a \in \mathbb{R})$$

Решите уравнения

138. а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos x = 1$

$\sin x = 0{,}6$

если $a = 1$ то $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

S

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

C

$\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

если |

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg α	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

$$(-1)^k\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \underbrace{\underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot\ldots\cdot(-1)}_{k}\cdot(-1)}_{k+1}\cdot\frac{\pi}{3}$$

Решите уравнения

140. а) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$;

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Иногда удобно решения уравнения $\sin x = a$ записывать не одной, а двумя формулами

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{array}\right. (n \in \mathbb{Z}).$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

$g\ a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$+ \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{R})$

Решите уравнения

137. а) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$; б) $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$;

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

а) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Решите уравнения

145.— а) $2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3};$

$x=\pm\arccos a+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$

а) $2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$

$$\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}+4\pi n, n\in\mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+4\pi n \\ x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+4\pi n \end{array}\right. \quad n\in\mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi}{3}+4\pi n \\ x=4\pi n \end{array}\right. \quad n\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3}+4\pi n; 4\pi n; n\in\mathbb{Z}$.

Решите уравнения

145.— б) $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$;

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

б) $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Иногда удобно решения уравнения $\sin x = a$ записывать не одной, а двумя формулами:

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{array}\right. \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$$\left[\begin{array}{l} 3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ 3x - \frac{\pi}{4} = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n, \end{array}\right. \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\left[\begin{array}{l} 3x = 2\pi n, \\ 3x = \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \end{array}\right. \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi n}{3}, \\ 3x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \end{array}\right. \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi n}{3}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}, \end{array}\right. \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Ответ: $\frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}; n \in \mathbb{Z}$.

149. Решите уравнения $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\frac{1}{2}$, $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ и найдите для каждого из них:

а) наименьший положительный корень;

б) корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) наибольший отрицательный корень;

г) корни, принадлежащие промежутку $\left(-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\frac{1}{2}$$

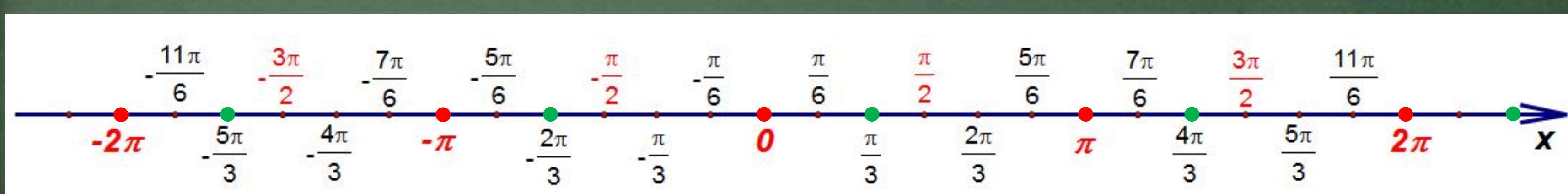
$$\frac{\pi}{3}-2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{3}-2x=\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi}{3}-2x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}-2x=2\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ -2x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

а) $x=\frac{\pi}{3}$; б) $0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{4\pi}{3}$; в) $-\frac{2\pi}{3}$; г) $-\frac{2\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}$.



149. Решите уравнения $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\frac{1}{2}$, $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ и найдите для каждого из них:

а) наименьший положительный корень;

б) корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$; $\left[-\frac{4\pi}{8};\ \frac{6\pi}{8}\right]$

в) наибольший отрицательный корень;

г) корни, принадлежащие промежутку $\left(-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right)$. $\left(-\frac{8\pi}{8};\ \frac{4\pi}{8}\right)$

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

$$2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$$

$$2x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$$

$$x=-\frac{3\pi}{8}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$$

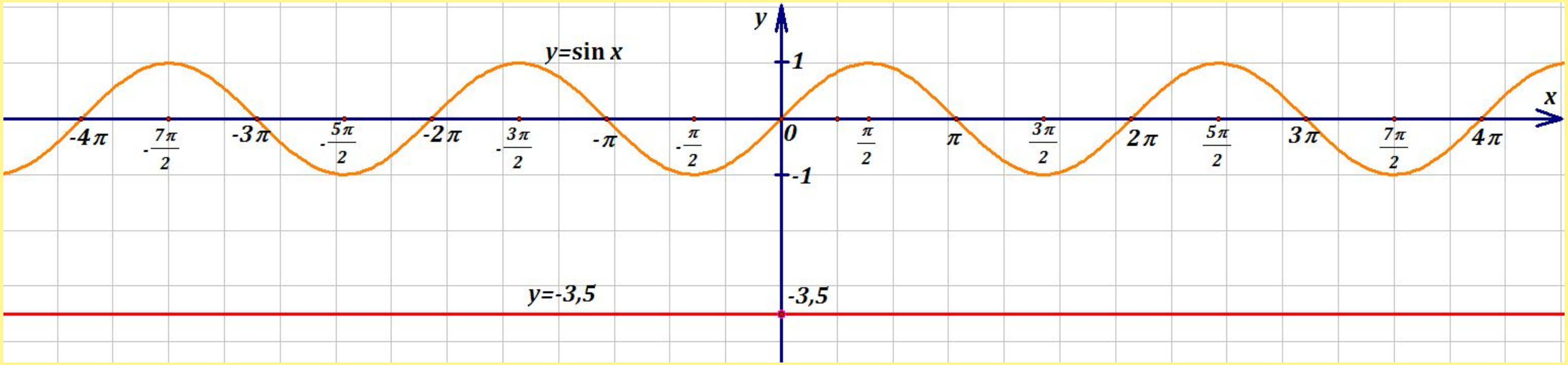
$n=0$ $\quad x=-\frac{3\pi}{8}$

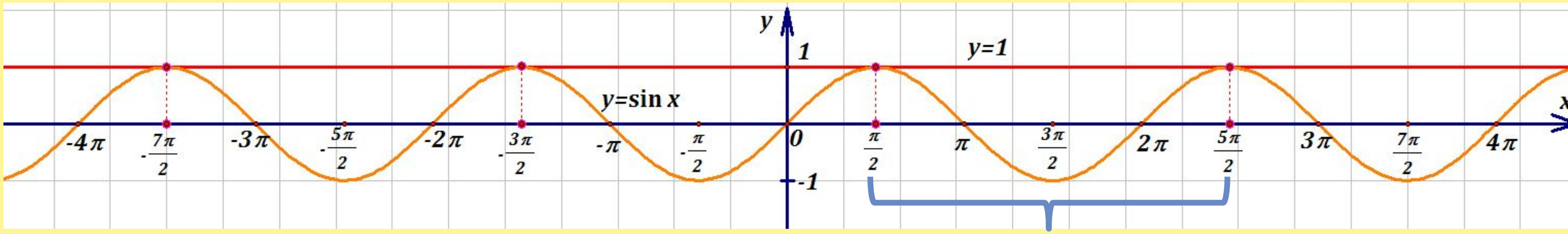
$n=1$ $\quad 2\pi$

$n=2$ $\quad x=-\frac{3\pi}{8}+2\pi=\frac{13\pi}{8}$

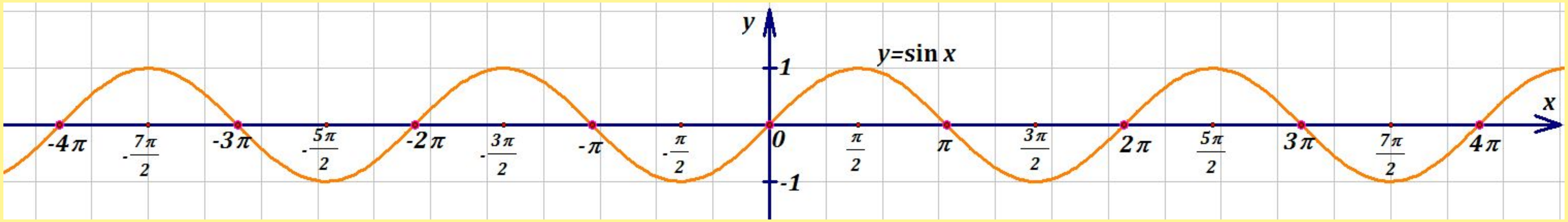
$n=-1$ $\quad 2\pi$

а) $\frac{5\pi}{8}$; б) $-\frac{3\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{8}$; в) $-\frac{3\pi}{8}$; г) $-\frac{3\pi}{8}$.

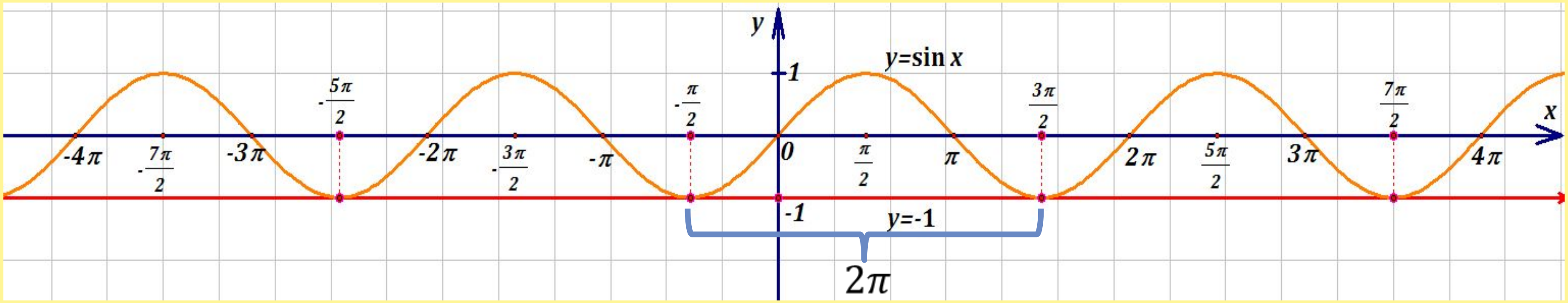

y
y=sin x
1
x
-4π
-7π/2
-3π
-5π/2
-2π
-3π/2
-π
-π/2
0
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
7π/2
4π
-1
y=-3,5
-3,5



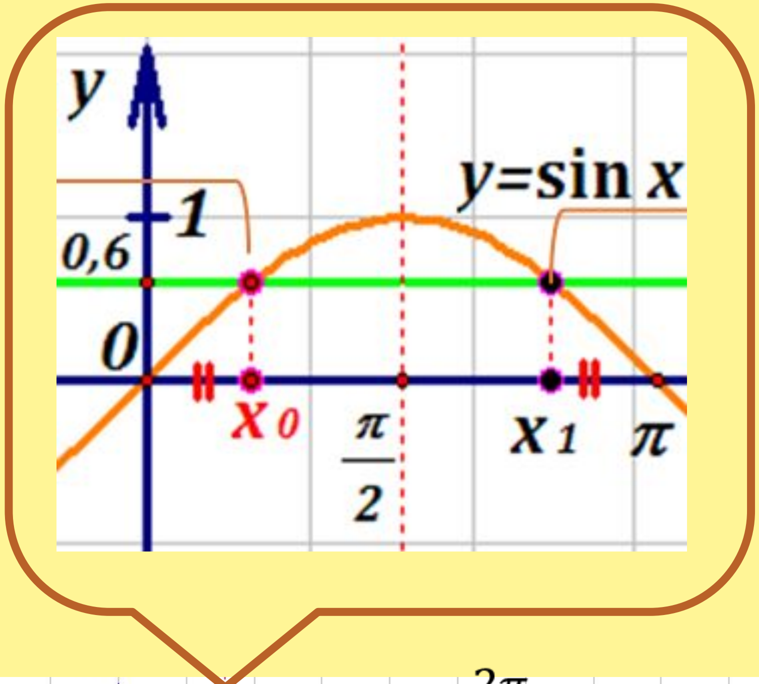
2π

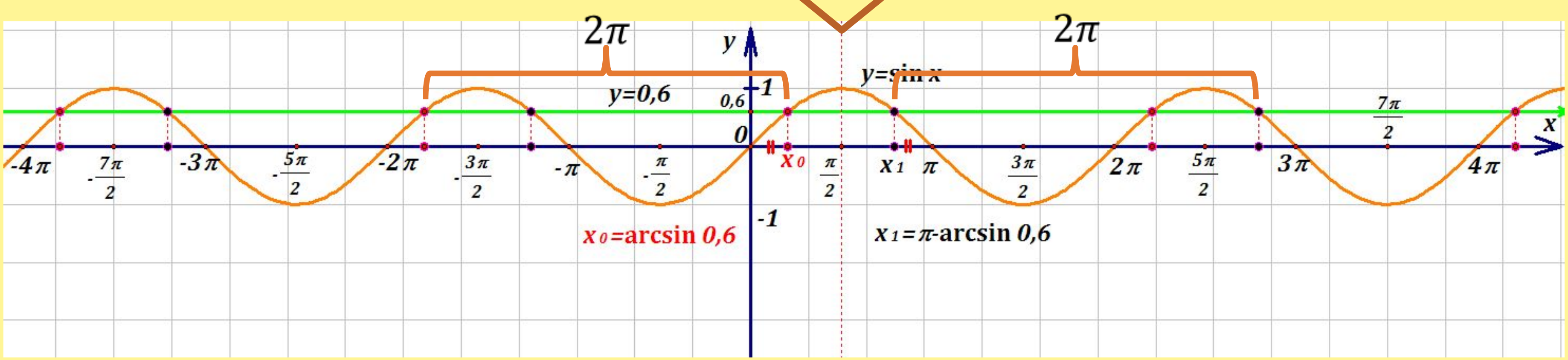


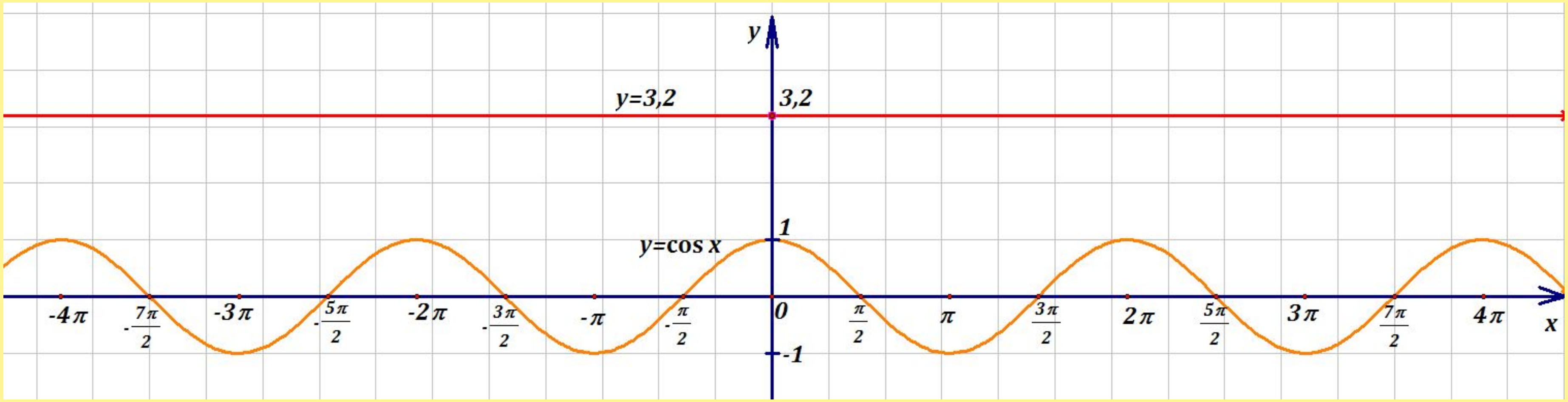
y
x
y=sin x
1
-1
0
-4π
-7π/2
-3π
-5π/2
-2π
-3π/2
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
7π/2
4π



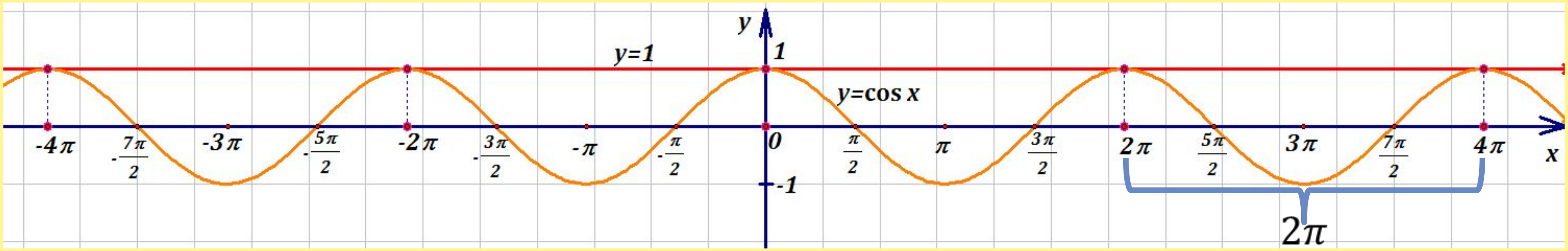
y
x
y=sin x
1
-1
0
y=-1
-4π
-3π
-2π
-π
π
2π
3π
4π
-7π/2
-5π/2
-3π/2
-π/2
π/2
3π/2
5π/2
7π/2
2π


y
y=sin x
1
0,6
0
x 0
π/2
x 1
π

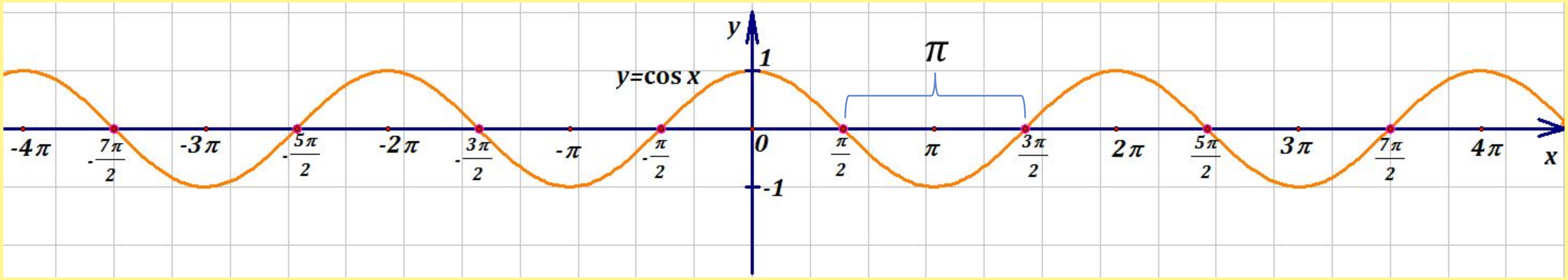

2π
2π
y
y=sin x
y=0,6
0,6
1
0
x
-1
-4π
-7π/2
-3π
-5π/2
-2π
-3π/2
-π
-π/2
x 0
π/2
x 1
π
3π/2
2π
5π/2
3π
7π/2
4π
x 0 =arcsin 0,6
x 1 =π-arcsin 0,6

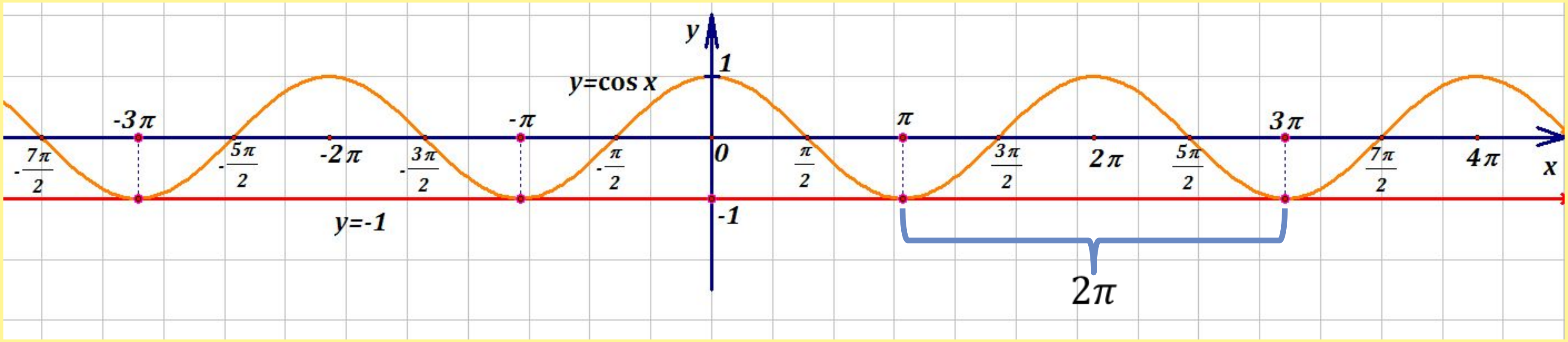


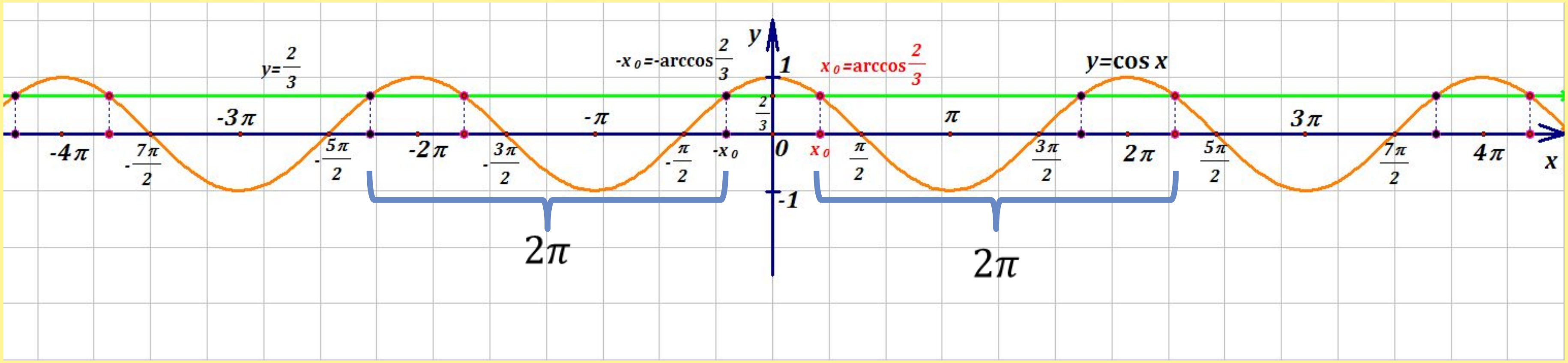
y
y=3,2
3,2
1
y=cos x
0
-1
x
-4π
-7π/2
-3π
-5π/2
-2π
-3π/2
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
7π/2
4π



y
1
y=1
y=cos x
0
-1
x
-4π
-7π/2
-3π
-5π/2
-2π
-3π/2
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
7π/2
4π
2π


y
1
y=cos x
π
-4π
-7π/2
-3π
-5π/2
-2π
-3π/2
-π
-π/2
0
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
7π/2
4π
x
-1


y
1
y=cos x
-3π
-π
π
3π
-7π/2
-5π/2
-2π
-3π/2
-π/2
0
π/2
3π/2
2π
5π/2
7π/2
4π
x
-1
y=-1
2π



y
1
-1
0
x
$y=\frac{2}{3}$
$-x_0=-\arccos\frac{2}{3}$
$x_0=\arccos\frac{2}{3}$
$y=\cos x$
-4π
-3π
-2π
$-\pi$
π
2π
3π
4π
$-\frac{7\pi}{2}$
$-\frac{5\pi}{2}$
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{2}$
$\frac{7\pi}{2}$
$\frac{2}{3}$
$-x_0$
x_0
2π
2π