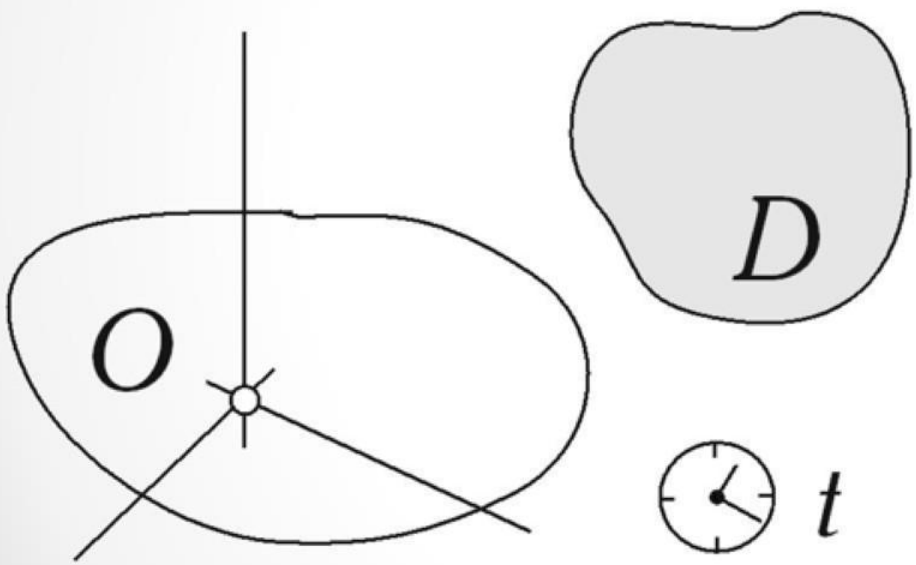
Лекция 5

Кинематика точки

Основные определения и понятия

Кинематика — раздел теоретической механики, изучающий геометрические свойства движения.



Закон движения — любые аналитические соотношения, позволяющие в любой момент однозначно определить положение движущегося тела.

Основные задачи кинематики

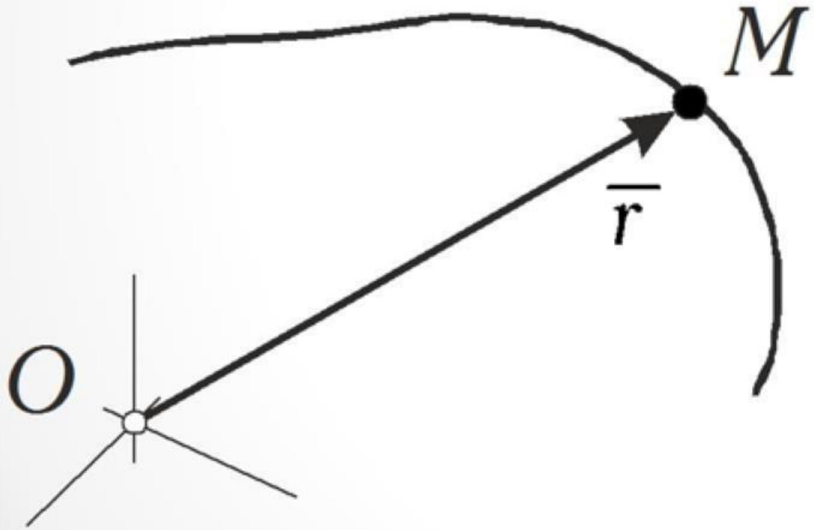
1. Определение законов движения тел — определение вида и состава уравнений, позволяющих однозначно определять заданное движение тела

2. По известным законам движения тела определение положений, скоростей и ускорений отдельных точек — прямая задача кинематики

3. Определение по известному движению отдельных точек тела параметров закона или уравнений движения тела — обратная задача кинематики

Способы задания движения точки

1. Векторный способ



Радиус-вектор $\overline{r}$ - известная, дважды дифференцируемая функция времени.

Закон движения при векторном способе задания

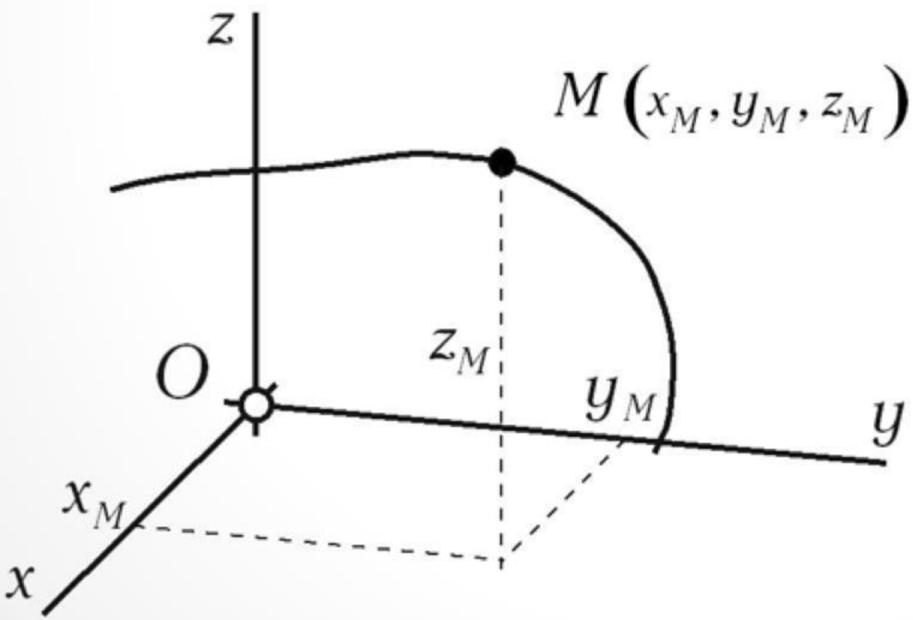
$$\overline{r} = \overline{r}\left(t\right)$$

Способы задания движения точки

2. Координатный способ

Положение точки в пространстве может быть задано набором трех любых независимых координат

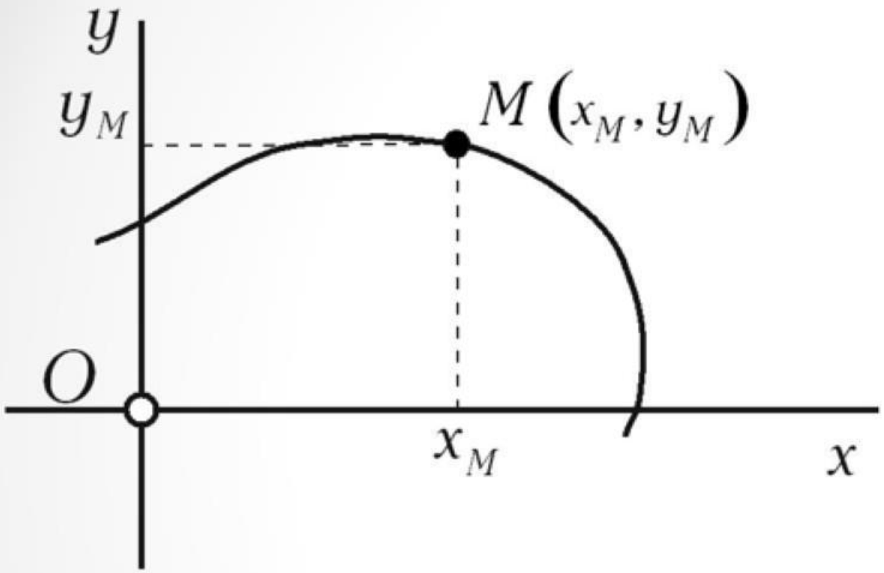
- Прямоугольные декартовы координаты

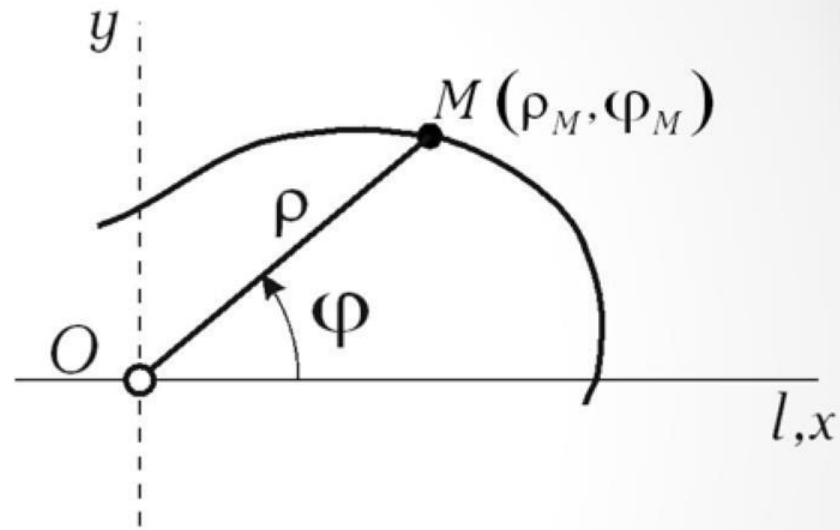


$$\begin{cases} x_M = x_M(t), \\ y_M = y_M(t), \\ z_M = z_M(t). \end{cases}$$

Способы задания движения точки

Движение в плоскости





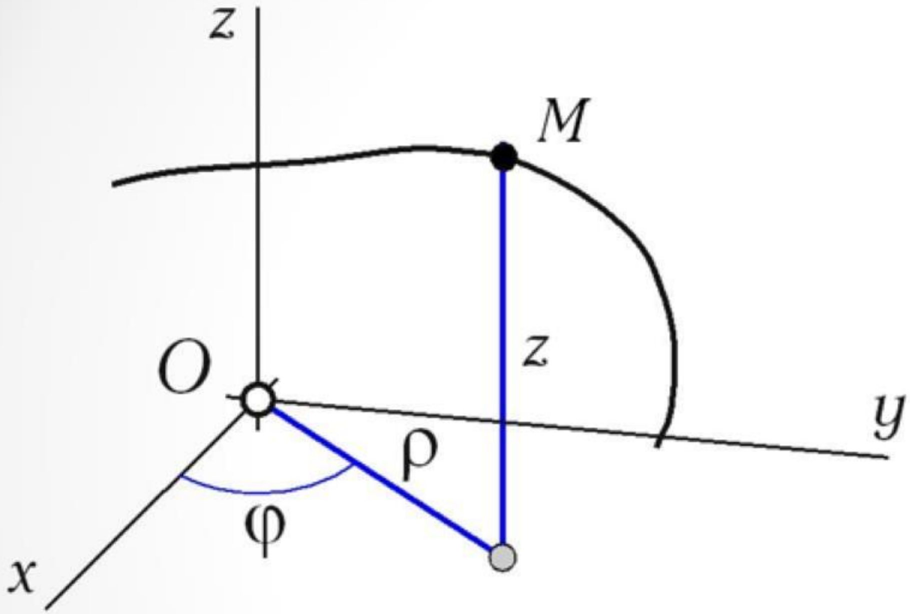
Декартовы координаты

Полярные координаты

$$\begin{cases} x_M = x_M\left(t\right), \\ y_M = y_M\left(t\right). \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_M = \rho_M\left(t\right), \\ \varphi_M = \varphi_M\left(t\right). \end{cases} \qquad \begin{cases} x_M = \rho\cos\varphi, \\ y_M = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

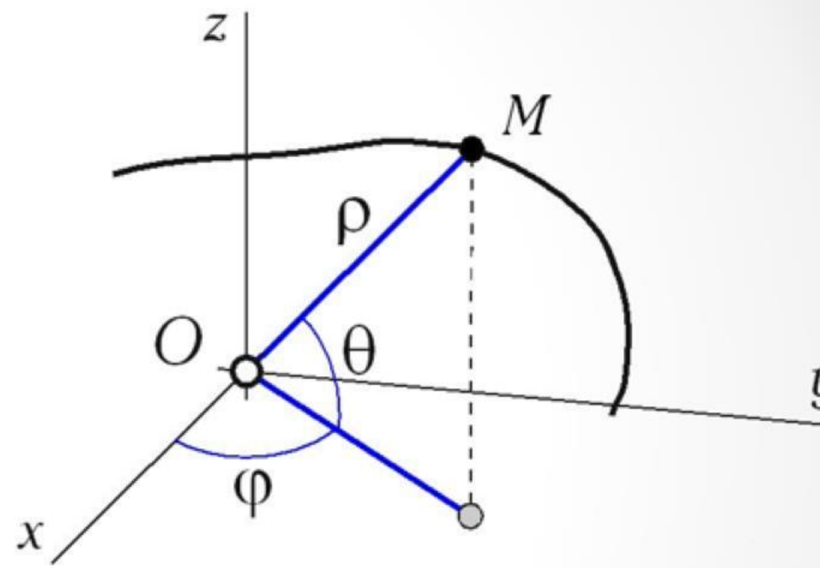
Способы задания движения точки

Цилиндрические координаты



$$\begin{cases} \rho = \rho(t), \\ \varphi = \varphi(t), \\ z = z(t). \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

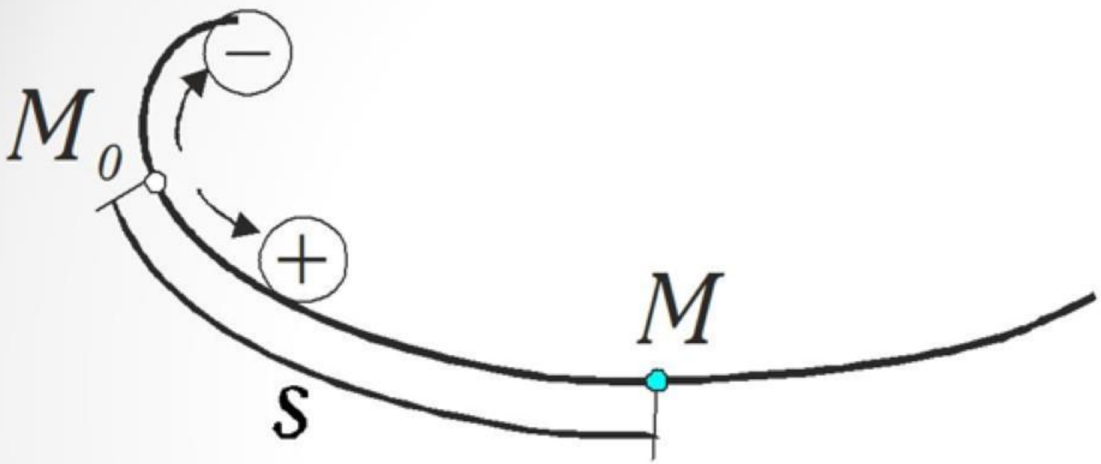
Сферические координаты



$$\begin{cases} \rho = \rho(t), \\ \varphi = \varphi(t), \\ \theta = \theta(t). \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \cos \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

Способы задания движения точки

3. Естественный способ



Закон движения

- Траектория движения
- Начало отсчета
- Направление отсчета
- Дуговая координата $s=s(t)$

Уравнение траектории

В плоскости

- $y = f(x)$
- $f(x,y) = 0$
- $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

В пространстве

- $\begin{cases} f_1(x,y,z) = 0, \\ f_2(x,y,z) = 0. \end{cases}$
- $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$

Переход от одного способа задания движения точки к другому

Векторный - Координатный

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \iff x = r_x,\ y = r_y,\ z = r_z$$

Векторный - Естественный

$$\bar{r} = \bar{r}\left[s\left(t\right)\right]$$

Годограф вектора — линия, по которой перемещается конец вектора, если начало его находится в одной и той же точке

Траектория движения точки есть годограф ее радиус-вектора

Переход от одного способа задания движения точки к другому

Координатный - естественный

1. Уравнения движения точки в координатной форме — параметрическое уравнение траектории.

   Если возможно — параметр исключается из уравнений.

2. $M_0 = M\left[x(0), y(0), z(0)\right]$

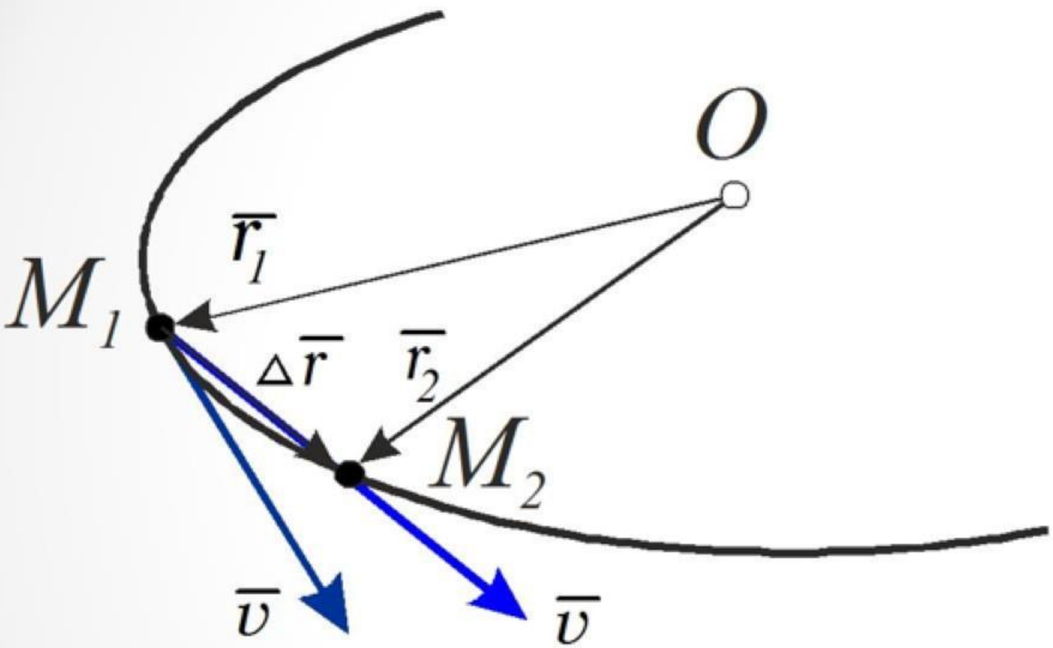
3. Положительное направление определяется исходя из условия задачи.

4. $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad dx = \dot{x}dt, dy = \dot{y}dt, \; dz = \dot{z}dt$

$$s(t) = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \mp\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt$$

Скорость точки

Векторный способ задания движения



$t_1 \qquad \overline{r}_1$

$t_2 \qquad \overline{r}_2$

$$\Delta\overline{r} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1$$

$$\overline{\upsilon}_{cp} = \frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t}$$

$$\overline{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \dot{\overline{r}}$$

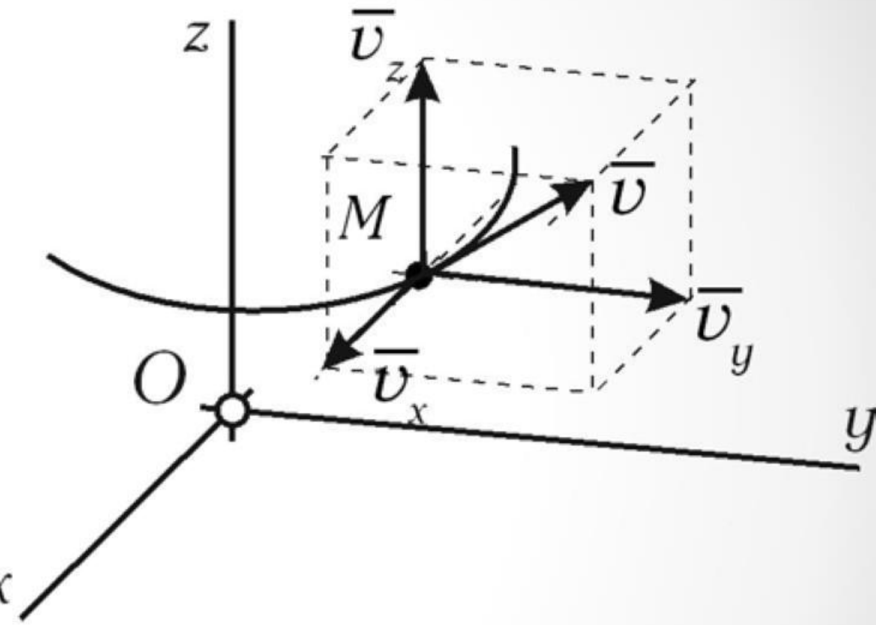
Скорость точки

Координатный способ задания движения – декартовы координаты

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

$$\bar{\upsilon} = \dot{\bar{r}} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} =$$

$$= \bar{\upsilon}_x + \bar{\upsilon}_y + \bar{\upsilon}_z$$



Для определения вектора скорости находят проекции этого вектора на оси координат

$$\begin{cases} \upsilon_x = \dot{x}, \\ \upsilon_y = \dot{y}, \\ \upsilon_z = \dot{z}. \end{cases} \quad \upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$$

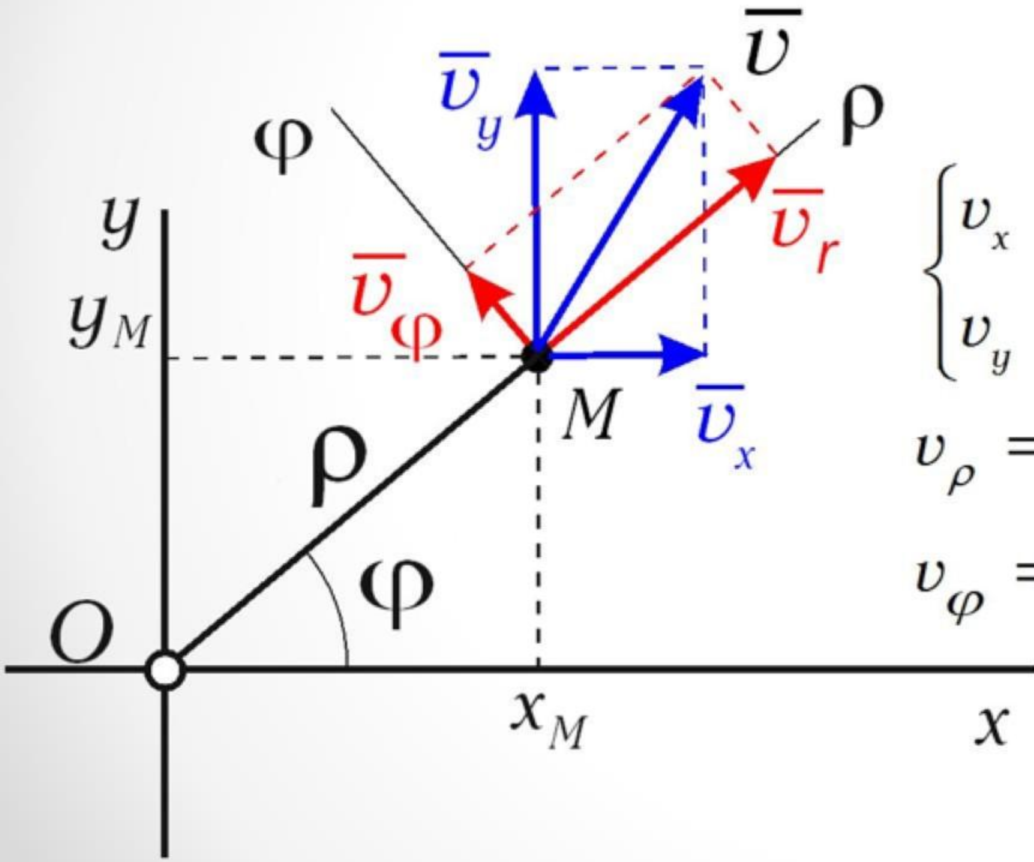
$$\cos\alpha = \cos\left(\bar{\upsilon}, \bar{i}\right) = \upsilon_x / \upsilon,$$

$$\cos\beta = \cos\left(\bar{\upsilon}, \bar{j}\right) = \upsilon_y / \upsilon,$$

$$\cos\gamma = \cos\left(\bar{\upsilon}, \bar{k}\right) = \upsilon_z / \upsilon.$$

Скорость точки

Координатный способ задания движения – полярные координаты



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \upsilon_x = \dot{x} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\ \dot{\varphi}, \\ \upsilon_y = \dot{y} = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\ \dot{\varphi} \end{cases}$$

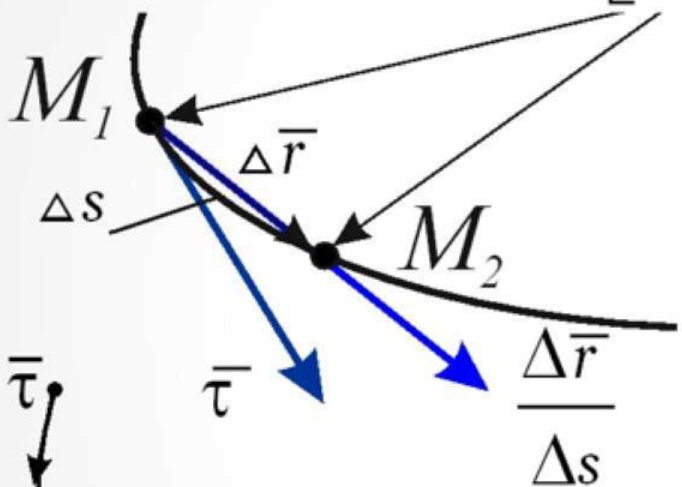
$$\upsilon_\rho = \upsilon_x\cos\varphi + \upsilon_y\sin\varphi = \dot{\rho}$$

$$\upsilon_\varphi = -\upsilon_x\sin\varphi + \upsilon_y\cos\varphi = \rho\ \dot{\varphi}$$

Скорость точки

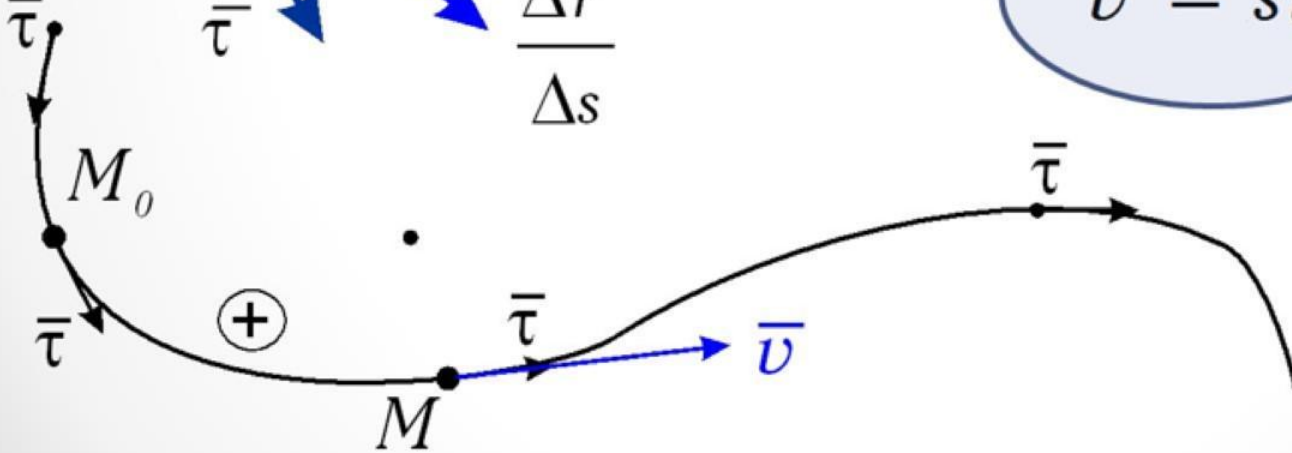
Естественный способ задания движения

$$\bar{r} = \bar{r}\left[s\left(t\right)\right] \qquad \bar{\upsilon} = \dot{\bar{r}}\left[s\left(t\right)\right] = \frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$



$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \qquad \left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right| = 1 \qquad \frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}$$

$$\bar{\upsilon} = \dot{s}\bar{\tau}$$

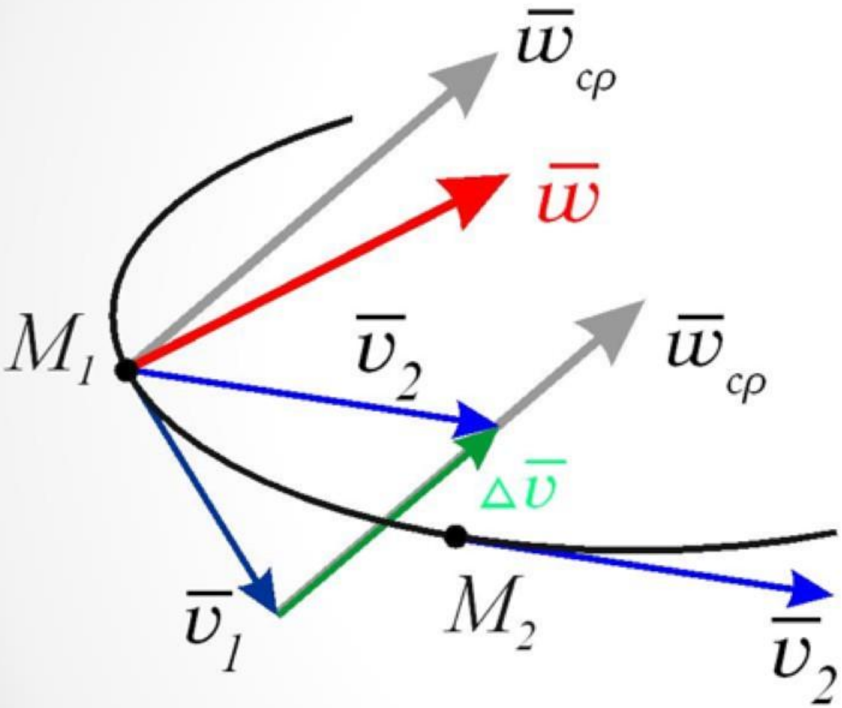


$$\dot{s} > 0 \quad \bar{\upsilon} \uparrow\uparrow \bar{\tau}$$

$$\dot{s} < 0 \quad \bar{\upsilon} \uparrow\downarrow \bar{\tau}$$

Ускорение точки

Векторный способ задания движения



$t_1 \qquad \overline{v}_1$

$t_2 \qquad \overline{v}_2$

$$\Delta\overline{v} = \overline{v}_2 - \overline{v}_1$$

$$\overline{w}_{ср} = \frac{\Delta\overline{v}}{\Delta t}$$

$$\overline{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{v}}{\Delta t} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \dot{\overline{v}} = \ddot{\overline{r}}$$

Ускорение точки

Координатный способ задания движения – декартовы координаты

$$\overline{v} = v_x\overline{i} + v_y\overline{j} + v_z\overline{k} = \dot{x}\overline{i} + \dot{y}\overline{j} + \dot{z}\overline{k}$$

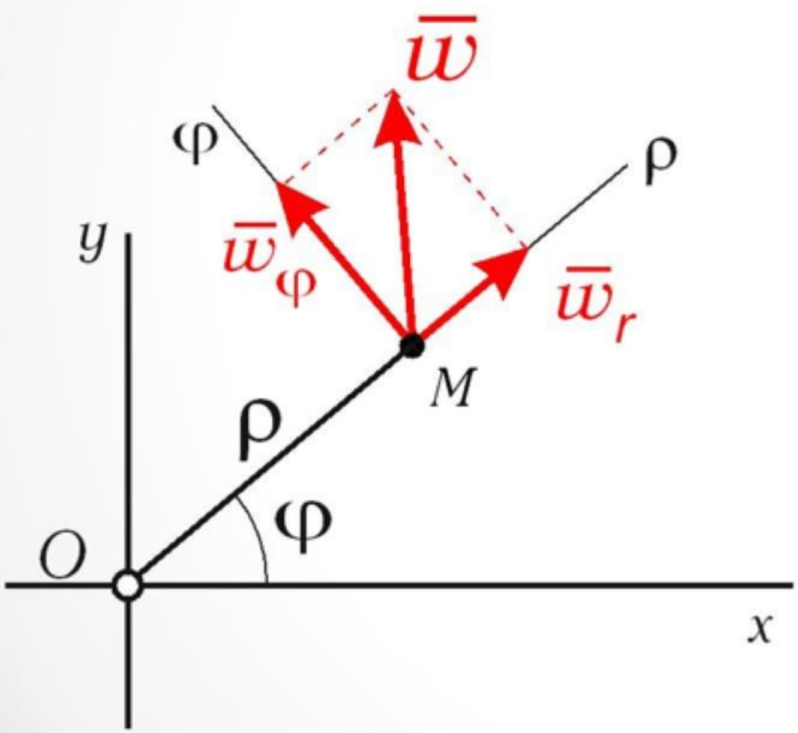
$$\overline{w} = \dot{\overline{v}} = \dot{v}_x\overline{i} + \dot{v}_y\overline{j} + \dot{v}_z\overline{k}$$

Для определения ускорения точки находят проекции вектора ускорения на оси координат

$$\begin{cases} w_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \\ w_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \\ w_z = \dot{v}_z = \ddot{z}. \end{cases}$$

Ускорение точки

Координатный способ задания движения – полярные координаты

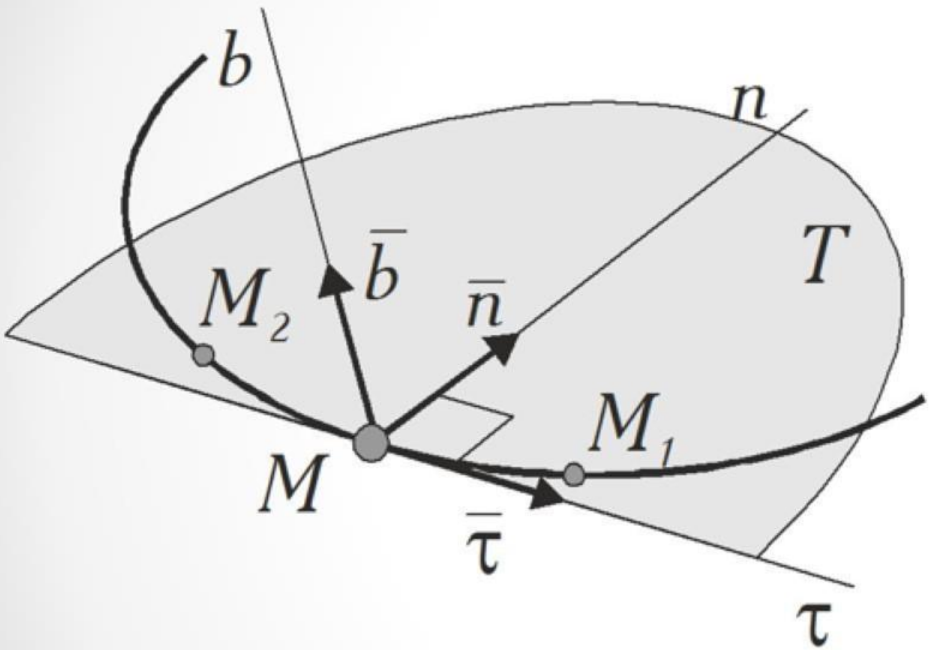


Для определения ускорения точки находят проекции вектора ускорения на оси координат – радиальную и окружную (трансверсальную)

$$\begin{cases} w_\rho = \ddot{\rho} - \rho\,\dot{\varphi}^2, \\ w_\varphi = \rho\,\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\,\dot{\varphi} \end{cases}$$

Ускорение точки

Естественный способ задания движения



$$M, M_1, M_2 \in пл.T'$$

$$M_1, M_2 \to M \qquad пл.T' \to пл.T$$

$Пл.T$- соприкасающаяся плоскость

$$M\tau \in пл.T$$

$$Mn \in пл.T \qquad Mn \perp M\tau$$

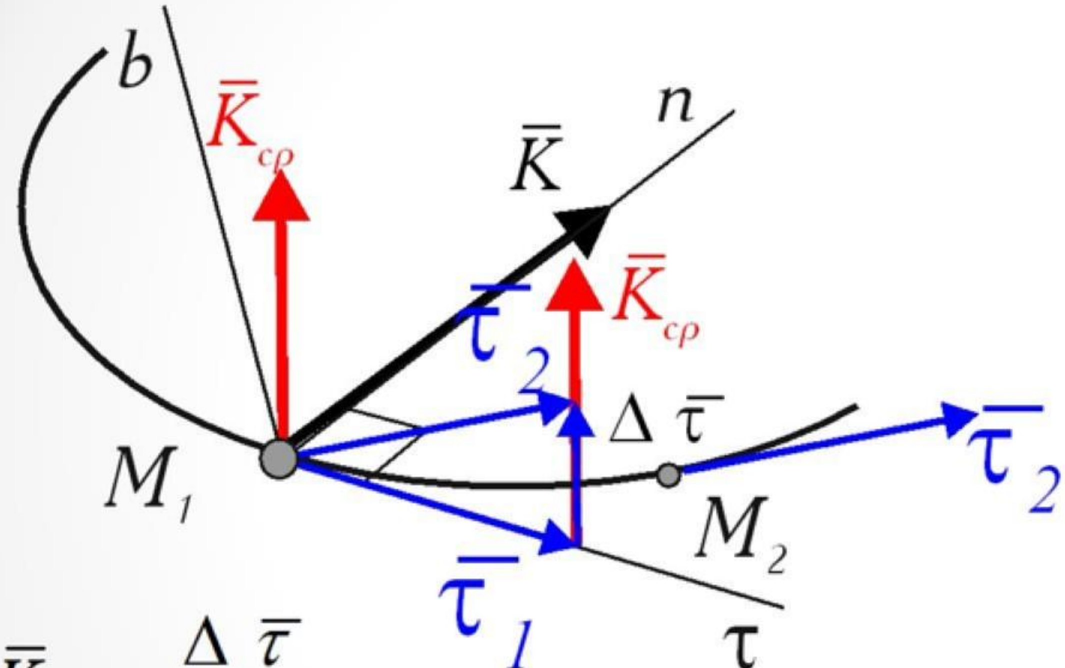
Mn – главная нормаль

Mb- бинормаль

$$\left(\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}\right) = \text{правая тройка векторов}$$

Ускорение точки

Естественный способ задания движения



$t_1 \quad s_1 \quad \bar{\tau}_1$

$t_2 \quad s_2 \quad \bar{\tau}_2$

$\Delta s = s_2 - s_1$

$\Delta\,\bar{\tau} = \bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1$

$$\bar{K}_{cp} = \frac{\Delta\,\bar{\tau}}{\Delta s}$$

$$\left|\bar{K}\right| = \frac{1}{\rho} \qquad \bar{K} \perp M_1\tau$$

$$\bar{K} = \lim_{\Delta s \to 0} \bar{K}_{cp} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\,\bar{\tau}}{\Delta s} = \frac{d\bar{\tau}}{ds}$$

$$\bar{K} = \frac{1}{\rho}\bar{n}$$

Ускорение точки

Естественный способ задания движения

$\overline{v} = \dot{s}\overline{\tau}$

$$\overline{w} = \dot{\overline{v}} = \ddot{s}\overline{\tau} + \dot{s}\frac{d\overline{\tau}}{dt}, \quad но \quad \overline{\tau} = \overline{\tau}\left[s\left(t\right)\right] \Rightarrow \frac{d\overline{\tau}}{dt} = \frac{d\overline{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$\overline{w} = \ddot{s}\overline{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\overline{n} = \overline{w}_\tau + \overline{w}_n$$

Касательное ускорение характеризует изменение вектора скорости по величине

$$w_\tau = \ddot{s} = \dot{v}$$

Касательное ускорение направлено по касательной к траектории