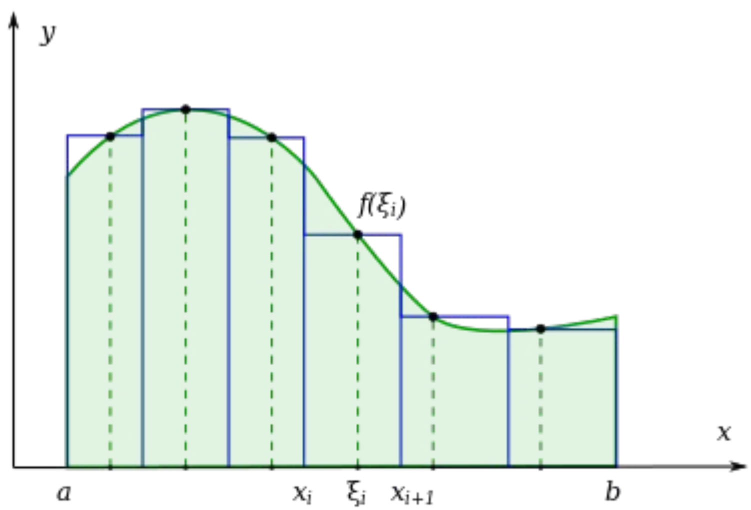
Интегралы



Неопределенный интеграл

Первообразная, основные понятия и определения

Определение

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $y = f(x)$ на промежутке $(a; b)$, конечном или бесконечном, если функция $F(x)$ дифференцируема в каждой точке этого промежутка и ее производная удовлетворяет следующему равенству:

$$F'(x) = f(x)$$

Последнее равенство можно записать через дифференциалы:

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \quad \text{или} \quad dF = f(x)dx$$

Пример

Функция $F(x) = \frac{x^2}{2}$ является первообразной для функции $f(x) = x$, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x = f(x)$$

Больше примеров решений   Решение интегралов онлайн

Первообразная $F(x)$ имеет конечную производную, а, следовательно, является непрерывной функцией.

Теорема

(О бесконечном множестве первообразных для функции)

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$ на некотором промежутке, то и функция $\Phi(x) = F(x) + C$, где C - произвольная постоянная, также будет первообразной для функции $f(x)$ на рассматриваемом промежутке.

Определение Совокупность всех первообразных функции $y = f(x)$, определенных на заданном промежутке, называется **неопределенным интегралом от функции** $y = f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$. То есть

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Знак $\int$ называется **интегралом**, $f(x)dx$ - **подынтегральным выражением**, $f(x)$ - **подынтегральной функцией**, а x - **переменной интегрирования**.

Операция нахождения первообразной или неопределенного интеграла от функции $f(x)$ называется **интегрированием функции** $f(x)$. Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию.

Геометрическая интерпретация неопределенного интеграла

Неопределенный интеграл представляет собой семейство параллельно расположенных кривых $F(x) + C$, где каждому конкретному числовому значению постоянной C соответствует определенная кривая из указанного семейства.

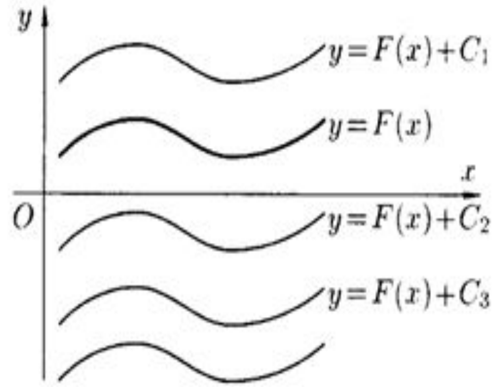


График каждой кривой из семейства называется **интегральной кривой.**

Теорема Каждая непрерывная на промежутке $(a; b)$ функция, имеет на этом интервале первообразную.

Свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Пример $d\left(\int x^2 dx\right) = x^2 dx$

Больше примеров решений →

2. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Пример $\left(\int x^2 dx\right)' = x^2$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла или вносить под знак интеграла

$$\int \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

Пример $\int 3x^2 dx = 3\int x^2 dx$

5. Неопределенный интеграл от суммы/разности двух и больше функций равен сумме/разности неопределенных интегралов от этих функций

$$\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Пример $\int (x^2 + \sin x)\, dx = \int x^2 dx + \int \sin x dx$

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C$, где функция $u = \phi(x)$ - произвольная функция с непрерывной производной.

Пример Известно, что $\int \cos x dx = \sin x + C$, а тогда

$$\int \cos(x+2)d(x+2) = \sin(x+2) + C$$

Основные формулы

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$

3. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$

$n \neq -1, x > 0$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

6. $\int e^x dx = e^x + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$

10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C, |x| < |a|$

12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C$

13. «Высокий» логарифм:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, |x| \neq a$$

14. «Длинный» логарифм:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Методы решения неопределенных интегралов

1. Метод непосредственного интегрирования

Приведение к табличному виду или **метод непосредственного интегрирования.** С помощью тождественных преобразований подынтегральной функции интеграл сводится к интегралу, к которому применимы основные правила интегрирования и возможно использование таблицы основных интегралов.

Пример

Задание. Найти интеграл $\int 2^{3x-1}dx$

Решение. Воспользуемся свойствами интеграла и приведем данный интеграл к табличному виду.

$$\int 2^{3x-1}dx = \int 2^{3x} \cdot 2^{-1}dx = \frac{1}{2}\int \left(2^3\right)^x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int 8^x dx = \frac{8^x}{2\ln 8} + C$$

Ответ. $\int 2^{3x-1}dx = \frac{8^x}{2\ln 8} + C$

2. Внесение под знак дифференциала

В формуле неопределенного интеграла величина dx означает, что берется дифференциал от переменной x. Можно использовать некоторые свойства дифференциала, чтобы, усложнив выражение под знаком дифференциала, тем самым упростить нахождение самого интеграла. Для этого используется формула

$$y'(x)dx = dy(x)$$

Если нужная функция $y(x)$ отсутствует, иногда ее можно образовать путем алгебраических преобразований.

Интегрирование внесением под дифференциал

Пусть требуется найти неопределенный интеграл $\int f(x)dx$. Предположим, что существуют дифференцируемые функции $u = \phi(x)$ и $v = g(u)$ такие, что

$$f(x)dx = g\left(\phi(x)\right) d\phi(x) = g\left(\phi(x)\right) \phi'(x)dx = g(u)du$$

Тогда

$$\int f(x)dx = \int g\left(\phi(x)\right) \phi'(x)dx = \int g(u)du$$

Указанное преобразование подынтегрального выражения называют **подведением под знак дифференциала**.

Тогда, если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \phi(x)$, то имеет место следующее равенство:

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

Пример

Задание. Внесением под дифференциал найти неопределенный интеграл $\int \cos(2x)dx$

Решение. Внесем $2x$ под знак дифференциала, тем самым приведя исходный интеграл к табличному.

$$\int \cos(2x)dx = \int \cos(2x) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot dx = \int \cos(2x) \cdot \frac{1}{2} \cdot d(2x) =$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos(2x)d(2x) = \frac{1}{2} \int d(\sin 2x) = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

Ответ. $\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$

Замечание. При интегрировании методом подведения под знак дифференциала полезны следующие равенства для дифференциалов:

1. $dx = d(x+a), a = \text{const}$
2. $dx = \frac{1}{a}d(ax+b), a, b = \text{const}, a \neq 0$
3. $xdx = \frac{1}{2}d(x^2+a), a = \text{const}$
4. $\sin x dx = -d(\cos x)$
5. $\cos x dx = d(\sin x)$
6. $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$
7. $x^n dx = \frac{1}{n+1}d(x^{n+1})$
8. $e^x dx = d(e^x)$
9. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$
10. $\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x)$
11. $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$
12. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$
13. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$

Примеры решения интегралов данным методом

Пример

Задание. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cos x dx$

Решение. Сначала внесем косинус под знак дифференциала

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x \, d(\sin x)$$

Так как $\int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C$, то

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x \, d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

Ответ. $\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C$

Интегрирование заменой переменной

Суть данного метода заключается в том, что в рассмотрение вводится новая переменная интегрирования или, что тоже самое, делается подстановка. После этого заданный в условии интеграл сводится либо к табличному интегралу, либо к нему сводящемуся.

Если в неопределенном интеграле $\int f(x)dx$ сделать подстановку $x = \phi(t)$, где функция $\phi(t)$ - функция с непрерывной первой производной, то тогда $dx = d(\phi(t)) = \phi'(t)dt$ и согласно свойству 6 неопределенного интеграла имеем, что:

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Эта формула называется **формулой замены переменной в неопределенном интеграле.**

Замечание После нахождения интеграла по новой переменной t необходимо вернуться к первоначальной переменной x.

Замечание В некоторых случаях целесообразно делать подстановку $t = g(x)$, тогда

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

Пример

Задание. Найти интеграл $\int xe^{x^2}dx$

Решение. Сделаем замену переменной: $x^2=t$, далее приведем интеграл к табличному виду и решим его. В конце решения делаем обратную замену.

$$\int xe^{x^2}dx=\int e^{x^2}\cdot xdx\left\|\begin{array}{l}x^2=t\\ d\left(x^2\right)=dt\\ 2xdx=dt\\ xdx=\dfrac{dt}{2}\end{array}\right\|=\int e^t\cdot\frac{dt}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}\cdot e^t+C=\frac{e^{x^2}}{2}+C$$

Ответ. $\int xe^{x^2}dx=\dfrac{e^{x^2}}{2}+C$

Метод интегрирования по частям

Рассмотрим функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$, которые имеют непрерывные производные. Согласно свойствам дифференциалов, имеет место следующее равенство:

$$d(uv) = udv + vdu$$

Проинтегрировав левую и правую части последнего равенства, получим:

$$\int d(uv) = \int (udv + vdu) \Rightarrow uv = \int udv + \int vdu$$

Полученное равенство перепишем в виде:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Эта формула называется **формулой интегрирования по частям**. С ее помощью интеграл $\int udv$ можно свести к нахождению интеграла $\int vdu$, который может быть более простым.

Замечание В некоторых случаях формулу интегрирования частями нужно применять неоднократно.

Формулу интегрирования по частям целесообразно применять к интегралам следующего вида:

1) $\int P_n(x)e^{kx}dx$; $\int P_n(x)\sin(kx)dx$; $\int P_n(x)\cos(kx)dx$

Здесь $P_n(x)$ - многочлен степени n, k - некоторая константа. В данном случае в качестве функции u берется многочлен, а в качестве dv - оставшиеся сомножители. Для интегралов такого типа формула интегрирования по частям применяется n раз.

Пример

Задание. Найти интеграл $\int (x+1)\, e^{2x} dx$

Решение. В исходном интеграле выделим функции u и v, затем выполним интегрирование по частям.

$$\int (x+1)\, e^{2x} dx \left\| \begin{matrix} u = x+1 & dv = e^{2x} dx \\ du = dx & v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{matrix} \right\| = (x+1) \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx =$$

$$= \frac{(x+1)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{(x+1)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} + C =$$

$$= \frac{(x+1)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

Ответ. $\int (x+1)e^{2x} dx = \frac{(x+1)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$

Простейшие дроби

Основные понятия и определения

Определение

Простыми дробями называются рациональные дроби вида $\frac{A}{(x-a)^n}$, $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$, где $n, m \geq 1$, $p^2 - 4q < 0$.

Теорема

(О разложении многочлена на элементарные множители)

Многочлен n-ой степени может быть разложен на произведение сомножителей следующим образом:

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

Здесь $x_i, i=\overline{1;n}$ - корни многочлена $P_n(x)$, а a_0 - коэффициент при старшей степени x^n указанного многочлена.

Квадратный трехчлен можно разложить на множители следующим образом:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

если $b^2-4ac \geq 0$. Здесь x_1, x_2 - корни многочлена ax^2+bx+c .

Пример

Задание. Разложить на множители многочлен $f(x) = x^2 + 5x - 6$

Решение. Найдем вначале корни многочлена, для этого решим уравнение $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$$

Находим дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$$

Тогда

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 \pm 7}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 7}{2} = \{1; -6\}$$

Таким образом,

$$f(x) = x^2 + 5x - 6 = 1 \cdot (x - 1)(x - (-6)) = (x - 1)(x + 6)$$

Можете проверить решение на нашем онлайн калькуляторе - решение квадратных уравнений.

Ответ. $f(x) = x^2 + 5x - 6 = (x - 1)(x + 6)$

Многочлен третьей степени:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

или $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x^2 + px + q)$, если $p^2 - 4q < 0$

Разложении правильной рациональной дроби

Теорема (О разложении правильной рациональной дроби на сумму простых дробей)

Каждая рациональная дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, знаменатель которой имеет вид $Q_n(x) = (x - x_1)^n (x - x_2)^m ... (x^2 + p_1 x + q_1)^k ...$, может быть разложена и притом единственным образом на сумму простых дробей по правилу

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + ... + \frac{A_n}{(x - x_1)^n} + \frac{B_1}{x - x_2} + ... + \frac{B_m}{(x - x_2)^m} + \\ + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + ... + \frac{F_k x + G_k}{(x^2 + p_1 x + q_1)^k} + ...$$

где $A_1, ..., A_n$; $B_1, ..., B_m$; $C_1, ..., C_k$; $D_1, ..., D_k$ - действительные постоянные числа, часть которых в разложении может обратиться в нуль.

В частности, если в знаменателе правильной рациональной дроби стоит квадратный трехчлен, то

$$\frac{P_1(x)}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

Пример

Задание. Представить в виде суммы простейших дробей дробь $\frac{x+1}{x^2+3x-4}$. Коэффи
разложения находить ненужно.

Решение. Знаменатель рассматриваемой дроби можно разложить на множители следующим обра

$$x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$$

то есть

$$\frac{x+1}{x^2+3x-4}=\frac{x+1}{(x-1)(x+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+4}$$

Ответ. $\frac{x+1}{x^2+3x-4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+4}$

Метод неопределенных коэффициентов

Для нахождения неизвестных коэффициентов в разложении

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n} + \frac{B_1}{x-x_2} + \ldots + \frac{B_m}{(x-x_2)^m} +$$
$$+ \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \ldots + \frac{F_k x + G_k}{(x^2 + p_1 x + q_1)^k} + \ldots$$

используется **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в следующем:

1. правую часть записанного равенства приводим к общему знаменателю, который совпадает со знаменателем дроби, стоящей в левой части этого равенства - $Q_n(x)$, в числителе левой части получим некоторый многочлен $R_m(x)$ с неизвестными коэффициентами;

2. используем тот факт, что две дроби равны, когда равны их числители и знаменатели. Из того, что знаменатели левой и правой частей равенства равны, то значит, равны и числители:

$$P_m(x) = R_m(x)$$

3. два многочлена равны, если равны коэффициенты при соответствующих степенях переменной, поэтому приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x. В результате получаем систему для определения неизвестных коэффициентов.

Пример

Задание. Разложить рациональную дробь $\frac{x+3}{x^2-5x+6}$ на простые дроби.

Решение. Так как корнями знаменателя являются значения $x_1=2$, $x_2=3$, то его можно разложить на множители следующим образом:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

А тогда

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}$$

Искомое разложение имеет вид:

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

Приводим к общему знаменателю в правой части равенства и приравниваем числители:

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+3=(A+B)x-3A-2B$$

Приравнивая коэффициенты, при соответствующих степенях, получаем:

$$\begin{array}{c|l} x & A+B=1 \\ x^0 & -3A-2B=3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -3A-2B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-5 \\ B=6 \end{cases}$$

Отсюда, искомое разложение:

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=-\frac{5}{x-2}+\frac{6}{x-3}$$

Ответ. $\frac{x+3}{x^2-5x+6}=-\frac{5}{x-2}+\frac{6}{x-3}$

тегрирование правильных рациональных дробей

еделение

Рациональная дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n}$ называется **правильной**, если степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя, т.е. $m < n$. Если же $m \geq n$, то дробь называется **неправильной**.

ример

Рациональная дробь $\frac{x+1}{x^2-2}$ является правильной.

Выражения $\frac{x^2+1}{x^2-2}$ и $\frac{x^3-3x+1}{x^2-2}$ - неправильные рациональные дроби.

дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов, можно получить очлен плюс правильную дробь.

Пример

Задание. Найти интеграл $\int \frac{x^2-2x+2}{x-1}dx$

Решение. Так как подынтегральная функция $\frac{x^2-2x+2}{x-1}$ является неправильной рациональной дробью (так как степень числителя больше степени знаменателя), то выделим целую часть, для этого числитель поделим на знаменатель в столбик:

$$\begin{array}{r|l} -\; x^2-2x+2 & x-1 \\ \cline{2-2} x^2-x & x-1 \\ \cline{1-1} -\; -x+2 & \\ -x+1 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

То есть,

$$\frac{x^2-2x+2}{x-1} = x-1+\frac{1}{x-1}$$

Тогда интеграл

$$\int \frac{x^2-2x+2}{x-1}dx = \int \left(x-1+\frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$= \int xdx - \int dx + \int \frac{dx}{x-1} = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x-1| + C$$

Ответ. $\int \frac{x^2-2x+2}{x-1}dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x-1| + C$

Универсальная тригонометрическая подстановка

Определение **Универсальной тригонометрической подстановкой** называется подстановка вида $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$

В англоязычной литературе в честь выдающегося немецкого математика Карла Вейерштрасса (1815 - 1897) называется *подстановкой Вейерштрасса*.

Указанная подстановка применяется при интегрировании, когда подынтегральное выражение рационально зависит от тригонометрических функций. Указанная замена позволяет свести интеграл от тригонометрической функции к интегралу от рациональной функции.

При этом следует учесть, что из равенства $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ получаем:

$$\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}t \Rightarrow x=2\operatorname{arctg}t \Rightarrow$$

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Пример

Задание. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{5-\sin x+\cos x}$

Решение. Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой:

$$\int \frac{dx}{5-\sin x+\cos x} \left\| \begin{matrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t & \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{5(1+t^2)-2t+1-t^2} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{4t^2-2t+6} = \int \frac{dt}{2t^2-t+3} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-2t\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{16}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{23}}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{23}}{4}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{23}}{4}} + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{23}}{23}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{23}(4t-1)}{23} + C = \frac{2\sqrt{23}}{23}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{23}\left(4\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}{23} + C$$

Ответ. $\int \frac{dx}{5-\sin x+\cos x} = \frac{2\sqrt{23}}{23}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{23}\left(4\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}{23} + C$