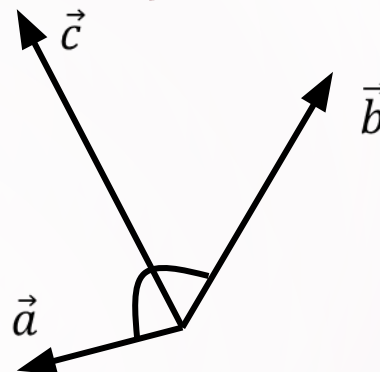
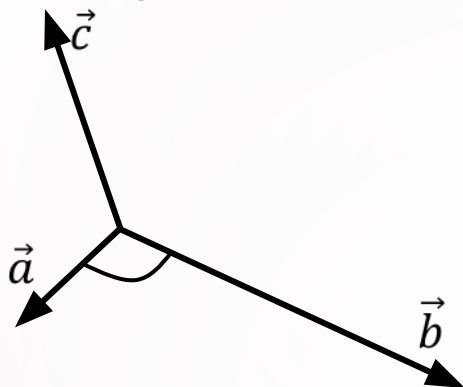


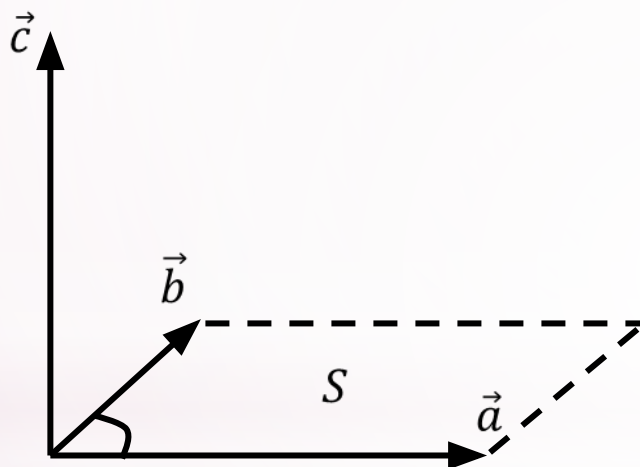
# Векторное произведение векторов

Три некопланарных вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , взятые в указанном порядке, образуют *правую тройку*, если с конца третьего вектора  $\vec{c}$  кратчайший поворот от первого вектора  $\vec{a}$  ко второму вектору  $\vec{b}$  виден совершающимся против часовой стрелки, и *левую*, если по часовой.



**Векторным произведением** вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$  который:

- 1) перпендикулярен векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , то есть  $\vec{c} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{c} \perp \vec{b}$ ;
- 2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  как на сторонах,



то есть  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ , где  $\varphi = (\widehat{\vec{a}; \vec{b}})$ .

- 3) векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  образуют правую тройку векторов.

Векторное произведение векторов принято обозначать  $\vec{a} \times \vec{b}$  или  $[\vec{a}, \vec{b}]$ .

## Свойства векторного произведения

- ❖ При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}).$$

- ❖ Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя

$$\beta \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\beta \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\beta \cdot \vec{b})$$

- ❖ Два ненулевых вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0},$$

в частности  $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$ .

- ❖ Векторное произведение обладает распределительным свойством

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Пусть заданы два вектора  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ .

Выведем формулу векторного произведения.

Пользуясь свойствами векторного произведения, заполним таблицу, которая пригодится нам в дальнейшем:

Пусть заданы два вектора  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ .

Выведем формулу векторного произведения.

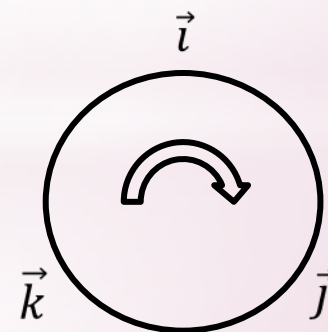
Пользуясь свойствами векторного произведения, заполним таблицу, которая пригодится нам в дальнейшем:

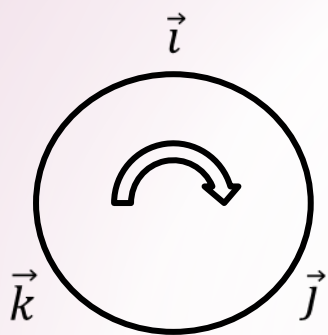

Пусть заданы два вектора  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ .

Выведем формулу векторного произведения.

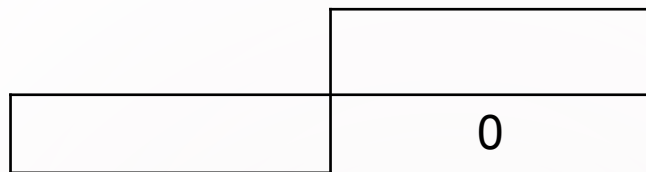
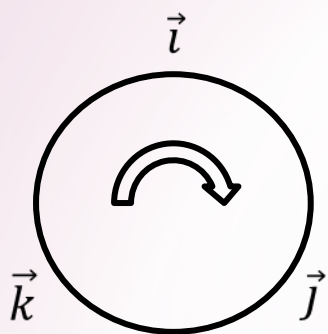
Пользуясь свойствами векторного произведения, заполним таблицу, которая пригодится нам в дальнейшем:

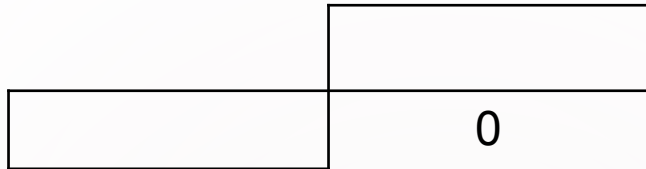
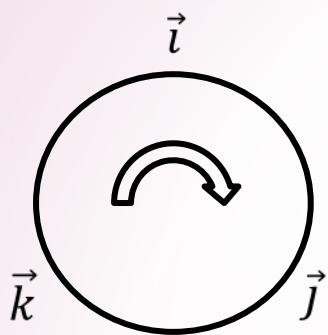

Чтобы не ошибиться со знаком, удобно, пользоваться схемой: если направление кратчайшего пути от первого вектора к второму совпадает с направлением стрелки, то произведение равно третьему вектору, если не совпадает — третий вектор берется со знаком «минус».





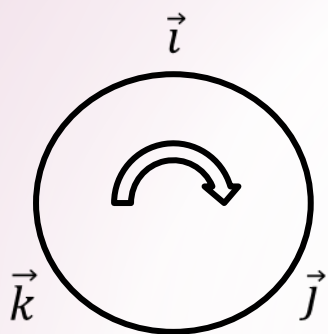






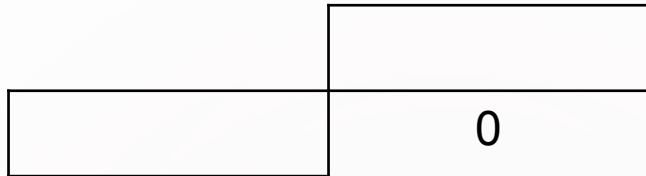
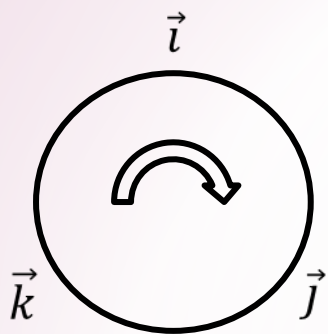
0

0



0

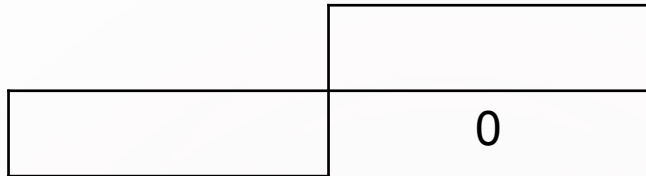
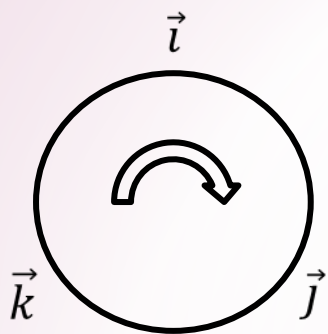
0



0

0

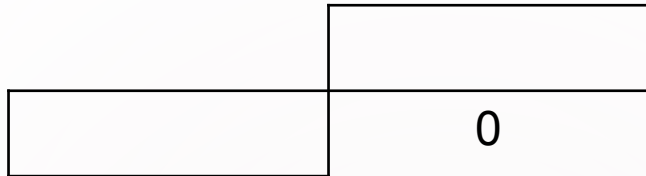
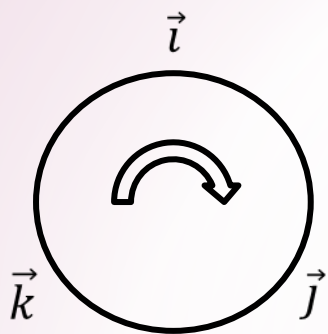
0



0

0

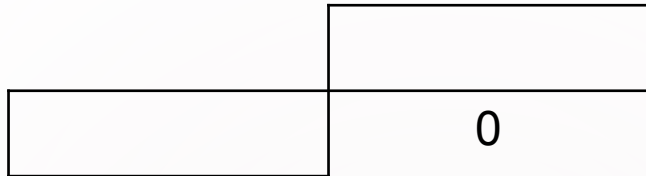
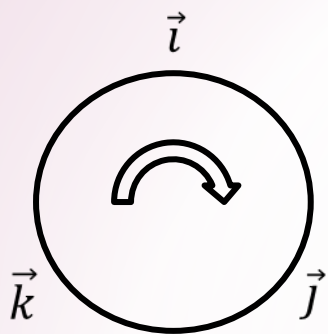
0



0

0

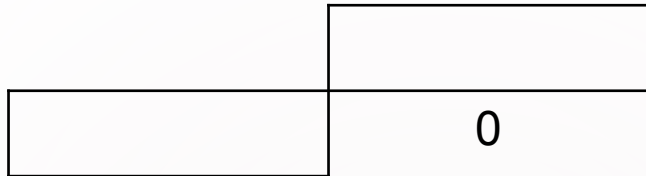
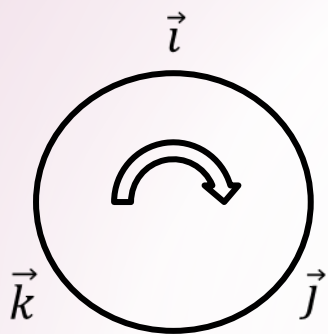
0



0

0

0

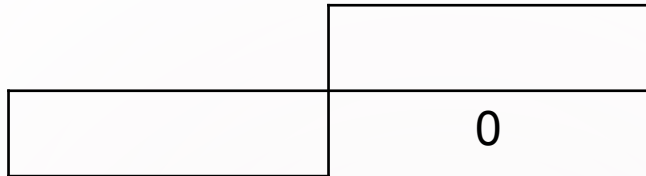
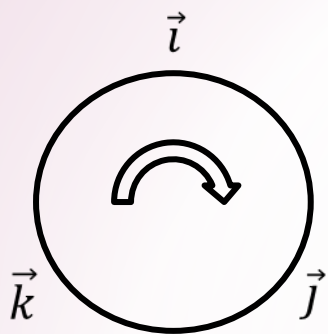


0

0

0

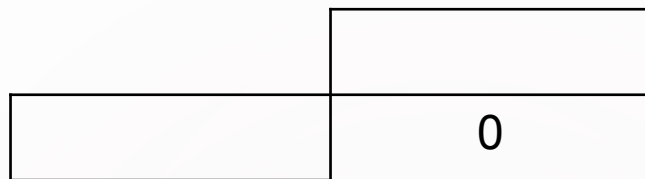
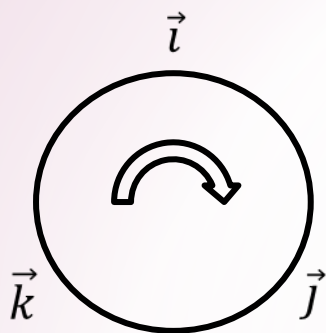




0

0

0

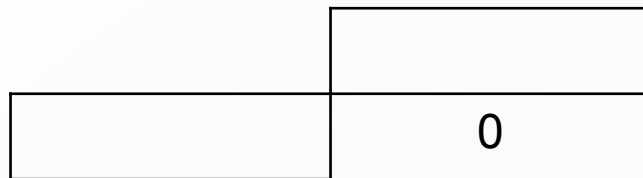
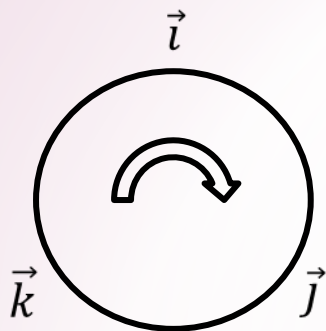


0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\vec{a} \times \vec{b} =$$

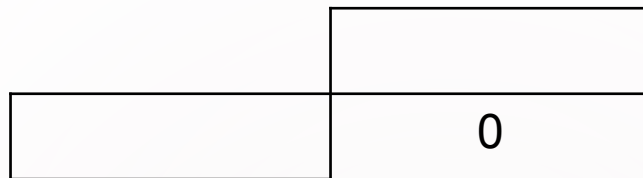
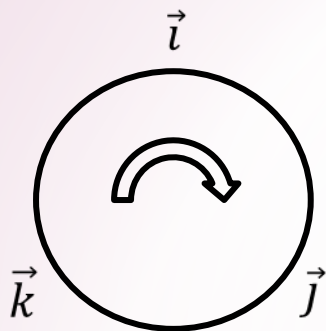


0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k})$$

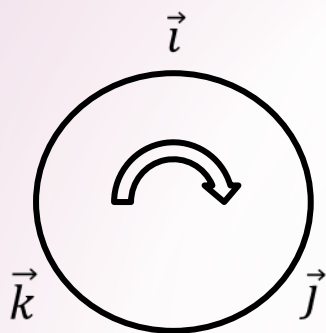


0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) +$$



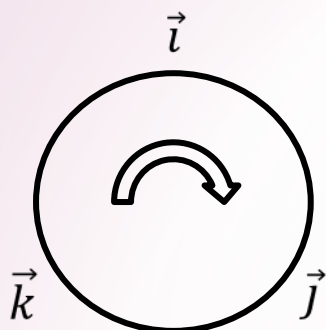
0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) +$$

$$+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) +$$



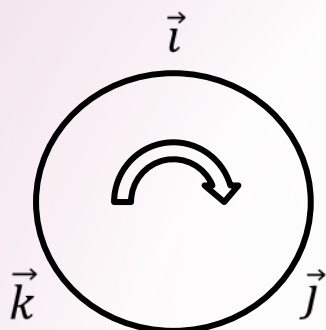
0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) +$$

$$+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) +$$

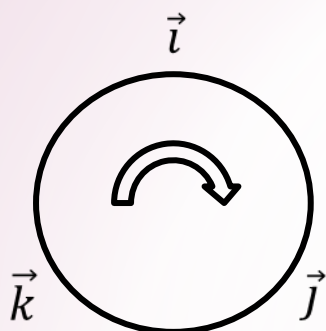


0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + \end{aligned}$$



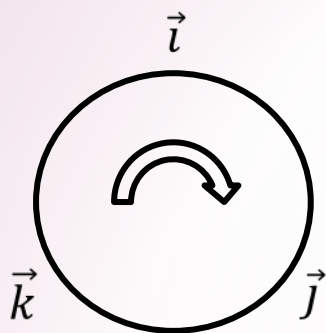
0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \end{aligned}$$



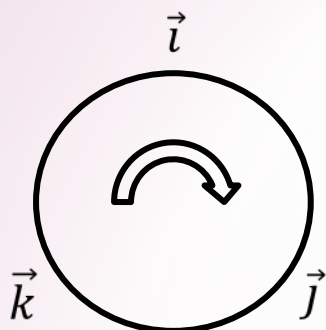


0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + \end{aligned}$$

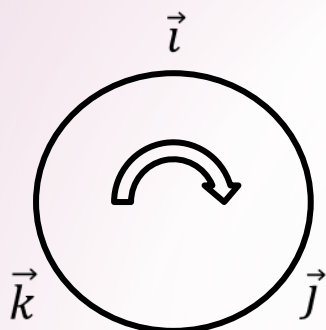


0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + \end{aligned}$$

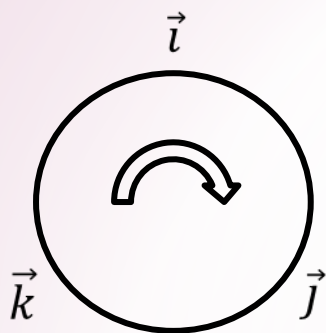


0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + \end{aligned}$$

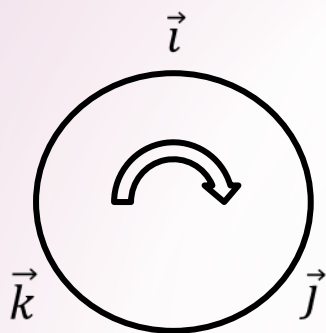


0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = \end{aligned}$$

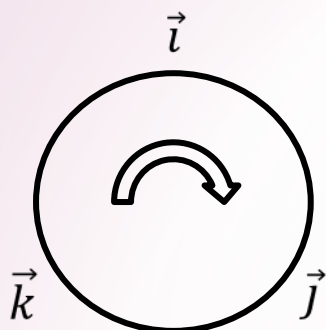


0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + \end{aligned}$$



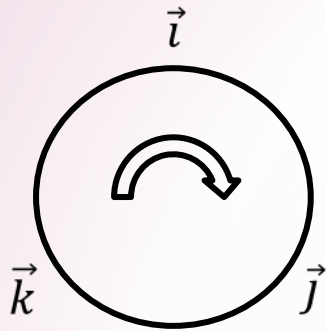
0

0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} + \end{aligned}$$



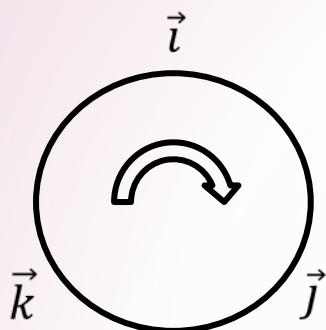
0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} + a_x \cdot b_z \cdot (-\vec{j}) + \end{aligned}$$





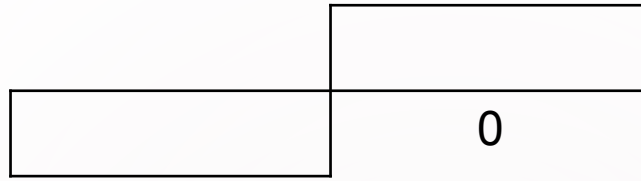
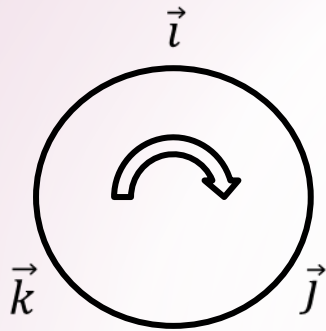
0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} + a_x \cdot b_z \cdot (-\vec{j}) + a_y \cdot b_x \cdot (-\vec{k}) + \end{aligned}$$



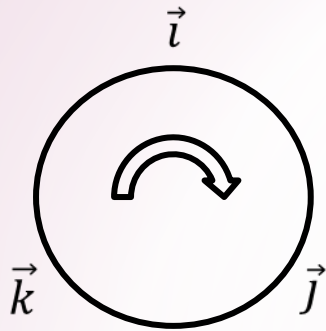


0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} + a_x \cdot b_z \cdot (-\vec{j}) + a_y \cdot b_x \cdot (-\vec{k}) + 0 + \end{aligned}$$

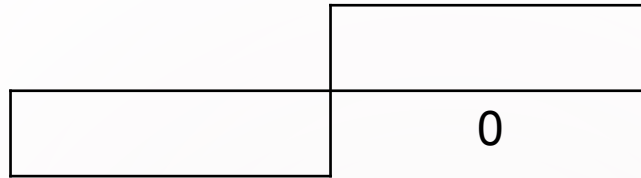
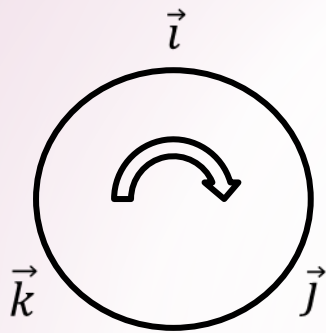


0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} + a_x \cdot b_z \cdot (-\vec{j}) + a_y \cdot b_x \cdot (-\vec{k}) + 0 + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} + \end{aligned}$$

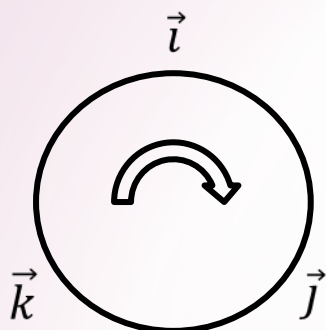


0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} + a_x \cdot b_z \cdot (-\vec{j}) + a_y \cdot b_x \cdot (-\vec{k}) + 0 + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_x \cdot \vec{j} + \end{aligned}$$

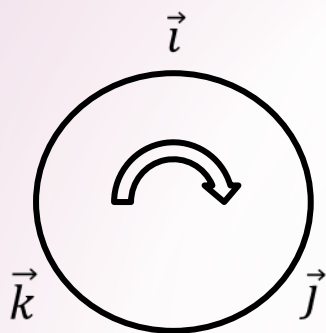


0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} + a_x \cdot b_z \cdot (-\vec{j}) + a_y \cdot b_x \cdot (-\vec{k}) + 0 + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_x \cdot \vec{j} + a_z \cdot b_y \cdot \\ &(-\vec{i}) + \end{aligned}$$

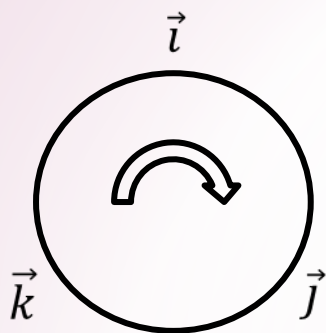


0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} + a_x \cdot b_z \cdot (-\vec{j}) + a_y \cdot b_x \cdot (-\vec{k}) + 0 + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_x \cdot \vec{j} + a_z \cdot b_y \cdot \\ &(-\vec{i}) + 0 \end{aligned}$$



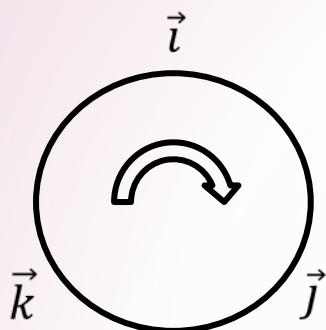
0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} + a_x \cdot b_z \cdot (-\vec{j}) + a_y \cdot b_x \cdot (-\vec{k}) + 0 + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_x \cdot \vec{j} + a_z \cdot b_y \cdot \\ &(-\vec{i}) + 0 = a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} \end{aligned}$$



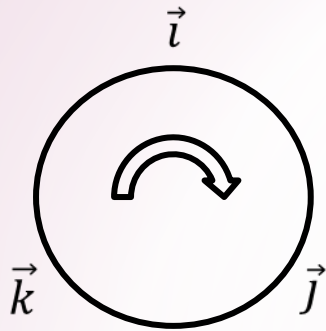


0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} + a_x \cdot b_z \cdot (-\vec{j}) + a_y \cdot b_x \cdot (-\vec{k}) + 0 + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_x \cdot \vec{j} + a_z \cdot b_y \cdot \\ &(-\vec{i}) + 0 = a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} - a_x \cdot b_z \cdot \vec{j} \end{aligned}$$



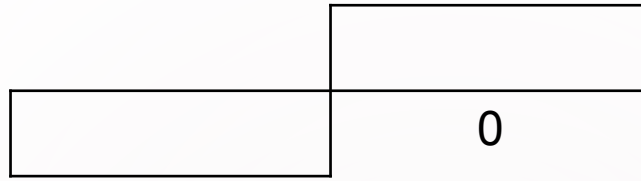
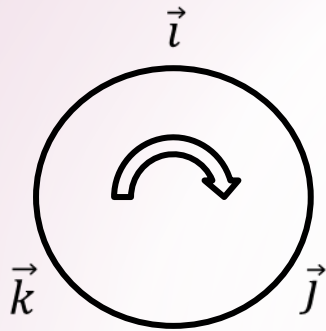
0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} + a_x \cdot b_z \cdot (-\vec{j}) + a_y \cdot b_x \cdot (-\vec{k}) + 0 + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_x \cdot \vec{j} + a_z \cdot b_y \cdot \\ &(-\vec{i}) + 0 = a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} - a_x \cdot b_z \cdot \vec{j} - a_y \cdot b_x \cdot \vec{i} \end{aligned}$$



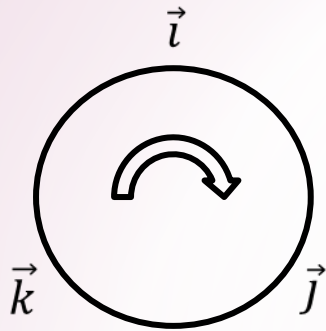


0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} + a_x \cdot b_z \cdot (-\vec{j}) + a_y \cdot b_x \cdot (-\vec{k}) + 0 + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_x \cdot \vec{j} + a_z \cdot b_y \cdot \\ &(-\vec{i}) + 0 = a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} - a_x \cdot b_z \cdot \vec{j} - a_y \cdot b_x \cdot \vec{k} + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} \end{aligned}$$

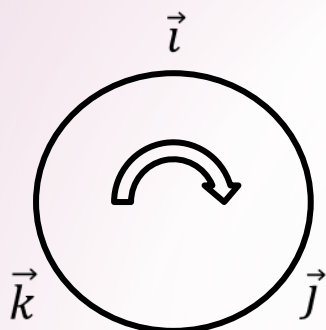


0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} + a_x \cdot b_z \cdot (-\vec{j}) + a_y \cdot b_x \cdot (-\vec{k}) + 0 + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_x \cdot \vec{j} + a_z \cdot b_y \cdot \\ &(-\vec{i}) + 0 = a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} - a_x \cdot b_z \cdot \vec{j} - a_y \cdot b_x \cdot \vec{k} + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_x \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

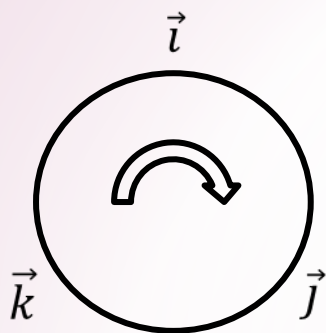


0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} + a_x \cdot b_z \cdot (-\vec{j}) + a_y \cdot b_x \cdot (-\vec{k}) + 0 + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_x \cdot \vec{j} + a_z \cdot b_y \cdot \\ &(-\vec{i}) + 0 = a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} - a_x \cdot b_z \cdot \vec{j} - a_y \cdot b_x \cdot \vec{k} + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_x \cdot \vec{j} - a_z \cdot b_y \cdot \vec{i} \end{aligned}$$

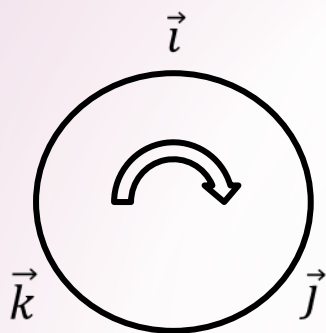


0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} + a_x \cdot b_z \cdot (-\vec{j}) + a_y \cdot b_x \cdot (-\vec{k}) + 0 + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_x \cdot \vec{j} + a_z \cdot b_y \cdot \\ &(-\vec{i}) + 0 = a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} - a_x \cdot b_z \cdot \vec{j} - a_y \cdot b_x \cdot \vec{k} + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_x \cdot \vec{j} - a_z \cdot b_y \cdot \vec{i} = \\ &= (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} \end{aligned}$$

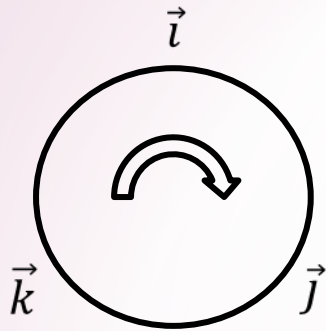


0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} + a_x \cdot b_z \cdot (-\vec{j}) + a_y \cdot b_x \cdot (-\vec{k}) + 0 + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_x \cdot \vec{j} + a_z \cdot b_y \cdot \\ &(-\vec{i}) + 0 = a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} - a_x \cdot b_z \cdot \vec{j} - a_y \cdot b_x \cdot \vec{k} + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_x \cdot \vec{j} - a_z \cdot b_y \cdot \vec{i} = \\ &= (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (-a_x \cdot b_z + a_z \cdot b_x) \cdot \vec{j} \end{aligned}$$



0

0

0

Найдем векторное произведение этих векторов  $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$  и  $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ , перемножая их как многочлены согласно свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} + a_x \cdot b_z \cdot (-\vec{j}) + a_y \cdot b_x \cdot (-\vec{k}) + 0 + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_x \cdot \vec{j} + a_z \cdot b_y \cdot \\ &(-\vec{i}) + 0 = a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} - a_x \cdot b_z \cdot \vec{j} - a_y \cdot b_x \cdot \vec{k} + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_x \cdot \vec{j} - a_z \cdot b_y \cdot \vec{i} = \\ &= (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (-a_x \cdot b_z + a_z \cdot b_x) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k} \end{aligned}$$



$$(a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (-a_x \cdot b_z + a_z \cdot b_x) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k} =$$

$$\begin{aligned}
 & (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (-a_x \cdot b_z + a_z \cdot b_x) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k} = \\
 & = (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} - (a_x \cdot b_z - a_z \cdot b_x) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k} =
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (-a_x \cdot b_z + a_z \cdot b_x) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k} = \\
& = (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} - (a_x \cdot b_z - a_z \cdot b_x) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k} = \\
& = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (-a_x \cdot b_z + a_z \cdot b_x) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k} = \\
& = (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} - (a_x \cdot b_z - a_z \cdot b_x) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k} = \\
& = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (-a_x \cdot b_z + a_z \cdot b_x) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k} = \\
& = (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} - (a_x \cdot b_z - a_z \cdot b_x) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k} = \\
& = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (-a_x \cdot b_z + a_z \cdot b_x) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k} = \\
& = (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} - (a_x \cdot b_z - a_z \cdot b_x) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k} = \\
& = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Таким образом, векторное произведение можно найти по формуле:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Рассмотрим некоторые приложения векторного произведения.

### Коллинеарность векторов

Если  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , то  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ , верно и обратное утверждение.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

### Площадь параллелограмма и треугольника

$S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$  - площадь параллелограмма;

$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$  - площадь треугольника.

Благодарим за  
внимание!