

6 июня 2020 г.

# Решение простейших тригонометрических уравнений

# тригонометрических уравнений

---

$$\sin x = a$$

если  $|a| > 1$ , то корней нет

$$\sin x = -3,5$$

если  $a = 1$ , то  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\sin x = 1$$

если  $a = 0$ , то  $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\sin x = 0$$

если  $a = -1$ , то  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\sin x = -1$$

для остальных  $a$

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0,6$$

# тригонометрических уравнений

---

## Замечани

Иногда удобно решения уравнения  $\sin x = a$  записывать не одной, а двумя формулами

$$\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

# тригонометрических уравнений

---

$$\cos x = a$$

если  $|a| > 1$ , то корней нет

$$\cos x = 3,2$$

если  $a = 1$ , то  $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\cos x = 1$$

если  $a = 0$ , то  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\cos x = 0$$

если  $a = -1$ , то  $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\cos x = -1$$

для остальных  $a$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

# тригонометрических уравнений

---

$$\operatorname{tg} x = a$$

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = a$$

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(a \in \mathbb{R})$$

# Решите уравнения

138. а)  $\sin x = \frac{1}{2}$ ;

б)  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;



$\cos x = 1$

$\sin x = 0.6$

если  $a = 1$  то  $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

если |

$$(-1)^k \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \dots \cdot (-1)}_{kk + 1} \cdot (-1) \cdot \frac{\pi}{3}$$



## Решите уравнения

140. а)  $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ;

б)  $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ ;

$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Иногда удобно решения уравнения  $\sin x = a$  записывать не одной, а двумя формулами

$$\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{cases} (n \in \mathbb{Z}).$$

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

$\operatorname{arcsin} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$+\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{R}$ )

Решите уравнения

137.— а)  $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$ ;

б)  $\sqrt{2} \cos x - 1 = 0$ ;

$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

а)  $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

б)  $\sqrt{2} \cos x - 1 = 0$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .



Решите уравнения

145.— а)  $2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ ;

а)  $2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 4\pi n \\ x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 4\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 4\pi n \\ x = 4\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n; 4\pi n; n \in \mathbb{Z}$ .

Решите уравнения

145.— б)  $2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2};$

$$\text{б) } 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ 3x - \frac{\pi}{4} = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{cases} 3x = 2\pi n, \\ 3x = \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi n}{3}, \\ 3x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Иногда удобно решения уравнения  $\sin x = a$  записывать не одной, а двумя формулами:

$$\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi n}{3}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Ответ:  $\frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}; n \in \mathbb{Z}.$

149. — Решите уравнения  $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}$ ,  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

и найдите для каждого из них:

а) наименьший положительный корень;

б) корни, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ ;

в) наибольший отрицательный корень;

г) корни, принадлежащие промежутку  $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$ .

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} -2x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

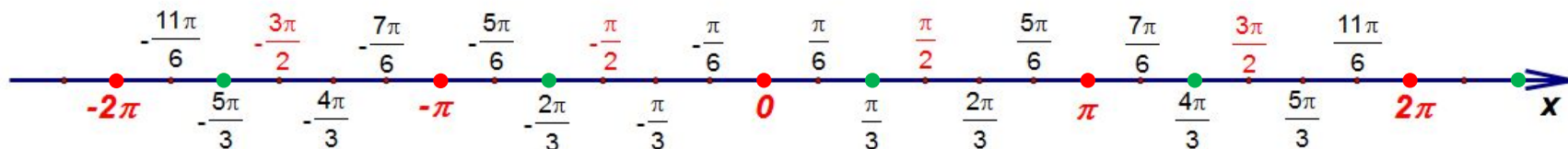
$$\frac{\pi}{3} - 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \bullet \\ x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \bullet \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{3} - 2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{3} - 2x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

а)  $x = \frac{\pi}{3}$ ; б)  $0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{4\pi}{3}$ ; в)  $-\frac{2\pi}{3}$ ; г)  $-\frac{2\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}$ .





149. — Решите уравнения  $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}$ ,  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

и найдите для каждого из них:

а) наименьший положительный корень;

б) корни, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]; \left[-\frac{4\pi}{8}; \frac{6\pi}{8}\right]$

в) наибольший отрицательный корень;

г) корни, принадлежащие промежутку  $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(-\frac{8\pi}{8}; \frac{4\pi}{8}\right)$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$n = 0 \quad x = -\frac{3\pi}{8}$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$n = 1$$

$2\pi$

$$2x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$n = 2$$

$$x = -\frac{3\pi}{8} + 2\pi = \frac{13\pi}{8}$$

$$x = -\frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$n = -1$$

$2\pi$

а)  $\frac{5\pi}{8}$ ; б)  $-\frac{3\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}$ ; в)  $-\frac{3\pi}{8}$ ; г)  $-\frac{3\pi}{8}$ .

