Презентация по высшей математике

Определители второго и третьего порядков

Гарипов.Н.К
Ананьин.В.Е

Мы начинаем изучение курса аналитической геометрии. Содержательно весь курс можно разбить на четыре большие части:

- векторная алгебра (лекции 2–6);
- прямые и плоскости (лекции 7–9);
- квадрики на плоскости (лекции
- 10–13);

квадрики в пространстве (лекции 14–17).

Данная лекция не входит ни в одну из этих частей и носит вспомогательный характер. В ней вводится понятие определителя для квадратных матриц второго и третьего порядков, указываются некоторые свойства этих определителей и демонстрируется, как они возникают и используются при решении систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными и трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Этот материал пригодится нам уже в самое ближайшее время. Более общее понятие определителей произвольного порядка, их свойства и использование при решении систем n линейных уравнений с n неизвестными изучаются в

Понятие матрицы (1)

Мы начнем с важного для дальнейшего понятия матрицы.

Определение

Матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из чисел. Если матрица содержит m строк и n столбцов, то будем говорить, что она имеет *размер* $m \times n$. Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется *квадратной*. В этом случае вместо термина «матрица размера $n \times n$», как правило, употребляется термин *квадратная матрица порядка* n. Числа, из которых составлена матрица, называются *элементами* матрицы. Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковый размер и на одинаковых местах в них стоят одни и те же элементы.

Ниже приведен пример матрицы размера 2 × 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & \sqrt{2} \\ 0 & 0{,}5 & \pi \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в записи матрицы мы не проводим линии, отделяющие строки и столбцы друг от друга. Слева и справа матрица ограничивается круглыми скобками.

Понятие матрицы (2)

Для обозначения элементов матриц применяется двойная индексация, при этом первый индекс означает номер строки, а второй — номер столбца, в которых стоит данный элемент. Например, a_{12} — элемент, стоящий в первой строке и втором столбце. Произвольная матрица размера $m \times n$ обозначается следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Кратко эта матрица записывается в виде $A = (a_{ij})$, а если важно указать ее размер — то в виде $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Определение

Если $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n, то элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ* матрицы A, а элементы $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \dots, a_{n1}$ — ее *побочную диагональ*.

Определители второго порядка

Определение

Определителем квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

второго порядка (или просто *определителем второго порядка*) называется число, равное $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Это число обозначается через

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \text{ или } |A|, \text{ или } \det A.$$

Иными словами,

- *определитель второго порядка равен произведению элементов на главной диагонали минус произведение элементов на побочной диагонали.*

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-7) - (-3) \cdot 1 = -11; \quad \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Определители второго порядка и системы линейных уравнений

Определители возникли в теории систем линейных уравнений. Покажем, как применяется понятие определителя второго порядка к решению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Такая система в общем виде может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \qquad (1)$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Определение

Матрица $A = (a_{ij})$, составленная из коэффициентов системы (1), называется *основной матрицей* этой системы. Определитель этой матрицы (т. е. определитель Δ) называется *определителем системы* (1).

Заметим, что

определитель Δ_i (при $i = 1, 2$) получается из определителя Δ заменой i-го столбца основной матрицы на столбец свободных членов.

Теорема Крамера для систем второго порядка (1)

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 (теорема Крамера для систем второго порядка)

Если $\Delta \neq 0$, *то система* (1) *имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам* $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$.

Теорема 1 является частным случаем теоремы Крамера, которая относится к системам n линейных уравнений с n неизвестными при любом n. Доказательство теоремы Крамера в общем случае дается в курсе алгебры. В данной лекции мы докажем ее только что сформулированный частный случай.

Доказательство. Подставим $\frac{\Delta_1}{\Delta}$ вместо x_1 и $\frac{\Delta_2}{\Delta}$ вместо x_2 в первое уравнение системы. Получим

$$a_{11} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{12} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{a_{11}(b_1 a_{22} - b_2 a_{12}) + a_{12}(a_{11} b_2 - a_{21} b_1)}{\Delta} =$$

$$= \frac{a_{11} b_1 a_{22} - a_{11} b_2 a_{12} + a_{12} a_{11} b_2 - a_{12} a_{21} b_1}{\Delta} =$$

$$= \frac{b_1(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})}{\Delta} = \frac{b_1 \cdot \Delta}{\Delta} = b_1.$$

Теорема Крамера для систем второго порядка (2)

Итак, пара чисел $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}\right)$ является решением первого уравнения системы (1). Аналогично проверяется, что она является решением второго уравнения этой системы. Мы доказали, что решение системы (1) существует. Осталось доказать его единственность.

Пусть (x_1^0, x_2^0) — решение системы (1), т. е. справедливы равенства

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 = b_1, \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 = b_2. \end{cases} \qquad (2)$$

Умножим первое из этих равенств на a_{22}, второе на $-a_{12}$, и рассмотрим сумму полученных равенств:

$$a_{11}a_{22}x_1^0 + a_{12}a_{22}x_2^0 - a_{21}a_{12}x_1^0 - a_{22}a_{12}x_2^0 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1^0 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

т. е. $\Delta \cdot x_1^0 = \Delta_1$. Поскольку $\Delta \neq 0$, имеем $x_1^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$. Теперь умножим первое из равенств (2) на a_{21}, второе на $-a_{11}$ и сложим полученные равенства. После очевидных преобразований получим, что $\Delta \cdot x_2^0 = \Delta_2$, откуда $x_2^0 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$. Мы взяли произвольное решение (x_1^0, x_2^0) системы (1) и доказали, что оно совпадает с решением $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}\right)$. Это означает, что решение единственно. Теорема доказана.

Определители третьего порядка (1)

Определение

Определителем квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

третьего порядка (или просто *определителем третьего порядка*) называется число, равное

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Это число обозначается через

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ или } |A|, \text{ или } \det A.$$

Определители третьего порядка (2)

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 1 + (-1)\cdot 5\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot (-2) -$$

$$- 2\cdot 3\cdot 1 - (-1)\cdot 0\cdot 1 - 1\cdot 5\cdot (-2) = 2.$$

Формула для вычисления определителя третьего порядка выглядит весьма громоздко. На следующем слайде мы укажем правило, позволяющее ее запомнить. Чтобы его сформулировать, заметим, что определитель 3-го порядка является алгебраической суммой шести слагаемых, из которых три берутся со знаком плюс, а три — со знаком минус. Каждое слагаемое — это произведение трех элементов матрицы. На рис. 1 на следующем слайде изображены два экземпляра определителя квадратной матрицы 3-го порядка. Элементы матрицы изображены точками. Линии в обоих определителях соединяют те элементы, которые при вычислении определителя перемножаются, при этом слева соединены элементы, произведение которых подсчитывается со знаком плюс, а справа — элементы, произведение которых подсчитывается со знаком минус.

Правило треугольников

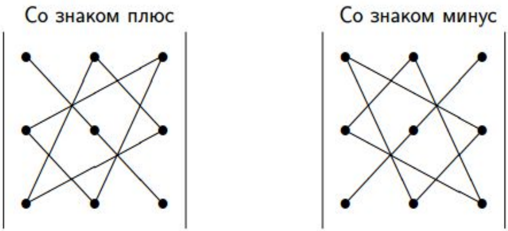

Рис. 1. Графическая иллюстрация правила треугольников

Мы видим, что справедливо следующее

Правило треугольников

Со знаком плюс берется произведение элементов, образующих главную диагональ, а также элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком минус — произведение элементов, образующих побочную диагональ, а также элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными побочной диагонали.

Определители третьего порядка и системы линейных уравнений

Определители третьего порядка можно применять для решения систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными подобно тому, как определители второго порядка применяются для решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (3)$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема Крамера для систем третьего порядка

Определение

Матрица $A = (a_{ij})$, составленная из коэффициентов системы (3), называется *основной матрицей* этой системы. Определитель этой матрицы (т. е. определитель Δ) называется *определителем системы* (3).

Заметим, что

- определитель Δ_i (при $i = 1, 2, 3$) получается из определителя Δ заменой i-го столбца основной матрицы на столбец свободных членов.

Справедливо следующее утверждение, которое аналогично доказанной выше теореме 1.

Теорема 2 (теорема Крамера для систем третьего порядка)

Если $\Delta \neq 0$, *то система* (3) *имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам* $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$. □

Мы не будем доказывать эту теорему, поскольку она, как и теорема 1, является частным случаем теоремы Крамера, которая доказывается в курсе алгебры.

Разложение определителя третьего порядка по строке или столбцу (1)

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица третьего порядка и $1 \leqslant i, j \leqslant 3$. Обозначим через M_{ij} определитель квадратной матрицы второго порядка, получающейся при вычеркивании из матрицы A i-й строки и j-го столбца, и положим $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Число A_{ij} называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij}.

Справедлив следующий факт, который сводит вычисление определителя третьего порядка к вычислению трех определителей второго порядка.

Разложение определителя третьего порядка по строке или столбцу

Определитель квадратной матрицы третьего порядка равен сумме произведений элементов произвольной ее строки [произвольного ее столбца] на их алгебраические дополнения.

Разложение определителя третьего порядка по строке или столбцу (2)

В частности,

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Это равенство называется *разложением определителя третьего порядка по первой строке*. Докажем его. Отталкиваясь от определения определителя третьего порядка, имеем

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} =$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$
$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

что и требовалось доказать. □

Формулы разложения определителя третьего порядка по двум другим строкам и по всем столбцам записываются и доказываются аналогично. В качестве примера, напишем формулу разложения определителя третьего порядка по второму столбцу:

$$|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}.$$

Транспонирование матрицы

Введем одно важное для дальнейшего понятие.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размеров $m \times n$. Матрицей, *транспонированной* к A, называется матрица $B = (b_{ij})$ размеров $n \times m$, определяемая равенством $b_{ij} = a_{ji}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и $j = 1, 2, \ldots, m$. Иными словами, матрица B получается из A заменой строк на столбцы: первая строка матрицы A становится первым стобцом матрицы B, вторая строка матрицы A — вторым стобцом матрицы B и т. д. Матрица, транспонированная к A обозначается через $A^{\top}$.

Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

- матрица, транспонированная к квадратной, является квадратной матрицей того же порядка, что и исходная матрица.

Свойства определителей

Укажем ряд свойств определителей второго и третьего порядков.

Свойства определителей второго и третьего порядков

Пусть A — квадратная матрица второго или третьего порядка.

1) *Если все элементы некоторой строки [некоторого столбца] матрицы A умножить на одно и то же число, то ее определитель умножится на то же самое число.*
2) *Если матрица A содержит нулевую строку [нулевой столбец], то ее определитель равен нулю.*
3) *Если две строки [два столбца] матрицы A поменять местами, то ее определитель умножится на -1.*
4) *Если матрица A содержит две одинаковые строки [два одинаковых столбца], то ее определитель равен нулю.*
5) *Если к некоторой строке [некоторому столбцу] матрицы A прибавить другую ее строку, умноженную на некоторое число [другой ее столбец, умноженный на некоторое число], то ее определитель не изменится.*
6) *При транспонировании матрицы ее определитель не меняется (иными словами, $|A^{\top}| = |A|$).*

Доказательство свойств 1) и 2)

Доказательство. Если A — квадратная матрица второго порядка, то все свойства проверяются прямыми и несложными вычислениями, основанными на определении определителя второго порядка. Поэтому далее будем считать, что $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица третьего порядка.

1) Для определенности будем считать, что речь идет о первой строке матрицы (во всех остальных случаях доказательство абсолютно аналогично). Обозначим через $A' = (a'_{ij})$ матрицу, полученную после умножения первой строки матрицы A на ненулевое число t. Алгебраическое дополнение элемента a'_{ij} будем обозначать через A'_{ij}. Поскольку вторые и третьи строки в матрицах A и A' совпадают, имеем $A'_{1j} = A_{1j}$ для $j = 1, 2, 3$. Раскладывая определитель матрицы A' по первой строке, имеем:

$$|A'| = ta_{11}A_{11} + ta_{12}A_{12} + ta_{13}A_{13} = t(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) = t \cdot |A|,$$

что и требовалось доказать.

2) Разлагая определитель матрицы A по нулевой строке (или нулевому столбцу), с очевидностью получаем, что $|A| = 0$.

Доказательство свойств 3) и 4)

3) Для определенности будем считать, что мы переставили местами первые две строки матрицы A (во всех остальных случаях доказательство абсолютно аналогично). Раскладывая определитель полученной матрицы по второй строке, имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -(a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}) =$$

$$= -(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) = -|A|,$$

что и требовалось доказать.

4) Это свойство легко вытекает из предыдущего. В самом деле, если поменять местами две одинаковых строки (два одинаковых столбца), то определитель матрицы, с одной стороны, не изменится (так как матрица останется той же самой), а с другой умножится на -1 (по предыдущему свойству). Но единственное число, которое при умножении на -1 не меняется, — это число 0.

Доказательство свойств 5) и 6)

5) Для определенности будем считать, что к первой строке матрицы A прибавляется ее вторая строка (во всех остальных случаях доказательство абсолютно аналогично). Обозначим через $A' = (a'_{ij})$ матрицу, полученную в результате указанного действия. Как и в доказательстве свойства 1), имеем $A'_{1j} = A_{1j}$ для $j = 1, 2, 3$. Раскладывая определитель матрицы A' по первой строке и используя свойство 4), имеем:

$$
\begin{aligned}
|A'| &= (a_{11} + ta_{21})A_{11} + (a_{12} + ta_{22})A_{12} + (a_{13} + ta_{23})A_{13} = \\
&= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + t(a_{21}A_{21} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}) = \\
&= |A| + t \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A| + t \cdot 0 = |A|,
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать.

6) Вычисляя определитель матрицы $A^{\top}$ по определению, имеем:

$$
|A^{\top}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -
$$

$$
- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} = |A|,
$$

что и требовалось доказать.