Лекция №7

Понятие предиката и кванторы. Логические операции над предикатами.

Цель

Изучить понятие предикатов

Задачи

- Логика предикатов.
- Связь предиката с булевыми функциями и высказываньями.
- Примеры.

Формальная система — это математическая модель, задающая множество дискретных объектов с помощью описания некоторых исходных объектов и правил построения новых объектов из исходных и уже построенных.

Разница

В высказывании все четко: это — конкретное утверждение о конкретных объектах — истинное или ложное. Предикат — предложение, похожее на высказывание, но все же им не являющееся: о нем нельзя судить, истинно оно или ложно.

Зачем нужно изучать язык логики предикатов

- Язык логики высказываний не вполне подходит для выражения логических рассуждений, проводимых людьми, более удобен для этого язык логики предикатов.

Понятие " предикат" обобщает понятие "высказывание". Неформально говоря, *предикат* – это высказывание, в которое можно подставлять аргументы. Если аргумент один – то предикат выражает свойство аргумента, если больше – то отношение между аргументами.

Определение

Предикатом называется повествовательное предложение, содержащее предметные переменные, определённые на соответствующих множествах; при замене переменных конкретными значениями (элементами) этих множеств предложение обращается в высказывание, т. е. принимает значение «истинно» или «ложно».

Определение

Предикатом называется функция $P : M^n \to B$, где $B = \{ 0,1 \}$, M - любое множество,

$$M^n = \underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{n \ \text{раз}},$$

т. е. функция P, сопоставляющая вектору $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ значения 0 или 1.

Определение

Определенным на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$ n-местным предикатом называется предложение, содержащее n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных любых конкретных элементов из множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$ соответственно.

Пример предикатов

"Сократ - человек", "Платон - человек".

Оба эти высказывания выражают свойство "быть человеком". Таким образом, мы можем рассматривать предикат "быть человеком" и говорить, что он выполняется

для Сократа и Платона.

Возьмём высказывание:

"расстояние от Иркутска до Москвы 5 тысяч километров". Вместо него мы можем записать предикат "расстояние" (означающий, что первый и второй аргумент этого предиката находятся на расстоянии, равном третьему аргументу) для аргументов "Иркутск", "Москва" и "5 тысяч километров".

Множество M называется *предметной областью предиката P* , x_1 , x_2 ,..., x_n - *предметные переменные*, P - предикатный символ, n - местность предиката, декартово произведение M × M × ... × M *область определения предиката P* . Обозначение: P (x_1 , x_2 ,..., x_n)- n - местный предикат, заданный на множестве M .

Областью истинности предиката *P* называется подмножество T_p (T, I_p)$\subseteq$ M^n его предметной области, на элементах которого значения предиката равны 1.

Классификация предикатов

- ***тождественно истинное***
- ***тождественно ложное***
- ***выполнимое (опровержимое)***

а) ***тождественно истинным***, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ любых конкретных предметов $a_1, a_2, ..., a_n$ из множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$ соответственно он превращается в истинное высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n)$;

б) ***тождественно ложным***, если при любой подстановке вместо переменных x_1 , x_2 ,..., x_n любых конкретных предметов из множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$ соответственно он превращается в ложное высказывание;

в) ***выполнимым (опровержимым)***, если существует по меньшей мере один набор конкретных предметов $a_1, a_2, ..., a_n$ из множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$ соответственно, при подстановке которых вместо соответствующих предметных переменных в предикат последний $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ превратится в истинное (ложное) высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Пример

Одноместный предикат *"Город* *X* *расположен на берегу реки Волги"*, определенный на множестве названий городов, является выполнимым, потому что существуют города, названия которых превращают данный предикат в истинное высказывание, или, иначе, удовлетворяют этому предикату (например, Ульяновск, Саратов и т. д.). Но данный предикат не будет тождественно истинным, потому что существуют города, названия которых превращают его в ложное высказывание, или, иначе, не удовлетворяют этому предикату (например, Прага, Якутск и т.д.).

Найти область истинности предиката

$P(X, Y) = ((X + Y)$ - нечётно $) \vee ((X - Y)$ делятся на 3$)$,

где $X = \{1;3;6;7\}$, $Y = \{2;4;5\}$.

Решение

Составим таблицы истинности для предикатов P_1 (X, Y) = ((X + Y) - нечётно), P_2(X, Y) = ((X - Y) - делятся на 3) , $P = P_1 \vee P_2$.

P_1	2	4	5		P_2	2	4	5		P	2	4	5
1	1	1	0		1	0	1	0		1	1	1	0
3	1	1	0		3	0	0	0		3	1	1	0
6	0	0	1		6	0	0	0		6	0	1	0
7	1	1	0		7	0	1	0		7	1	1	0

$I_P = I_{P_1 \vee P_2} = I_{P1} \cup I_{P2}$ = {(1,2), (1,4), (3,2), (3,4), (6,5), (7,2), (7,4)} ∪ {(1,4), (7,4)} = {(1,2), (1,4), (3,2), (3,4), (6,4), (7,2), (7,4)}.

Ответ: I_P = {(1,2), (1,4), (3,2), (3,4), (6,4), (7,2), (7,4)}.

Найти область истинности предиката

$P (X) = ((\text{ число 3 не делитель } x) \to (x \le 6))$ на множестве однозначных натуральных чисел.

Решение

Определим области истинности предикатов P_1 = {число 3 не не делитель x},

$P_2 = \{x \le 6\}$, $P = P_1 \to P_2$.

$I_{P1} = \{1,2,4,5,7,8\}$, $I_{P2} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $I_P =$

$I_{P1\to P2} = I_{P1} = \{1,2,3,4,5,6,9\}$.

<u>Ответ:</u> $I_P = \{1,2,3,4,5,6,9\}$.

Кванторы

- ∀ - квантор всеобщности;
- ∃- квантор существования.

- Если $P(x)$ - одноместный предикат, то запись $('' \forall x)P(x)$ означает, что свойство P выполняется для всех предметов из предметной области, а $(\exists x)P(x)$ означает, что существует по крайней мере один предмет, обладающий свойством P.

- Переход от $P(x)$ к $(\forall\ x)P(x)$ или к $(\exists\ x)P(x)$ называется связыванием переменной или навешиванием квантора на переменную x. Переменная, на которую навесили квантор, называется связанной, несвязанная переменная называется свободной.

Задание

Конспект «Логические операции над предикатами»