Действительный анализ

Основной источник : *Смагин В.В. Действительный анализ. Учебное пособие. 2014 год.*

(см. https://vk.com/fd_an)

Дополнительная литература

1. *Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная, 1967 г.*
2. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, 1979 г.*
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 1976 г.*

(см. https://vk.com/fd_an и https://vk.com/func_an)

Глава 2.
Измеримые множества

12. Основные определения и свойства измеримых множеств

Множество $A \subset [a, b]$ называется *измеримым*, если измерима (следовательно, суммируема) характеристическая функция этого множества

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \in [a, b] \backslash A \,. \end{cases}$$

При этом число $I\chi_A = \mu A$ называется *мерой множества* A.

ПРИМЕРЫ

1. $A = [a, b] \Rightarrow \chi_A(t) \equiv 1 \Rightarrow \mu A = I\chi_A = b - a$.

2. A – ММН на $[a, b]$. Тогда $\chi_A(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$. Следовательно, $\chi_A(t)$ суммируема на $[a, b]$ и $\mu A = I\chi_A = 0$.

Верно и обратное: если $\mu A = 0$, то A – ММН (доказать самостоятельно).

3. A – множество полной меры отрезка $[a, b]$.

Тогда $\chi_A(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 1$. Следовательно, $\chi_A(t)$ суммируема на $[a, b]$ и $\mu A = I\chi_A = b - a = \mu[a, b]$.

4. Очевидно, что всякий промежуток $< \alpha, \beta > \subset [a, b]$ является измеримым множеством и его мера равна его длине, то есть $\mu < \alpha, \beta > = \beta - \alpha$.

Простейшие свойства измеримых на $[a, b]$ множеств A и B.

1. *Если* $A \subset B$, *то* $\mu A \leq \mu B$.

Доказательство. В этом случае верно неравенство $\chi_A(t) \leq \chi_B(t)$ (см. таблицу). По свойству интеграла имеем: $\mu A = I\chi_A \leq I\chi_B = \mu B$.

2. *Если* $A \cap B = \varnothing$, *то множество* $A \cup B$ *измеримо и* $\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B$.

Доказательство следует из равенства
$\chi_{A\cup B}(t) = \chi_A(t)+\chi_B(t)$ (см. таблицу) и соответствующего свойства интеграла:

$$\mu(A \cup B) = I\chi_{A\cup B} = I(\chi_A + \chi_B) = I\chi_A + I\chi_B =$$
$$= \mu A + \mu B.$$

	$t \in A \setminus B$	$t \in B \setminus A$	$t \in A \bigcap B$	$t \notin A \bigcup B$
$\chi_A(t)$	**1**	**0**	**1**	**0**
$\chi_B(t)$	**0**	**1**	**1**	**0**
$\chi_{A \setminus B}(t)$	**1**	**0**	**0**	**0**
$\chi_{A \bigcap B}(t)$	**0**	**0**	**1**	**0**
$\chi_{A \bigcup B}(t)$	**1**	**1**	**1**	**0**

3. *Если* $B \subset A$, *то множество* $A \backslash B$ *измеримо и* $\mu(A \backslash B) = \mu A - \mu B$.

Доказательство следует из равенства $\chi_{A \backslash B}(t) = \chi_A(t) - \chi_B(t)$.

4. *Множество* $A \cup B$ *измеримо и* $\mu(A \cup B) \leq \mu A + \mu B$.

Доказательство следует из равенства $\chi_{A \cup B}(t) = \max\{\chi_A(t), \chi_B(t)\}$ и оценки $\max\{\chi_A(t), \chi_B(t)\} \leq \chi_A(t) + \chi_B(t)$.

5. *Множество* $A \cap B$ *измеримо.*

Доказательство следует из равенства $\chi_{A \cap B}(t) = \min\{\chi_A(t), \chi_B(t)\}$.

6. *Множество* $A \backslash B$ *измеримо.*

Доказательство следует из равенства $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$.

Теорема 10. *Пусть* $\{A_n\}$ – *последовательность измеримых множеств, таких, что* $A_n \subset [a,b]$ *и* $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$. *Тогда множество* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *измеримо и* $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu A_n$.

Доказательство. Пусть $x_n(t) = \chi_{A_n}(t)$. Последовательность $x_n(t) = \chi_{A_n}(t)$ при всех $t \in [a,b]$ возрастает и ограничена сверху единицей, следовательно, при всех $t \in [a,b]$ существует конечный $\lim_{n\to\infty} x_n(t)$ и на $[a,b]$ определена функция

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t).$$

Покажем, что $x(t) = \chi_A(t)$:

Покажем, что $x(t) = \chi_A(t)$:

$$x(t) = 1 \Leftrightarrow (\exists n_0 : \forall n \geq n_0)[x_n(t) = 1] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exists n_0 : \forall n \geq n_0)[t \in A_n] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \Leftrightarrow \chi_A(t) = 1.$$

Итак, $x(t) = \chi_A(t)$ (с учетом того, что эти функции могут принимать только два значения, 1 и 0).

Выполнены все три условия теоремы Лебега о предельном переходе. Следовательно, $x \in L$ и $Ix = \lim_{n\to\infty} Ix_n$, то есть множество $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ измеримо и

$$\mu A = I\chi_A = Ix = \lim_{n\to\infty} Ix_n = \lim_{n\to\infty} I\chi_{A_n} = \lim_{n\to\infty} \mu A_n.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $\{A_n\}$ – *последовательность измеримых множеств, таких, что* $A_n \subset [a, b]$ *и* $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$. *Тогда множество* $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *измеримо и* $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu A_n$.

Доказательство. Обозначим множество $[a, b] \backslash A = CA$ (дополнение множества A до отрезка $[a, b]$). Пусть $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ и рассмотрим множество

$$CA = C \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} CA_n.$$

Множества CA_n измеримы и
$CA_1 \subset CA_2 \subset ... \subset CA_n \subset ...$. Следовательно, по теореме 10, множество CA измеримо и

$$\mu(CA) = \lim_{n\to\infty} \mu(CA_n) = \lim_{n\to\infty} \mu([a,b]\backslash A_n) = (b-a) - \lim_{n\to\infty} \mu A_n.$$

Но тогда измеримо и множество $A = C(CA) = [a,b]\backslash CA$, причем $\mu(CA) = (b-a) - \mu A$. Следовательно, $\mu A = \lim_{n\to\infty} \mu A_n$.

Следствие доказано.

Теорема 11. *Пусть* $\{A_n\}$ – *последовательность измеримых множеств, таких, что* $A_n \subset [a,b]$ *и* $A_i \cap A_j = \varnothing \, (i \neq j)$. *Тогда множество* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *измеримо и* $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$.

Доказательство. Для $n \in \mathbb{N}$ определим измеримые множества $D_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$:
$D_1 = A_1,\ D_2 = D_1 \bigcup A_2,\ D_3 = D_2 \bigcup A_3,\ D_4 = D_3 \bigcup A_4,\ \ldots$.

Заметим, что $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots$.

Тогда по теореме 10 множество $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ измеримо и $\mu A = \lim_{n\to\infty} \mu D_n$.

По свойству 2 $\mu D_n = \sum_{k=1}^{n} \mu A_n$.

Следовательно,

$$\mu A = \lim_{n\to\infty} \mu D_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu A_n = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_n.$$

Теорема доказана.

Установленное в теореме 11 свойство называют *счетной аддитивностью меры.*

Теорема 12. *Пусть* $\{A_n\}$ – *последовательность измеримых множеств,* $A_n \subset [a,b]$. *Тогда множество* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *измеримо и* $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$.

Доказательство. Для $n \in \mathbb{N}$ определим измеримые множества $D_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$:
$D_1 = A_1,\ D_2 = D_1 \bigcup A_2,\ D_3 = D_2 \bigcup A_3,\ D_4 = D_3 \bigcup A_4,\ \dots$.

Заметим, что $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots$.

Тогда по теореме 10 множество
$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ измеримо и $\mu A = \lim_{n\to\infty} \mu D_n$.

По свойству 4 $\mu D_n \leq \sum_{k=1}^{n} \mu A_n$.

Следовательно,

$$\mu A = \lim_{n\to\infty} \mu D_n \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu A_n = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_n.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $\{A_n\}$ *– последовательность измеримых множеств,* $A_n \subset [a,b]$. *Тогда множество* $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *измеримо.*

Доказательство. Обозначим множество $[a,b] \backslash A = CA$ (дополнение множества A до отрезка $[a,b]$). В таком случае, множество

$$CA = C\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} CA_n$$

измеримо. Но тогда измеримо и множество $A = C(CA) = [a,b] \backslash CA$.

Следствие доказано.

Примеры

1. Всякое ограниченное открытое множество на прямой измеримо и его мера равна сумме длин составляющих это множество интервалов.

Всякое ограниченное открытое множество U на прямой представляет собой объединение конечного либо счетного числа попарно не пересекающихся интервалов:

$$U = \bigcup_i \Delta_i,$$

где $\Delta_i = (\alpha_i, \beta_i)$ и $\Delta_i \bigcap \Delta_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

По теореме о счетной аддитивности меры множество U счетно и $\mu U = \sum_i \mu\Delta_i = \sum_i |\Delta_i| = \sum_i (\beta_i - \alpha_i)$.

2. Всякое ограниченное замкнутое множество на прямой измеримо, так как оно является дополнением некоторого открытого множества до интервала, содержащего исходное замкнутое множество.

Пусть замкнутое множество $F \subset (a, b)$. Тогда множество $U = (a, b) \backslash F$ является открытым. Следовательно, множество $F = (a, b) \backslash U$ измеримо как разность измеримых множеств (a, b) и U.

3. Всякое ограниченное множество на прямой, которое получается из открытых и замкнутых множеств путем применения конечного либо счетного числа операций объединения и пересечения, а также операции дополнения (разности), является измеримым.

14. Множества, измеримые по Лебегу

1. Мера открытого множества

Дадим независимое определение меры для ограниченного открытого множества на прямой.

Всякое ограниченное открытое множество U на прямой представляет собой объединение конечного либо счетного числа попарно не пересекающихся интервалов: $U = \bigcup_i \triangle_i$, где $\triangle_i = (\alpha_i, \beta_i)$ и $\triangle_i \bigcap \triangle_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Тогда меру множества U определим следующим образом:

$$\mu U := \sum_i |\triangle_i| = \sum_i (\beta_i - \alpha_i).$$

Так определенная мера совпадает со значением меры открытого множества, полученным выше (в примере).

2. Внешняя мера множества

Пусть дано произвольное множество $A \subset [a, b]$ и открытое множество $U \supset A$. Определим число

$$\mu^* A = \inf_{U \supset A} \mu U \,,$$

которое называется *внешней мерой* множества A.

Обратим внимание, что здесь понятие внешней меры множества дается без привлечения понятия интеграла.

Теорема 14. *Если множество A измеримо, то* $\mu^* A = \mu A$.

(*Без доказательства*)

3. Множества, измеримые по Лебегу

Анри Лебег определял меру независимо от понятия интеграла.

Определение измеримого множества (по Лебегу).

Множество $A \subset [a, b]$ называется *измеримым*, если $\mu^* A + \mu^* CA = b - a \quad (CA = [a, b] \backslash A)$.

Можно доказать, что это определение и определение измеримого множества из пар. 12 эквивалентны.

Далее множества, измеримые в первоначальном определении или в равносильном определении А. Лебега, будем называть просто *измеримыми* множествами.

15. Функции, измеримые по Лебегу

Определив измеримые множества, а затем установив свойства измеримых множеств, А. Лебег дает определение измеримой функции.

Определение измеримой функции (по Лебегу). Функция $x(t)$, определенная и конечная п.в. на $[a, b]$ называется *измеримой по Лебегу*, если для любого $c \in \mathbb{R}^1$ множество $\{t \in [a, b] \,|\, x(t) \leq c\}$ измеримо.

Измеримые функции, определенные в пар. 2, будем называть *измеримыми по Риссу*.

Теорема 16. *Множество функций, измеримых по Лебегу, совпадает с множеством функций, измеримых по Риссу.*

(*Без доказательства*)

Далее функции, измеримые по Лебегу или в равносильном определении измеримые по Риссу, будем называть просто *измеримыми* функциями.

17. Интегрирование по измеримому множеству

Пусть $E \subset [a,b]$ – измеримое множество и $\chi_E(t)$ – характеристическая функция этого множества. Определенная на E функция $x(t)$ называется *суммируемой на* E, если на $[a,b]$ суммируема функция

$$\chi_E(t)\,x(t) := \begin{cases} x(t), & t \in E \\ 0, & t \in [a,b]\setminus E\,. \end{cases}$$

Множество всех функций, суммируемых на E, будем обозначать $L(E)$. Для функции $x \in L(E)$ определим интеграл по множеству E:

$$I_E\,x = \int_E x(t)\,dt := (L)\int_a^b \chi_E(t)\,x(t)\,dt = (L)I(\chi_E\,x).$$

Этот интеграл по измеримому множеству, как нетрудно доказать, обладает всеми обычными свойствами интеграла по отрезку, включая теоремы о предельном переходе под знаком интеграла.

Далее рассмотрим некоторые специфические свойства интеграла по измеримому множеству.

Простейшие свойства интегрирования.

1. *Пусть множество* $E \subset [a,b]$ *и измеримо, а функция* $x \in L[a,b]$. *Тогда функция* $x \in L(E)$.

Доказательство.

Функция $\chi_E(t)\,x(t)$ измерима как произведение измеримых функций. Кроме того, $|\chi_E(t)\,x(t)| \le |x(t)|$ и $|x| \in L[a,b]$. По следствию 1 теоремы 8 (Лебега) функция $\chi_E(t)\,x(t)$ суммируема на $[a,b]$. Следовательно, $x \in L(E)$.

2. *Пусть* E *и* E_1 – *измеримые на* $[a,b]$ *множества и* $E_1 \subset E$. *Пусть функция* $x \in L(E)$. *Тогда* $x \in L(E_1)$.

Доказательство.

Заметим, что $\chi_{E_1}(t)\,x(t) = \chi_{E_1}(t)\,[\chi_E(t)\,x(t)]$. Здесь по условию функция $\chi_E(t)\,x(t)$ суммируема на $[a,b]$. Тогда по первому свойству $\chi_{E_1}(t)\,x(t)$ суммируема на $[a,b]$. Следовательно, $x \in L(E_1)$.

3. *Пусть* E_1 *и* E_2 – *измеримые на* $[a,b]$ *множества такие, что* $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, *и* $E = E_1 \cup E_2$. *Пусть на* E *задана функция* $x(t)$ *такая, что* $x \in L(E_1)$ *и* $x \in L(E_2)$. *Тогда* $x \in L(E)$ *и* $I_E\, x = I_{E_1}\, x + I_{E_2}\, x$.

Доказательство.

Характеристическая функция $\chi_E(t) = \chi_{E_1}(t) + \chi_{E_2}(t)$. Следовательно, функция $\chi_E(t)\, x(t) = \chi_{E_1}(t)\, x(t) + \chi_{E_2}(t)\, x(t)$ суммируема, то есть функция $x \in L(E)$. Кроме того, $I_E\, x = I(\chi_E\, x) = I(\chi_{E_1}\, x) + I(\chi_{E_2}\, x) = I_{E_1}\, x + I_{E_2}\, x$.