

Действительный анализ

*Основной источник : Смагин В.В.
Действительный анализ. Учебное пособие.
2014 год.*

(см. https://vk.com/fd_an)

Дополнительная литература

- 1. Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная, 1967 г.*
- 2. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, 1979 г.*
- 3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 1976 г.*

(см. https://vk.com/fd_an и https://vk.com/func_an)

Глава 2.

Измеримые множества

12. Основные определения и свойства измеримых множеств

Множество $A \subset [a, b]$ называется *измеримым*, если измерима (следовательно, суммируема) характеристическая функция этого множества

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \in [a, b] \setminus A. \end{cases}$$

При этом число $I\chi_A = \mu A$ называется *мерой множества* A .

ПРИМЕРЫ

1. $A = [a, b] \Rightarrow \chi_A(t) \equiv 1 \Rightarrow \mu A = I\chi_A = b - a$.
2. A – ММН на $[a, b]$. Тогда $\chi_A(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0$. Следовательно, $\chi_A(t)$ суммируема на $[a, b]$ и $\mu A = I\chi_A = 0$.

Верно и обратное: если $\mu A = 0$, то A – ММН (доказать самостоятельно).

3. A — множество полной меры отрезка $[a, b]$.

Тогда $\chi_A(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 1$. Следовательно, $\chi_A(t)$ суммируема на $[a, b]$ и $\mu A = I\chi_A = b - a = \mu[a, b]$.

4. Очевидно, что всякий промежуток $\langle \alpha, \beta \rangle \subset [a, b]$ является измеримым множеством и его мера равна его длине, то есть $\mu \langle \alpha, \beta \rangle = \beta - \alpha$.

ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ИЗМЕРИМЫХ НА $[a, b]$
МНОЖЕСТВ A И B .

1. Если $A \subset B$, то $\mu A \leq \mu B$.

Доказательство. В этом случае верно неравенство $\chi_A(t) \leq \chi_B(t)$ (см. таблицу). По свойству интеграла имеем: $\mu A = I\chi_A \leq I\chi_B = \mu B$.

2. Если $A \cap B = \emptyset$, то множество $A \cup B$ измеримо и $\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B$.

Доказательство следует из равенства $\chi_{A \cup B}(t) = \chi_A(t) + \chi_B(t)$ (см. таблицу) и соответствующего свойства интеграла:

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= I\chi_{A \cup B} = I(\chi_A + \chi_B) = I\chi_A + I\chi_B = \\ &= \mu A + \mu B. \end{aligned}$$

	$t \in A \setminus B$	$t \in B \setminus A$	$t \in A \cap B$	$t \notin A \cup B$
$\chi_A(t)$	1	0	1	0
$\chi_B(t)$	0	1	1	0
$\chi_{A \setminus B}(t)$	1	0	0	0
$\chi_{A \cap B}(t)$	0	0	1	0
$\chi_{A \cup B}(t)$	1	1	1	0

3. Если $B \subset A$, то множество $A \setminus B$ измеримо и $\mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B$.

Доказательство следует из равенства $\chi_{A \setminus B}(t) = \chi_A(t) - \chi_B(t)$.

4. Множество $A \cup B$ измеримо и $\mu(A \cup B) \leq \mu A + \mu B$.

Доказательство следует из равенства $\chi_{A \cup B}(t) = \max\{\chi_A(t), \chi_B(t)\}$ и оценки $\max\{\chi_A(t), \chi_B(t)\} \leq \chi_A(t) + \chi_B(t)$.

5. Множество $A \cap B$ измеримо.

Доказательство следует из равенства $\chi_{A \cap B}(t) = \min\{\chi_A(t), \chi_B(t)\}$.

6. Множество $A \setminus B$ измеримо.

Доказательство следует из равенства $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность измеримых множеств, таких, что $A_n \subset [a, b]$ и $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$. Тогда множество $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ измеримо и $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$.

Доказательство. Пусть $x_n(t) = \chi_{A_n}(t)$. Последовательность $x_n(t) = \chi_{A_n}(t)$ при всех $t \in [a, b]$ возрастает и ограничена сверху единицей, следовательно, при всех $t \in [a, b]$ существует конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$ и на $[a, b]$ определена функция

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t).$$

Покажем, что $x(t) = \chi_A(t)$:

Покажем, что $x(t) = \chi_A(t)$:

$$\begin{aligned}x(t) = 1 &\Leftrightarrow (\exists n_0 : \forall n \geq n_0)[x_n(t) = 1] \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (\exists n_0 : \forall n \geq n_0)[t \in A_n] \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow t \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \Leftrightarrow \chi_A(t) = 1.\end{aligned}$$

Итак, $x(t) = \chi_A(t)$ (с учетом того, что эти функции могут принимать только два значения, 1 и 0).

Выполнены все три условия теоремы Лебега о предельном переходе. Следовательно, $x \in L$ и $Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Ix_n$, то есть множество $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ измеримо и

$$\mu A = I\chi_A = Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Ix_n = \lim_{n \rightarrow \infty} I\chi_{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность измеримых множеств, таких, что $A_n \subset [a, b]$ и $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$. Тогда множество $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ измеримо и $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$.

Доказательство. Обозначим множество $[a, b] \setminus A = CA$ (дополнение множества A до отрезка $[a, b]$). Пусть $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ и рассмотрим множество

$$CA = C \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} CA_n.$$

Множества CA_n измеримы и $CA_1 \subset CA_2 \subset \dots \subset CA_n \subset \dots$. Следовательно, по теореме 10, множество CA измеримо и

$$\mu(CA) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(CA_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu([a, b] \setminus A_n) = (b-a) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n.$$

Но тогда измеримо и множество $A = C(CA) = [a, b] \setminus CA$, причем $\mu(CA) = (b-a) - \mu A$. Следовательно, $\mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$.

Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность измеримых множеств, таких, что $A_n \subset [a, b]$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$). Тогда множество $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ измеримо и $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$.

Доказательство. Для $n \in \mathbb{N}$ определим измеримые множества $D_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$:
 $D_1 = A_1, D_2 = D_1 \cup A_2, D_3 = D_2 \cup A_3, D_4 = D_3 \cup A_4, \dots$

Заметим, что $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots$

Тогда по теореме 10 множество $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ измеримо и $\mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu D_n$.

По свойству 2 $\mu D_n = \sum_{k=1}^n \mu A_k$.

Следовательно,

$$\mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu A_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k.$$

Теорема доказана.

Установленное в теореме 11 свойство называют *счетной аддитивностью меры*.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $\{A_n\}$ – последовательность измеримых множеств, $A_n \subset [a, b]$. Тогда множество $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ измеримо и $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$.

Доказательство. Для $n \in \mathbb{N}$ определим измеримые множества $D_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$:
 $D_1 = A_1, D_2 = D_1 \cup A_2, D_3 = D_2 \cup A_3, D_4 = D_3 \cup A_4, \dots$

Заметим, что $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots$

Тогда по теореме 10 множество $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ измеримо и $\mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu D_n$.
По свойству 4 $\mu D_n \leq \sum_{k=1}^n \mu A_k$.

Следовательно,

$$\mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu D_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu A_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность измеримых множеств, $A_n \subset [a, b]$. Тогда множество $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ измеримо.

Доказательство. Обозначим множество $[a, b] \setminus A = CA$ (дополнение множества A до отрезка $[a, b]$). В таком случае, множество

$$CA = C \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} CA_n$$

измеримо. Но тогда измеримо и множество $A = C(CA) = [a, b] \setminus CA$.

Следствие доказано.

Примеры

1. Всякое ограниченное открытое множество на прямой измеримо и его мера равна сумме длин составляющих это множество интервалов.

Всякое ограниченное открытое множество U на прямой представляет собой объединение конечного либо счетного числа попарно не пересекающихся интервалов:

$$U = \bigcup_i \Delta_i,$$

где $\Delta_i = (\alpha_i, \beta_i)$ и $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

По теореме о счетной аддитивности меры множество U счетно и $\mu U = \sum_i \mu \Delta_i = \sum_i |\Delta_i| = \sum_i (\beta_i - \alpha_i)$.

2. Всякое ограниченное замкнутое множество на прямой измеримо, так как оно является дополнением некоторого открытого множества до интервала, содержащего исходное замкнутое множество.

Пусть замкнутое множество $F \subset (a, b)$. Тогда множество $U = (a, b) \setminus F$ является открытым. Следовательно, множество $F = (a, b) \setminus U$ измеримо как разность измеримых множеств (a, b) и U .

3. Всякое ограниченное множество на прямой, которое получается из открытых и замкнутых множеств путем применения конечного либо счетного числа операций объединения и пересечения, а также операции дополнения (разности), является измеримым.

14. Множества, измеримые по Лебегу

1. Мера открытого множества

Дадим независимое определение меры для ограниченно-открытого множества на прямой.

Всякое ограниченное открытое множество U на прямой представляет собой объединение конечного либо счетного числа попарно не пересекающихся интервалов: $U = \bigcup_i \Delta_i$, где $\Delta_i = (\alpha_i, \beta_i)$ и $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Тогда меру множества U определим следующим образом:

$$\mu U := \sum_i |\Delta_i| = \sum_i (\beta_i - \alpha_i).$$

Так определенная мера совпадает со значением меры открытого множества, полученным выше (в примере).

2. Внешняя мера множества

Пусть дано произвольное множество $A \subset [a, b]$ и открытое множество $U \supset A$. Определим число

$$\mu^* A = \inf_{U \supset A} \mu U,$$

которое называется *внешней мерой* множества A .

Обратим внимание, что здесь понятие внешней меры множества дается без привлечения понятия интеграла.

ТЕОРЕМА 14. *Если множество A измеримо, то*
 $\mu^* A = \mu A$.

(Без доказательства)

3. Множества, измеримые по Лебегу

Анри Лебег определял меру независимо от понятия интеграла.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗМЕРИМОГО МНОЖЕСТВА (по Лебегу).

Множество $A \subset [a, b]$ называется *измеримым*, если $\mu^* A + \mu^* CA = b - a$ ($CA = [a, b] \setminus A$).

Можно доказать, что это определение и определение измеримого множества из пар. 12 эквивалентны.

Далее множества, измеримые в первоначальном определении или в равносильном определении А. Лебега, будем называть просто *измеримыми* множествами.

15. Функции, измеримые по Лебегу

Определив измеримые множества, а затем установив свойства измеримых множеств, А. Лебег дает определение измеримой функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗМЕРИМОЙ ФУНКЦИИ (по Лебегу).

Функция $x(t)$, определенная и конечная п.в. на $[a, b]$ называется *измеримой по Лебегу*, если для любого $c \in \mathbb{R}^1$ множество $\{t \in [a, b] \mid x(t) \leq c\}$ измеримо.

Измеримые функции, определенные в пар. 2, будем называть *измеримыми по Риссу*.

ТЕОРЕМА 16. Множество функций, измеримых по Лебегу, совпадает с множеством функций, измеримых по Риссу.

(Без доказательства)

Далее функции, измеримые по Лебегу или в равносильном определении измеримые по Риссу, будем называть просто *измеримыми* функциями.

17. Интегрирование по измеримому множеству

Пусть $E \subset [a, b]$ – измеримое множество и $\chi_E(t)$ – характеристическая функция этого множества. Определенная на E функция $x(t)$ называется *суммируемой на E* , если на $[a, b]$ суммируема функция

$$\chi_E(t) x(t) := \begin{cases} x(t), & t \in E \\ 0, & t \in [a, b] \setminus E. \end{cases}$$

Множество всех функций, суммируемых на E , будем обозначать $L(E)$. Для функции $x \in L(E)$ определим интеграл по множеству E :

$$I_E x = \int_E x(t) dt := (L) \int_a^b \chi_E(t) x(t) dt = (L)I(\chi_E x).$$

Этот интеграл по измеримому множеству, как нетрудно доказать, обладает всеми обычными свойствами интеграла по отрезку, включая теоремы о предельном переходе под знаком интеграла.

Далее рассмотрим некоторые специфические свойства интеграла по измеримому множеству.

ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРИРОВАНИЯ.

1. Пусть множество $E \subset [a, b]$ и измеримо, а функция $x \in L[a, b]$. Тогда функция $x \in L(E)$.

Доказательство.

Функция $\chi_E(t) x(t)$ измерима как произведение измеримых функций. Кроме того, $|\chi_E(t) x(t)| \leq |x(t)|$ и $|x| \in L[a, b]$. По следствию 1 теоремы 8 (Лебега) функция $\chi_E(t) x(t)$ суммируема на $[a, b]$. Следовательно, $x \in L(E)$.

2. Пусть E и E_1 — измеримые на $[a, b]$ множества и $E_1 \subset E$. Пусть функция $x \in L(E)$. Тогда $x \in L(E_1)$.

Доказательство.

Заметим, что $\chi_{E_1}(t) x(t) = \chi_{E_1}(t) [\chi_E(t) x(t)]$. Здесь по условию функция $\chi_E(t) x(t)$ суммируема на $[a, b]$. Тогда по первому свойству $\chi_{E_1}(t) x(t)$ суммируема на $[a, b]$. Следовательно, $x \in L(E_1)$.

3. Пусть E_1 и E_2 – измеримые на $[a, b]$ множества такие, что $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, и $E = E_1 \cup E_2$. Пусть на E задана функция $x(t)$ такая, что $x \in L(E_1)$ и $x \in L(E_2)$. Тогда $x \in L(E)$ и $I_E x = I_{E_1} x + I_{E_2} x$.

Доказательство.

Характеристическая функция $\chi_E(t) = \chi_{E_1}(t) + \chi_{E_2}(t)$. Следовательно, функция $\chi_E(t) x(t) = \chi_{E_1}(t) x(t) + \chi_{E_2}(t) x(t)$ суммируема, то есть функция $x \in L(E)$. Кроме того, $I_E x = I(\chi_E x) = I(\chi_{E_1} x) + I(\chi_{E_2} x) = I_{E_1} x + I_{E_2} x$.