

Лекция №7

Понятие предиката и кванторы.
Логические операции над
предикатами.

Цель

Изучить понятие предикатов

Задачи

- Логика предикатов.
- Связь предиката с булевыми функциями и высказываниями.
- Примеры.

Формальная система — это математическая модель, задающая множество дискретных объектов с помощью описания некоторых исходных объектов и правил построения новых объектов из исходных и уже построенных.

Разница

В высказывании все четко: это — конкретное утверждение о конкретных объектах — истинное или ложное. Предикат — предложение, похожее на высказывание, но все же им не являющееся: о нем нельзя судить, истинно оно или ложно.

Зачем нужно изучать язык логики предикатов

- Язык логики высказываний не вполне подходит для выражения логических рассуждений, проводимых людьми, более удобен для этого язык логики предикатов.

Понятие " предикат" обобщает понятие "высказывание". Неформально говоря, *предикат* – это высказывание, в которое можно подставлять аргументы. Если аргумент один – то предикат выражает свойство аргумента, если больше – то отношение между аргументами.

Определение

Предикатом называется повествовательное предложение, содержащее предметные переменные, определённые на соответствующих множествах; при замене переменных конкретными значениями (элементами) этих множеств предложение обращается в высказывание, т. е. принимает значение «истинно» или «ложно».

Определение

Предикатом называется функция $P : M^n \rightarrow B$,
где $B = \{ 0, 1 \}$, M - любое множество,

$$M^n = \underbrace{M \times M \times \dots \times M}_{n \text{ раз}},$$

т. е. функция P , сопоставляющая вектору (x_1, x_2, \dots, x_n) значения 0 или 1.

Определение

Определенным на множествах M_1, M_2, \dots, M_n n -местным предикатом называется предложение, содержащее n переменных x_1, x_2, \dots, x_n , превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных любых конкретных элементов из множеств M_1, M_2, \dots, M_n соответственно.

Пример предикатов

"Сократ - человек", "Платон - человек".

Оба эти высказывания выражают свойство "быть человеком". Таким образом, мы можем рассматривать предикат "быть человеком" и говорить, что он выполняется для Сократа и Платона.

Возьмём высказывание:

"расстояние от Иркутска до Москвы 5 тысяч километров". Вместо него мы можем записать предикат "расстояние" (означающий, что первый и второй аргумент этого предиката находятся на расстоянии, равном третьему аргументу) для аргументов "Иркутск", "Москва" и "5 тысяч километров".

Множество M называется *предметной областью предиката* P , x_1, x_2, \dots, x_n - *предметные переменные*, P - *предикатный символ*, n - *местность предиката*, декартово произведение $M \times M \times \dots \times M$ *область определения предиката* P . Обозначение: $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - n - местный предикат, заданный на множестве M .

Областью истинности предиката

P называется подмножеством $T_p (T, I_p) \subseteq M^n$ его предметной области, на элементах которого значения предиката равны 1.

Классификация предикатов

- *тождественно истинное*
- *тождественно ложное*
- *выполнимое (опровержимое)*

а) *тождественно истинным*, если при любой подстановке вместо переменных x_1, x_2, \dots, x_n любых конкретных предметов a_1, a_2, \dots, a_n из множеств M_1, M_2, \dots, M_n соответственно он превращается в истинное высказывание $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$;

б) *тождественно ложным*, если при любой подстановке вместо переменных x_1, x_2, \dots, x_n любых конкретных предметов из множеств M_1, M_2, \dots, M_n соответственно он превращается в ложное высказывание;

в) *выполнимым (опровержимым)*, если существует по меньшей мере один набор конкретных предметов a_1, a_2, \dots, a_n из множеств M_1, M_2, \dots, M_n соответственно, при подстановке которых вместо соответствующих предметных переменных в предикат последний $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ превратится в истинное (ложное) высказывание $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Пример

Одноместный предикат "*Город X расположен на берегу реки Волги*", определенный на множестве названий городов, является выполнимым, потому что существуют города, названия которых превращают данный предикат в истинное высказывание, или, иначе, удовлетворяют этому предикату (например, Ульяновск, Саратов и т. д.). Но данный предикат не будет тождественно истинным, потому что существуют города, названия которых превращают его в ложное высказывание, или, иначе, не удовлетворяют этому предикату (например, Прага, Якутск и т.д.).

Найти область истинности
предиката

$$P(X, Y) = ((X + Y) - \text{нечётно}) \vee ((X - Y) \\ \text{делятся на } 3),$$

$$\text{где } X = \{1;3;6;7\}, Y = \{2;4;5\}.$$

Решение

Составим таблицы истинности для предикатов $P_1(X, Y) = ((X + Y) - \text{нечётно})$, $P_2(X, Y) = ((X - Y) - \text{делятся на } 3)$, $P = P_1 \vee P_2$.

P_1	2	4	5		P_2	2	4	5		P	2	4	5
1	1	1	0		1	0	1	0		1	1	1	0
3	1	1	0		3	0	0	0		3	1	1	0
6	0	0	1		6	0	0	0		6	0	1	0
7	1	1	0		7	0	1	0		7	1	1	0

$I_P = I_{P_1 \vee P_2} = I_{P_1} \cup I_{P_2} = \{(1,2), (1,4), (3,2), (3,4), (6,5), (7,2), (7,4)\} \cup \{(1,4), (7,4)\} = \{(1,2), (1,4), (3,2), (3,4), (6,4), (7,2), (7,4)\}$.

Ответ: $I_P = \{(1,2), (1,4), (3,2), (3,4), (6,4), (7,2), (7,4)\}$.

Найти область истинности предиката

$$P(X) = ((\text{число } 3 \text{ не делитель } x) \rightarrow (x \leq 6))$$

на множестве однозначных натуральных чисел.

Решение

Определим области истинности предикатов

$$P_1 = \{ \text{число } 3 \text{ не } \color{red}{\text{не}} \text{ делитель } x \},$$

$$P_2 = \{ x \leq 6 \}, P = P_1 \rightarrow P_2.$$

$$I_{P_1} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}, I_{P_2} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, I_P =$$

$$I_{P_1 \rightarrow P_2} = I_{P_1} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}.$$

Ответ: $I_P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}.$

Кванторы

- \forall - квантор всеобщности;
- \exists - квантор существования.

Если $P(x)$ - одноместный предикат, то запись $(\forall x)P(x)$ означает, что свойство P выполняется для всех предметов из предметной области, а $(\exists x)P(x)$ означает, что существует по крайней мере один предмет, обладающий свойством P .

• Переход от $P(x)$ к $(\forall x)P(x)$ или к $(\exists x)P(x)$ называется связыванием переменной или навешиванием квантора на переменную x . Переменная, на которую навесили квантор, называется связанной, несвязанная переменная называется свободной.

Задание

Конспект «Логические операции над предикатами»