Матрицы и определители

Определение матрицы. Виды матриц

- **Матрицей размера m×n** называется прямоугольная таблица чисел, содержащая *m* строк и *n* столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы

Каждый элемент матрицы имеет два индекса: *m* – номер строки и *n* – номер столбца. Например, в матрице

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -7 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 8 & 1 \\ -3 & -4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

размера 3×4, $a_{11}=5$, $a_{23}=8$, $a_{34}=6$.

Часто используется краткая запись матрицы:

$$A=(a_{ik})_{m,n}$$

Основные определения

Матрица называется **квадратной** n-го порядка, если она состоит из n строк и n столбцов.

Матрица размера $1\times n$ называется **матрицей-строкой**, а матрица размера $m\times 1$ **матрицей-столбцом.**

Нулевой матрицей 0 заданного размера называется матрица, все элементы которой равны 0.

Определение единичной матрицы

Единичной называется квадратная матрица, элементы главной диагонали которой равны 1, а все остальные элементы равны 0:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Определение транспонированной матрицы

Транспонированной матрицей для матрицы A называется матрица A^T, строки которой являются столбцами матрицы , а столбцы – строками . Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$, то $$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -9 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Матрицы $A = (a_{ik})_{m,n}$ и $B = (b_{ik})_{m,n}$ называются **равными**, если $a_{ik} = b_{ik}$, $i = 1,\ldots,m$, $k = 1,\ldots,n$.

Линейные операции над матрицами

Суммой матриц $A=(a_{ik})_{m,n}$ и $B=(b_{ik})_{m,n}$ называется матрица $A+B=(a_{ik}+b_{ik})_{m,n}$.

Складываются матрицы только одинакового размера.

~~Например~~.

Найти сумму и разность матриц А и В:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\ 1 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 2 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}2 & 5 & -3\\ 0 & -5 & 2\end{pmatrix}$$

Произведение матрицы на число

Произведением матрицы *A* на число λ называется матрица $\lambda A = (\lambda a_{ik})_{m,n}$.

Другими словами, для умножения матрицы на число надо каждый элемент матрицы умножить на это число.

Любую матрицу можно умножить на любое число.

~~**Например:**~~

Умножая матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

на число 2, получим:

$$A \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 3 \cdot 2 & 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 & 0 \cdot 2 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}}$$

Для любых матриц одинакового размера и любых чисел выполняются следующие свойства:

1 $A + B = B + A$

2 $A + 0 = A$

3 $A + (B + C) = (A + B) + C$

4 $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu) A$

5 $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

6 $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$

Умножение матриц

Произведением матрицы $A=(a_{ik})_{m,p}$ **на матрицу** $B=(b_{ik})_{p,n}$ называется матрица С размера $m\times n$ с элементами $c_{ik}=\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\cdot b_{jk}$,

$i=1,2,\ldots,m$, $k=1,2,\ldots,n$.

Другими словами, для получения элемента, стоящего в i-той строке матрицы-произведения на k-том месте, следует вычислить сумму произведений элементов i-той строки матрицы А на k-тый столбец матрицы В.

Замечание к определению

В самом определении произведения матриц заложено, что число столбцов первой матрицы должно совпадать с числом строк второй.

Это условие согласования матриц при умножении.

Если оно нарушено, то матрицы перемножить нельзя.

Заметим, что вполне возможна ситуация, когда $A \cdot B$ существует, а $B \cdot A$ нет.

Ряд свойств операции умножения матриц

Если A, B и C - квадратные матрицы одного порядка, то справедливы равенства:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
4. $A \cdot E = E \cdot A = A$

Например,

Найти произведение матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Число столбцов первой матрицы равно числу строк второй, следовательно их произведение существует:

$$\underset{2\times 3}{A}\cdot \underset{3\times 2}{B} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 1+0\cdot 0 & 2\cdot 0+3\cdot 4+0\cdot 2 \\ 1\cdot 1+0\cdot 1+4\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot 4+4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Определители второго и третьего порядков. Их свойства

Понятие определителя вводится только для квадратных матриц. Рассмотрим квадратную матрицу 2^го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Определителем 2^го порядка матрицы называется число:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Основные определения определителей

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матрица 3$^{\underline{го}}$ порядка.

Минором элемента a_{ik} называется определитель M_{ik}, составленный из элементов, оставшихся после вычеркивания из матрицы i -той строки и k-того столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} называется число

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik} \quad .$$

Определителем 3$^{\text{го}}$ порядка (матрицы) называется сумма произведений элементов первой строки матрицы на их алгебраические дополнения.

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

Примеры вычисления определителей

Пример. Вычислим определители матриц $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot 1-5\cdot 6=-28.$$

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot 1\cdot 1+2\cdot 2\cdot 0+5\cdot 3\cdot 0-0\cdot 1\cdot 0-5\cdot 2\cdot 1-3\cdot 2\cdot 1=-15.$$

Схемы вычисления определителей

Схема вычисления определителя второго порядка:

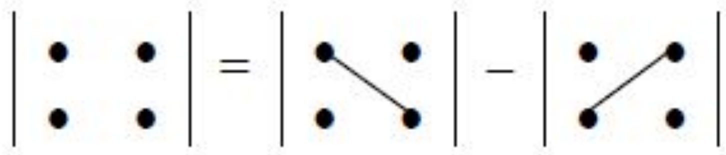
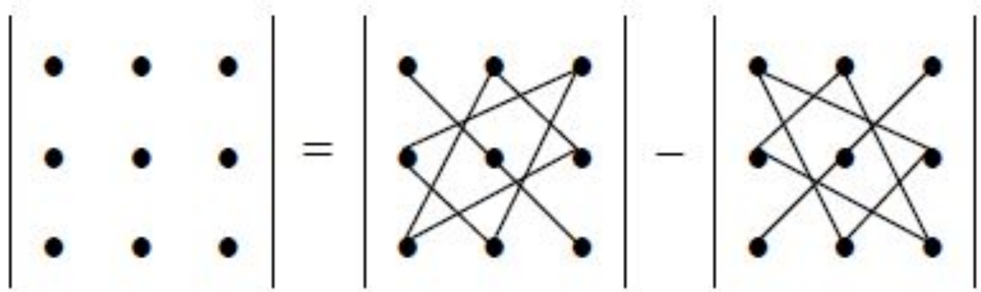


Схема вычисления определителя третьего порядка:



Свойства определителей:

1. Определитель не меняется при транспонировании.
2. Если все элементы какой-либо строки (или столбца) равны нулю, то определитель равен 0.
3. Если две строки (два столбца) поменять местами, то определитель меняет знак.
4. Если элементы какой-либо строки (столбца) содержат общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.
5. Если в определителе две строки (два столбца) одинаковы или пропорциональны, то определитель равен 0.

6. Справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

7. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо его строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.
8. Сумма произведений элементов **любой** строки (столбца) на свои алгебраические дополнения равна самому определителю.
9. Сумма произведений элементов **любой** строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения другой строки (столбца) равна 0.

Числовые примеры свойств 1 и 2:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -8 \\ 1 & 9 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot 104 + 5 \cdot 18 - 8 \cdot (-29) = 634;$$

$$|A^T| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -5 & 9 & 7 \\ -8 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot 104 - 1 \cdot 6 + 4 \cdot 82 = 634.$$

Числовые примеры свойства 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & -8 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 7 & -8 & 5 \end{vmatrix} = -\left(0\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} \right) = 0.$$

Числовые примеры свойств 4 и 5:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & -8 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 23 + 5\cdot 11 - 8\cdot(-5) = 164.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & -8 \end{vmatrix} = 4\cdot(-34) - 7\cdot(-2) + 3\cdot(-14) = -164.$$

Числовые примеры свойства 6:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-14) - 2\cdot 17 - 3\cdot(-16) = 0.$$

Числовые примеры свойства 7:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 21 & -42 & 63 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 21\cdot 1 & 21\cdot(-2) & 21\cdot 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 21\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 21\cdot\left(2\cdot(-8)+1\cdot(-11)+1\cdot 10\right) = -357.$$

Числовые примеры свойства 8:

$$\begin{vmatrix} 12 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7+5 & 3-2 & 5-3 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}.$$

Числовые примеры свойства 9 :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 8 & 11 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2\cdot 1+3\cdot 2 & 2\cdot(-2)+3\cdot 5 & 2\cdot 3+3\cdot(-4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot(-2) & 2\cdot 3 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 5 & 3\cdot(-4) \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot 0+3\cdot 0=0.$$

Обратная матрица

Матрица A^{-1} **называется обратной** к квадратной матрице A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица называется вырожденной, если $\Delta(A) = 0$; в противном случае A – **невырожденная матрица.**

Теорема. Для того, чтобы матрица имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, т.е. $\Delta(A) \neq 0$

Пример:

Найти обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$

Имеем:

$$a_{11}^* = (-1)^2 |A_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad a_{12}^* = (-1)^3 |A_{12}| = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4; \quad a_{13}^* = (-1)^4 |A_{13}| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 6;$$

$$a_{21}^* = (-1)^3 |A_{21}| = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -11; \quad a_{22}^* = (-1)^4 |A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5; \quad a_{23}^* = (-1)^5 |A_{23}| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 7;$$

$$a_{31}^* = (-1)^4 |A_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad a_{32}^* = (-1)^5 |A_{32}| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad a_{33}^* = (-1)^6 |A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

Таким образом:

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -11 & -5 & 7 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда $$\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} 3 & -11 & 2 \\ 4 & -5 & -7 \\ 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя определитель матрицы *A*, получаем $|A|=29$.

Теперь по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{29}\cdot\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{29} & -\frac{11}{29} & \frac{2}{29} \\ \frac{4}{29} & -\frac{5}{29} & -\frac{7}{29} \\ \frac{6}{29} & \frac{7}{29} & \frac{4}{29} \end{pmatrix}.$$

Теорема

Если A и B невырожденные квадратные матрицы одинакового порядка, то

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Выберем в матрице A произвольно k строк и k столбцов

$(k \le \min(m,n))$. Элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, составляют матрицу порядка k . Определитель этой матрицы называется минором k-го порядка.

Если все миноры k-го порядка равны нулю, то равны нулю и все миноры более высокого порядка.

Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы называется рангом этой матрицы (*rangA* или *r(A)*).

Метод вычисления ранга матрицы

1. При вычислении ранга матрицы нужно переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков;
2. Если уже найден минор k-го порядка d отличный от нуля, то требуют вычисления лишь миноры $k+1$-го порядка, окаймляющие минор d. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Теорема о ранге матрицы

Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк (столбцов) (*rangA* или *r(A)*).

Свойства ранга матрицы

1) Если матрица A имеет размеры $m \times n$, то

$$rangA \le \min(m, n);$$

2) $rangA = 0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы A равны нулю;

3) если матрица A - квадратная матрица порядка n, то $rangA = n$ тогда и только тогда, когда определитель матрицы $\Delta(A) \neq 0$.

Элементарные преобразования матрицы

1. Отбрасывание нулевой строки (столбца) матрицы
2. Умножение всех элементов строки(столбца) матрицы на число , неравное нулю.
3. Изменение порядка строк(столбцов)матрицы.
4. Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.
5. Транспонирование матрицы.

Замечания к преобразованиям

Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

С помощью элементарных преобразований матрицу можно привести к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0, i = 1,2,\dots,r; \quad r \leq k.$

Ранг ступенчатой матрицы равен r.

Домашнее задание

Даны матрицы А и В. Найти их сумму и разность

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \qquad\qquad \mathrm{A} - \mathrm{B} =$$

Дана матрица А.
Найти 2А (умножить матрицу А на 2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Даны 2 матрицы.
Найти их определители

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$