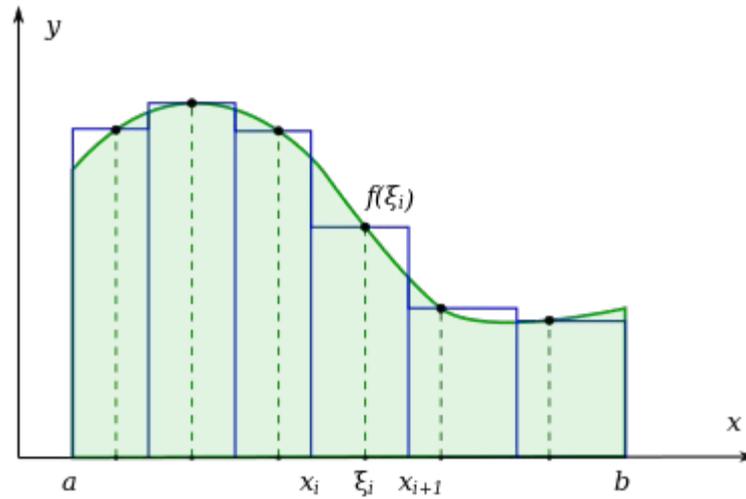


# Интегралы



# Неопределенный интеграл

## Первообразная, основные понятия и определения

### Определение

Функция  $F(x)$  называется **первообразной** для функции  $y = f(x)$  на промежутке  $(a; b)$ , конечном или бесконечном, если функция  $F(x)$  дифференцируема в каждой точке этого промежутка и ее производная удовлетворяет следующему равенству:

$$F'(x) = f(x)$$

Последнее равенство можно записать через дифференциалы:

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \quad \text{или} \quad dF = f(x)dx$$

### Пример

Функция  $F(x) = \frac{x^2}{2}$  является первообразной для функции  $f(x) = x$ , так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x = f(x)$$

 [Больше примеров решений](#)

 [Решение интегралов онлайн](#)

Первообразная  $F(x)$  имеет конечную производную, а, следовательно, является непрерывной функцией.

### Теорема

**(О бесконечном множестве первообразных для функции)**

Если функция  $F(x)$  является первообразной для функции  $y = f(x)$  на некотором промежутке, то и функция  $\Phi(x) = F(x) + C$ , где  $C$  - произвольная постоянная, также будет первообразной для функции  $f(x)$  на рассматриваемом промежутке.

**Определение**

Совокупность всех первообразных функции  $y = f(x)$ , определенных на заданном промежутке, называется **неопределенным интегралом от функции  $y = f(x)$**  и обозначается символом  $\int f(x)dx$ .

То есть

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Знак  $\int$  называется **интегралом**,  $f(x)dx$  - **подынтегральным выражением**,  $f(x)$  - **подынтегральной функцией**, а  $x$  - **переменной интегрирования**.

Операция нахождения первообразной или неопределенного интеграла от функции  $f(x)$  называется **интегрированием функции  $f(x)$** . Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию.

## Геометрическая интерпретация неопределенного интеграла

Неопределенный интеграл представляет собой семейство параллельно расположенных кривых  $F(x) + C$ , где каждому конкретному числовому значению постоянной  $C$  соответствует определенная кривая из указанного семейства.

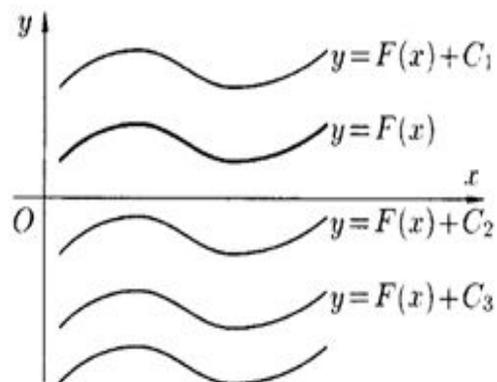


График каждой кривой из семейства называется **интегральной кривой**.

**Теорема**

Каждая непрерывная на промежутке  $(a; b)$  функция, имеет на этом интервале первообразную.

## Свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Пример

$$d\left(\int x^2 dx\right) = x^2 dx$$

[Больше примеров решений](#) →

2. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Пример

$$\left(\int x^2 dx\right)' = x^2$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла или вносить под знак интеграла

$$\int \alpha \cdot f(x) dx = \alpha \int f(x) dx$$

Пример

$$\int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx$$

5. Неопределенный интеграл от суммы/разности двух и больше функций равен сумме/разности неопределенных интегралов от этих функций

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Пример

$$\int (x^2 + \sin x) dx = \int x^2 dx + \int \sin x dx$$

6. Если  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , то и  $\int f(u) du = F(u) + C$ , где функция  $u = \phi(x)$  - произвольная функция с непрерывной производной.

Пример

Известно, что  $\int \cos x dx = \sin x + C$ , а тогда

$$\int \cos(x + 2) d(x + 2) = \sin(x + 2) + C$$

## Основные формулы

$$1. \int 0 \cdot dx = C$$

$$2. \int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$$

$$3. \int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \\ n \neq -1, x > 0$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$6. \int e^x dx = e^x + C$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$8. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < |a|$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

13. «Высокий» логарифм:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, |x| \neq a$$

14. «Длинный» логарифм:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

# Методы решения неопределенных интегралов

## 1. Метод непосредственного интегрирования

**Приведение к табличному виду или метод непосредственного интегрирования.** С помощью тождественных преобразований подынтегральной функции интеграл сводится к интегралу, к которому применимы основные правила интегрирования и возможно использование таблицы основных интегралов.

Пример

**Задание.** Найти интеграл  $\int 2^{3x-1} dx$

**Решение.** Воспользуемся свойствами интеграла и приведем данный интеграл к табличному виду.

$$\begin{aligned}\int 2^{3x-1} dx &= \int 2^{3x} \cdot 2^{-1} dx = \frac{1}{2} \int (2^3)^x dx = \\ &= \frac{1}{2} \int 8^x dx = \frac{8^x}{2 \ln 8} + C\end{aligned}$$

**Ответ.**  $\int 2^{3x-1} dx = \frac{8^x}{2 \ln 8} + C$

## 2. Внесение под знак дифференциала

В формуле неопределенного интеграла величина  $dx$  означает, что берется дифференциал от переменной  $x$ . Можно использовать некоторые свойства дифференциала, чтобы, усложнив выражение под знаком дифференциала, тем самым упростить нахождение самого интеграла. Для этого используется формула

$$y'(x)dx = dy(x)$$

Если нужная функция  $y(x)$  отсутствует, иногда ее можно образовать путем алгебраических преобразований.

# Интегрирование внесением под дифференциал

Пусть требуется найти неопределенный интеграл  $\int f(x)dx$ . Предположим, что существуют дифференцируемые функции  $u = \phi(x)$  и  $v = g(u)$  такие, что

$$f(x)dx = g(\phi(x)) d\phi(x) = g(\phi(x)) \phi'(x)dx = g(u)du$$

Тогда

$$\int f(x)dx = \int g(\phi(x)) \phi'(x)dx = \int g(u)du$$

Указанное преобразование подынтегрального выражения называют **подведением под знак дифференциала**.

Тогда, если  $\int f(x)dx = F(x) + C$  и  $u = \phi(x)$ , то имеет место следующее равенство:

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

Пример

**Задание.** Внесением под дифференциал найти неопределенный интеграл  $\int \cos(2x)dx$

**Решение.** Внесем  $2x$  под знак дифференциала, тем самым приведем исходный интеграл к табличному.

$$\begin{aligned}\int \cos(2x)dx &= \int \cos(2x) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot dx = \int \cos(2x) \cdot \frac{1}{2} \cdot d(2x) = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos(2x)d(2x) = \frac{1}{2} \int d(\sin 2x) = \frac{1}{2} \sin 2x + C\end{aligned}$$

**Ответ.**  $\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$

**Замечание.** При интегрировании методом подведения под знак дифференциала полезны следующие равенства для дифференциалов:

$$1. dx = d(x + a), a = \text{const}$$

$$2. dx = \frac{1}{a} d(ax + b), a, b = \text{const}, a \neq 0$$

$$3. x dx = \frac{1}{2} d(x^2 + a), a = \text{const}$$

$$4. \sin x dx = -d(\cos x)$$

$$5. \cos x dx = d(\sin x)$$

$$6. \frac{dx}{x} = d(\ln x)$$

$$7. x^n dx = \frac{1}{n+1} d(x^{n+1})$$

$$8. e^x dx = d(e^x)$$

$$9. \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$$

$$10. \frac{dx}{1+x^2} = d(\text{arctg } x)$$

$$11. \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$$

$$12. \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\text{tg } x)$$

$$13. \frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\text{ctg } x)$$

### Примеры решения интегралов данным методом

**Пример**

**Задание.** Найти интеграл  $\int \sin^2 x \cos x dx$

**Решение.** Сначала внесем косинус под знак дифференциала

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x)$$

Так как  $\int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C$ , то

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

**Ответ.**  $\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C$

# Интегрирование заменой переменной

Суть данного метода заключается в том, что в рассмотрение вводится новая переменная интегрирования или, что тоже самое, делается подстановка. После этого заданный в условии интеграл сводится либо к табличному интегралу, либо к нему сводящемуся.

Если в неопределенном интеграле  $\int f(x)dx$  сделать подстановку  $x = \phi(t)$ , где функция  $\phi(t)$  - функция с непрерывной первой производной, то тогда  $dx = d(\phi(t)) = \phi'(t)dt$  и согласно свойству 6 неопределенного интеграла имеем, что:

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Эта формула называется **формулой замены переменной в неопределенном интеграле**.

## Замечание

После нахождения интеграла по новой переменной  $t$  необходимо вернуться к первоначальной переменной  $x$ .

## Замечание

В некоторых случаях целесообразно делать подстановку  $t = g(x)$ , тогда

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

**Пример**

**Задание.** Найти интеграл  $\int xe^{x^2} dx$

**Решение.** Сделаем замену переменной:  $x^2 = t$ , далее приведем интеграл к табличному виду и решим его. В конце решения делаем обратную замену.

$$\int xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} \cdot x dx \left\| \begin{array}{l} x^2 = t \\ d(x^2) = dt \\ 2x dx = dt \\ x dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right\| = \int e^t \cdot \frac{dt}{2} =$$
$$= \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} \cdot e^t + C = \frac{e^{x^2}}{2} + C$$

**Ответ.**  $\int xe^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2} + C$

## Метод интегрирования по частям

Рассмотрим функции  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$ , которые имеют непрерывные производные. Согласно свойствам дифференциалов, имеет место следующее равенство:

$$d(uv) = u dv + v du$$

Проинтегрировав левую и правую части последнего равенства, получим:

$$\int d(uv) = \int (u dv + v du) \Rightarrow uv = \int u dv + \int v du$$

Полученное равенство перепишем в виде:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Эта формула называется **формулой интегрирования по частям**. С ее помощью интеграл  $\int u dv$  можно свести к нахождению интеграла  $\int v du$ , который может быть более простым.

### Замечание

В некоторых случаях формулу интегрирования частями нужно применять неоднократно.

Формулу интегрирования по частям целесообразно применять к интегралам следующего вида:

$$1) \int P_n(x) e^{kx} dx ; \int P_n(x) \sin(kx) dx ; \int P_n(x) \cos(kx) dx$$

Здесь  $P_n(x)$  - многочлен степени  $n$ ,  $k$  - некоторая константа. В данном случае в качестве функции  $u$  берется многочлен, а в качестве  $dv$  - оставшиеся сомножители. Для интегралов такого типа формула интегрирования по частям применяется  $n$  раз.

**Пример**

**Задание.** Найти интеграл  $\int (x + 1) e^{2x} dx$

**Решение.** В исходном интеграле выделим функции  $u$  и  $v$ , затем выполним интегрирование по частям.

$$\begin{aligned} \int (x + 1) e^{2x} dx & \left\| \begin{array}{l} u = x + 1 \quad dv = e^{2x} dx \\ du = dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\| = (x + 1) \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \\ & = \frac{(x + 1) e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{(x + 1) e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} + C = \\ & = \frac{(x + 1) e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C \end{aligned}$$

**Ответ.**  $\int (x + 1) e^{2x} dx = \frac{(x + 1) e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$

# Простейшие дроби

## Основные понятия и определения

### Определение

Простыми дробями называются рациональные дроби вида  $\frac{A}{(x-a)^n}$ ,  $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$ , где  $n, m \geq 1$ ,  $p^2 - 4q < 0$ .

### Теорема

(О разложении многочлена на элементарные множители)

Многочлен  $n$ -ой степени может быть разложен на произведение сомножителей следующим образом:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

Здесь  $x_i, i = \overline{1; n}$  - корни многочлена  $P_n(x)$ , а  $a_0$  - коэффициент при старшей степени  $x^n$  указанного многочлена.

Квадратный трехчлен можно разложить на множители следующим образом:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

если  $b^2 - 4ac \geq 0$ . Здесь  $x_1, x_2$  - корни многочлена  $ax^2 + bx + c$ .

**Пример**

**Задание.** Разложить на множители многочлен  $f(x) = x^2 + 5x - 6$

**Решение.** Найдем вначале корни многочлена, для этого решим уравнение  $f(x) = 0$  :

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$$

Находим дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$$

Тогда

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 \pm 7}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 7}{2} = \{1; -6\}$$

Таким образом,

$$f(x) = x^2 + 5x - 6 = 1 \cdot (x - 1)(x - (-6)) = (x - 1)(x + 6)$$

Можете проверить решение на нашем онлайн калькуляторе - [решение квадратных уравнений](#).

**Ответ.**  $f(x) = x^2 + 5x - 6 = (x - 1)(x + 6)$

**Многочлен третьей степени:**

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\text{или } ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x^2 + px + q), \text{ если } p^2 - 4q < 0$$

## Разложение правильной рациональной дроби

### Теорема

(О разложении правильной рациональной дроби на сумму простых дробей)

Каждая рациональная дробь  $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ , знаменатель которой имеет вид  $Q_n(x) = (x - x_1)^n (x - x_2)^m \dots (x^2 + p_1x + q_1)^k \dots$ , может быть разложена и притом единственным образом на сумму простых дробей по правилу

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_n}{(x - x_1)^n} + \frac{B_1}{x - x_2} + \dots + \frac{B_m}{(x - x_2)^m} +$$
$$+ \frac{C_1x + D_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{F_kx + G_k}{(x^2 + p_1x + q_1)^k} + \dots$$

где  $A_1, \dots, A_n$ ;  $B_1, \dots, B_m$ ;  $C_1, \dots, C_k$ ;  $D_1, \dots, D_k$  - действительные постоянные числа, часть которых в разложении может обратиться в нуль.

В частности, если в знаменателе правильной рациональной дроби стоит квадратный трехчлен, то

$$\frac{P_1(x)}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

**Пример**

**Задание.** Представить в виде суммы простейших дробей дробь  $\frac{x+1}{x^2+3x-4}$ . Коэффициенты разложения находить не нужно.

**Решение.** Знаменатель рассматриваемой дроби можно разложить на множители следующим образом

$$x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$$

то есть

$$\frac{x+1}{x^2+3x-4} = \frac{x+1}{(x-1)(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4}$$

Ответ.  $\frac{x+1}{x^2+3x-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4}$

# Метод неопределенных коэффициентов

Для нахождения неизвестных коэффициентов в разложении

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_n}{(x - x_1)^n} + \frac{B_1}{x - x_2} + \dots + \frac{B_m}{(x - x_2)^m} + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{F_kx + G_k}{(x^2 + p_1x + q_1)^k} + \dots$$

используется **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в следующем:

1. правую часть записанного равенства приводим к общему знаменателю, который совпадает со знаменателем дроби, стоящей в левой части этого равенства -  $Q_n(x)$ , в числителе левой части получим некоторый многочлен  $R_m(x)$  с неизвестными коэффициентами;
2. используем тот факт, что две дроби равны, когда равны их числители и знаменатели. Из того, что знаменатели левой и правой частей равенства равны, то значит, равны и числители:

$$P_m(x) = R_m(x)$$

3. два многочлена равны, если равны коэффициенты при соответствующих степенях переменной, поэтому приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной  $x$ . В результате получаем систему для определения неизвестных коэффициентов.

**Пример**

**Задание.** Разложить рациональную дробь  $\frac{x+3}{x^2-5x+6}$  на простые дроби.

**Решение.** Так как корнями знаменателя являются значения  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$ , то его можно разложить на множители следующим образом:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

А тогда

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{x+3}{(x-2)(x-3)}$$

Искомое разложение имеет вид:

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

Приводим к общему знаменателю в правой части равенства и приравниваем числители:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{(x-2)(x-3)} &= \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)} \Rightarrow \\ \Rightarrow x+3 &= (A+B)x - 3A - 2B \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты, при соответствующих степенях, получаем:

$$\begin{matrix} x \\ x^0 \end{matrix} \begin{cases} A+B=1 \\ -3A-2B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -3A-2B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-5 \\ B=6 \end{cases}$$

Отсюда, искомое разложение:

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} = -\frac{5}{x-2} + \frac{6}{x-3}$$

**Ответ.**  $\frac{x+3}{x^2-5x+6} = -\frac{5}{x-2} + \frac{6}{x-3}$

## Интегрирование правильных рациональных дробей

Определение

Рациональная дробь  $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n}$  называется **правильной**, если степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя, т.е.  $m < n$ . Если же  $m \geq n$ , то дробь называется **неправильной**.

Пример

Рациональная дробь  $\frac{x + 1}{x^2 - 2}$  является правильной.

Выражения  $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}$  и  $\frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 - 2}$  - неправильные рациональные дроби.

Если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов, можно получить многочлен плюс правильную дробь.

**Пример**

**Задание.** Найти интеграл  $\int \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} dx$

**Решение.** Так как подынтегральная функция  $\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$  является неправильной рациональной дробью (так как степень числителя больше степени знаменателя), то выделим целую часть, для этого числитель поделим на знаменатель в столбик:

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 2x + 2 & x - 1 \\ \hline x^2 - x & \\ \hline -x + 2 & \\ - & \\ -x + 1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

То есть,

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1}$$

Тогда интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} dx &= \int \left( x - 1 + \frac{1}{x - 1} \right) dx = \\ &= \int x dx - \int dx + \int \frac{dx}{x - 1} = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x - 1| + C \end{aligned}$$

**Ответ.**  $\int \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x - 1| + C$

## Универсальная тригонометрическая подстановка

### Определение

Универсальной тригонометрической подстановкой называется подстановка вида  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

В англоязычной литературе в честь выдающегося немецкого математика Карла Вейерштрасса (1815 - 1897) называется *подстановкой Вейерштрасса*.

Указанная подстановка применяется при интегрировании, когда подынтегральное выражение рационально зависит от тригонометрических функций. Указанная замена позволяет свести интеграл от тригонометрической функции к интегралу от рациональной функции.

При этом следует учесть, что из равенства  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$  получаем:

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

**Пример**

**Задание.** Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{dx}{5 - \sin x + \cos x}$

**Решение.** Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой:

$$\int \frac{dx}{5 - \sin x + \cos x} \left\| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\| =$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5 - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{5(1+t^2) - 2t + 1 - t^2} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{4t^2 - 2t + 6} = \int \frac{dt}{2t^2 - t + 3} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{t}{2} + \frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 2t \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{4}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{23}}{4}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t - \frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{23}}{4}} + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{23}}{23} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{23}(4t - 1)}{23} + C = \frac{2\sqrt{23}}{23} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{23}\left(4\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1\right)}{23} + C$$

**Ответ.**  $\int \frac{dx}{5 - \sin x + \cos x} = \frac{2\sqrt{23}}{23} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{23}\left(4\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1\right)}{23} + C$

