

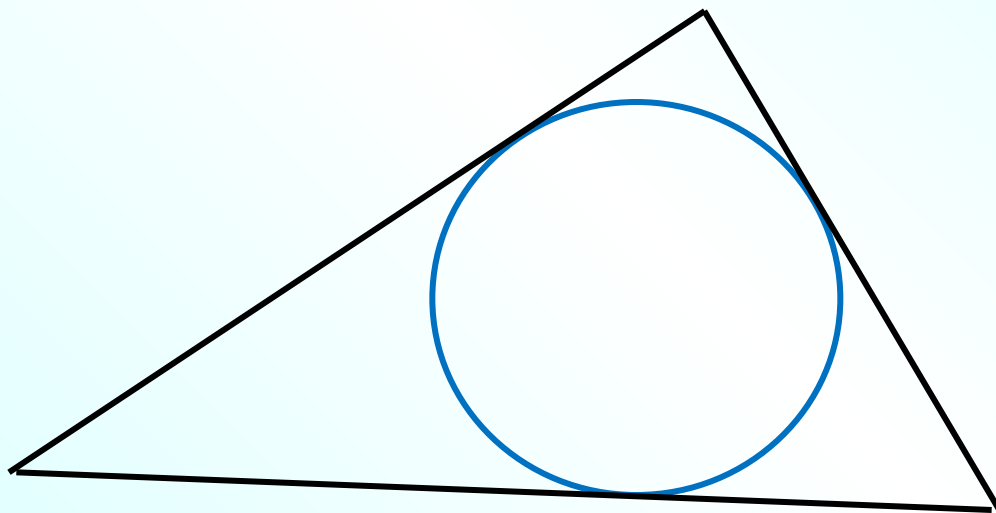
8 класс

*Вписанная и описанная
окружности*

Л.С. Атанасян Геометрия 7-9

Определение:

Окружность называют вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон



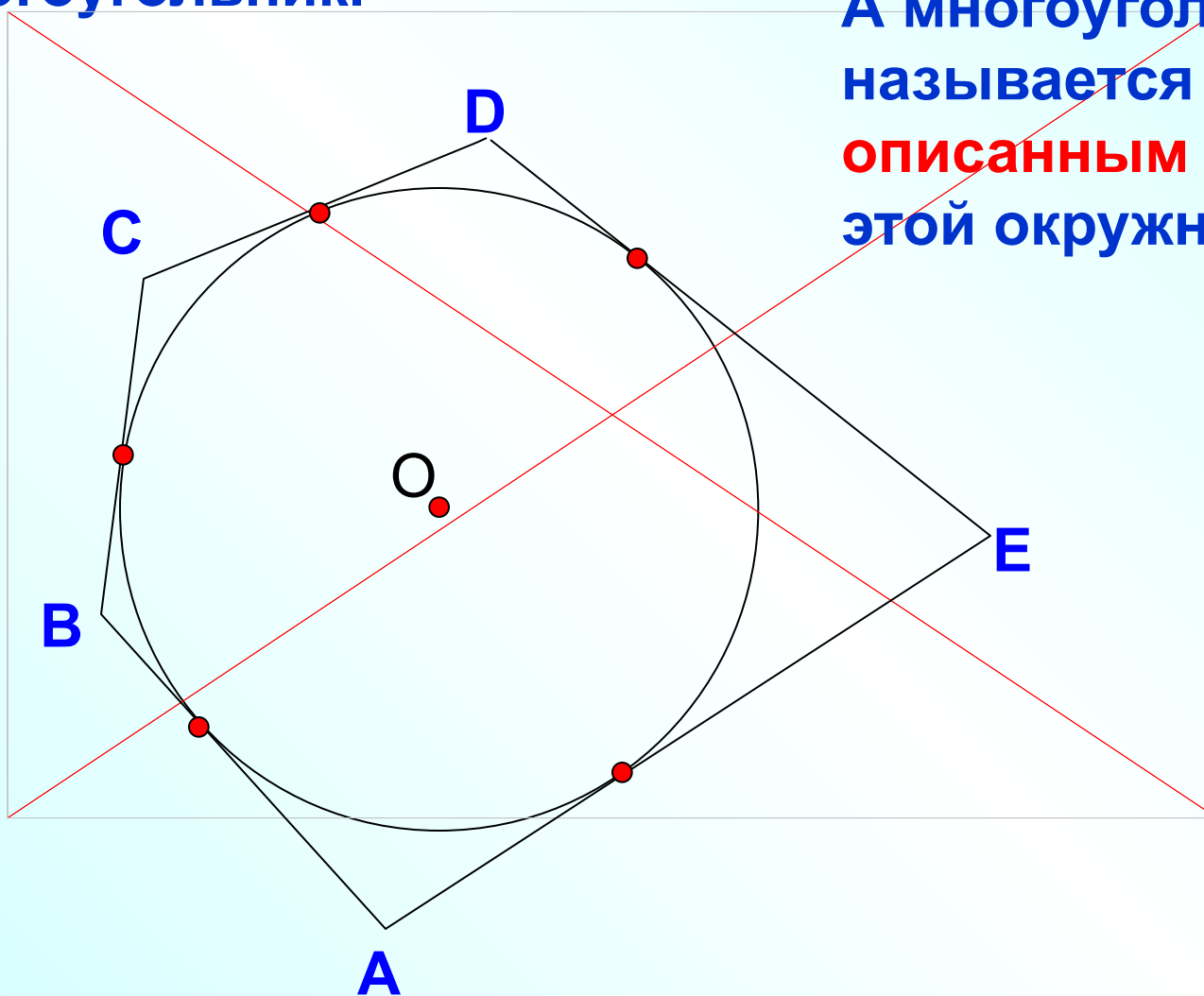
Радиус окружности вписанной в
прямоугольный треугольник,
определяется по формуле

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

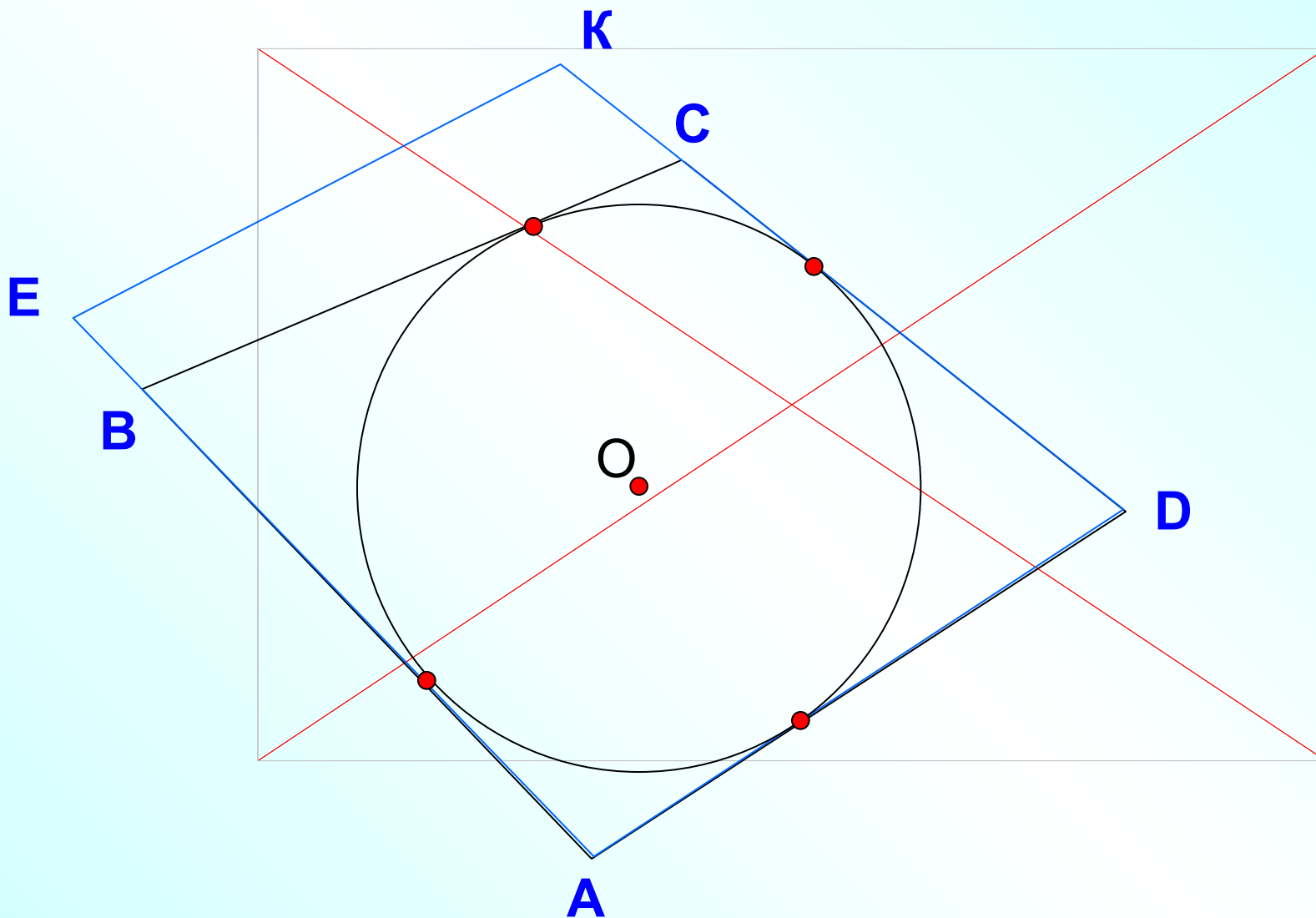
где r – радиус вписанной окружности,
 a и b - катеты, c - гипотенуза

Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется **вписанной** в многоугольник.

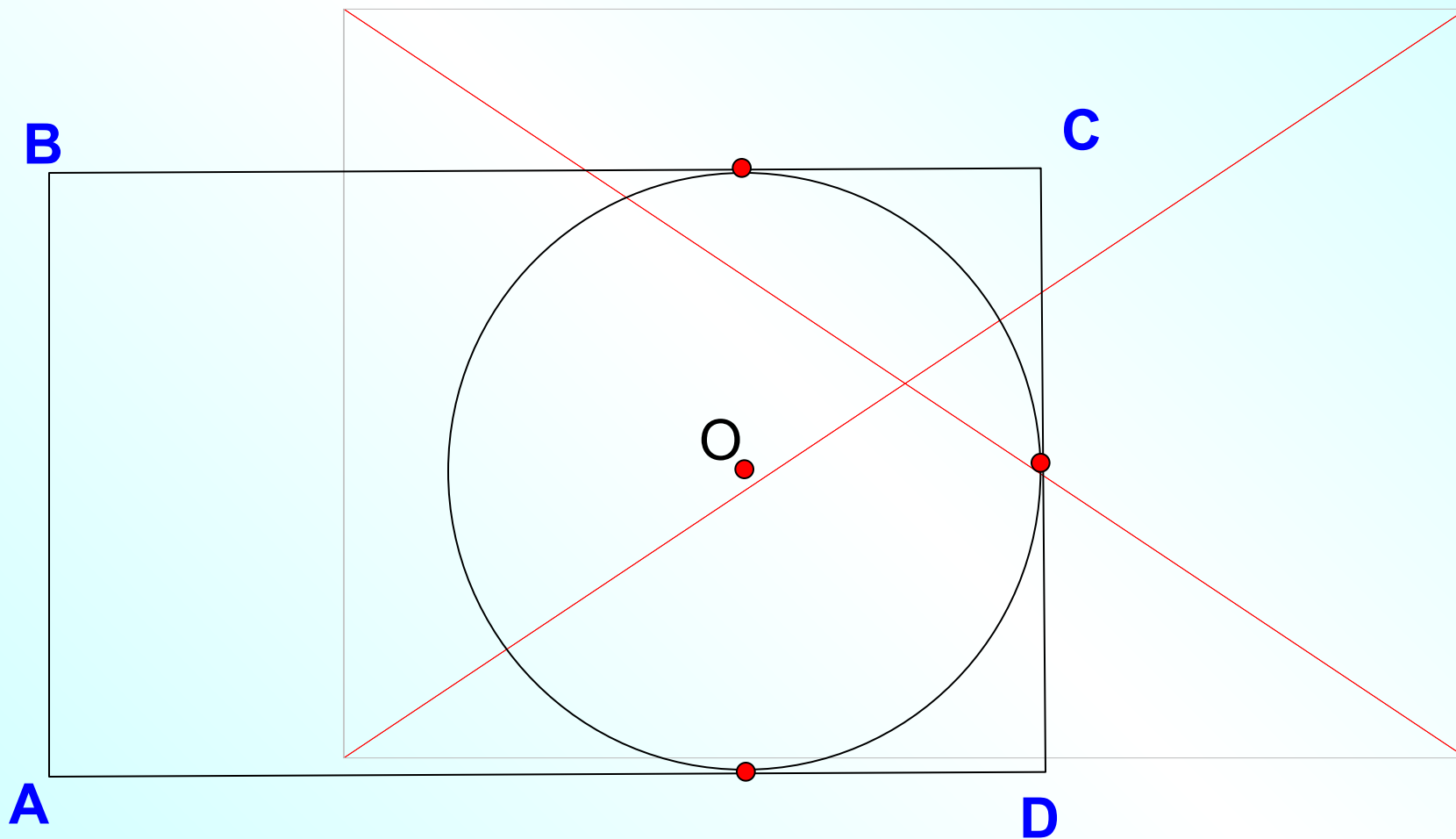
А многоугольник называется **описанным** около этой окружности.



Какой из двух четырехугольников $ABCD$ или $AЕКD$ является описанным?



В прямоугольник нельзя вписать окружность.

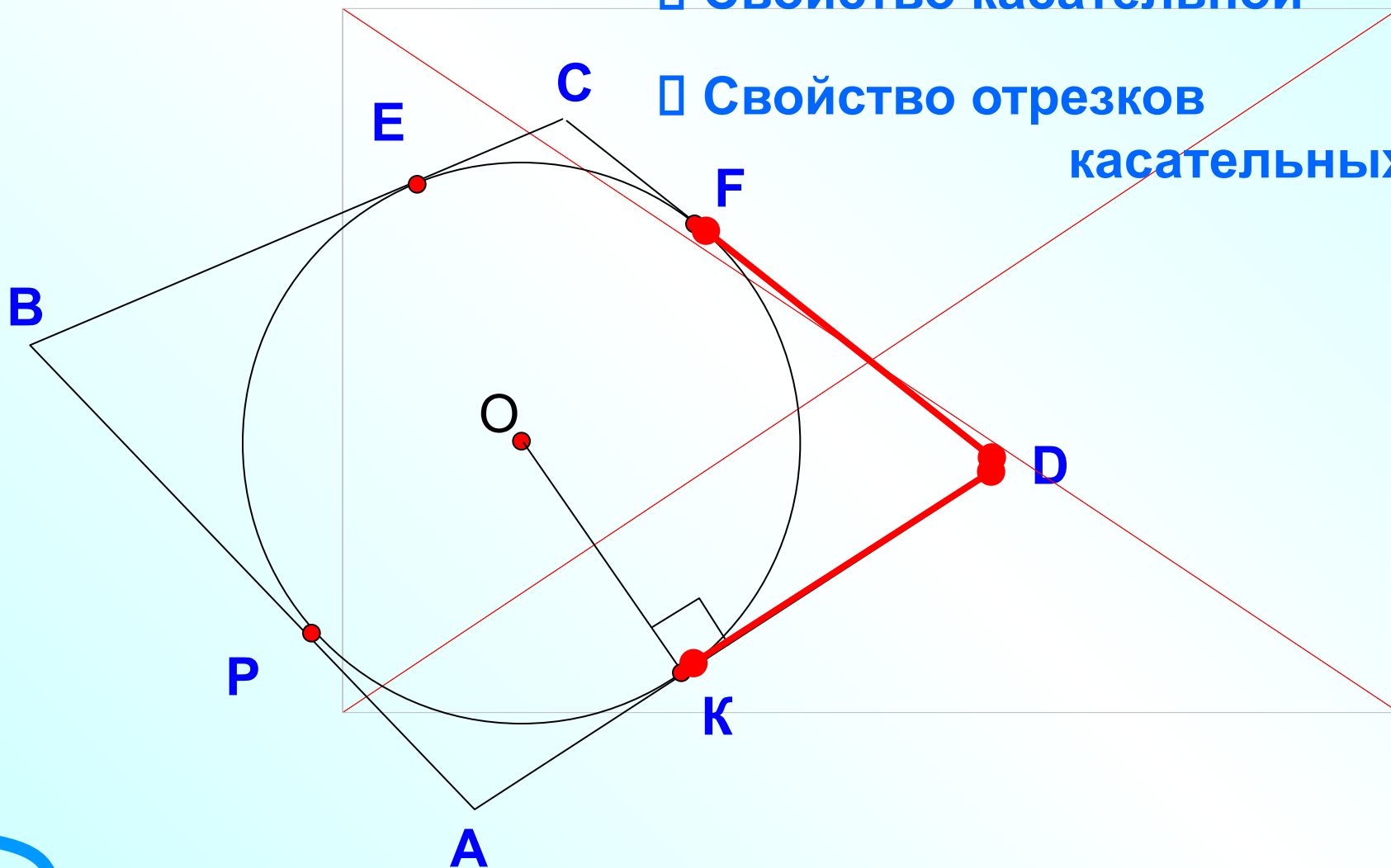


Какие известные свойства нам пригодятся при изучении вписанной окружности?

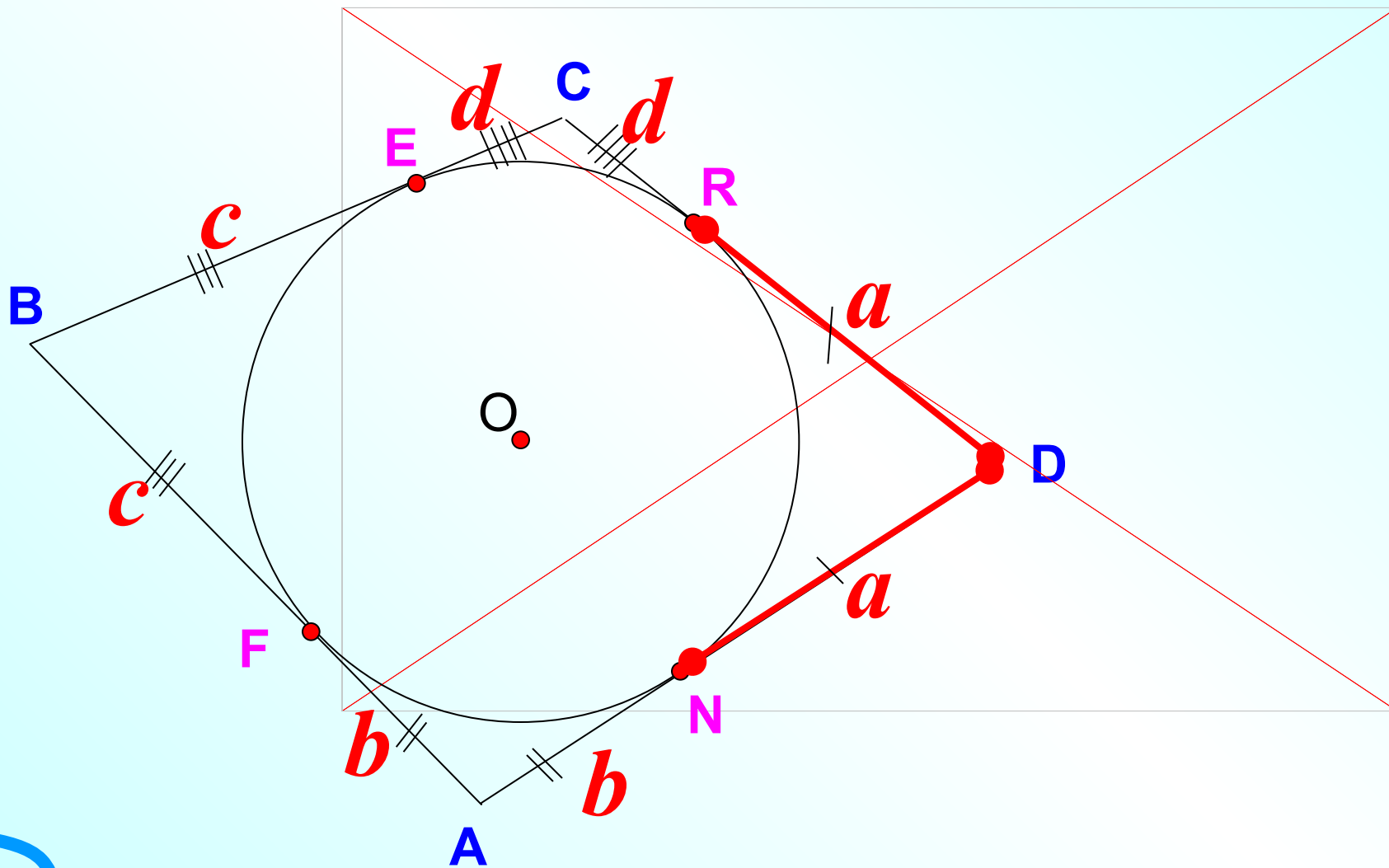
□ Свойство касательной

□ Свойство отрезков

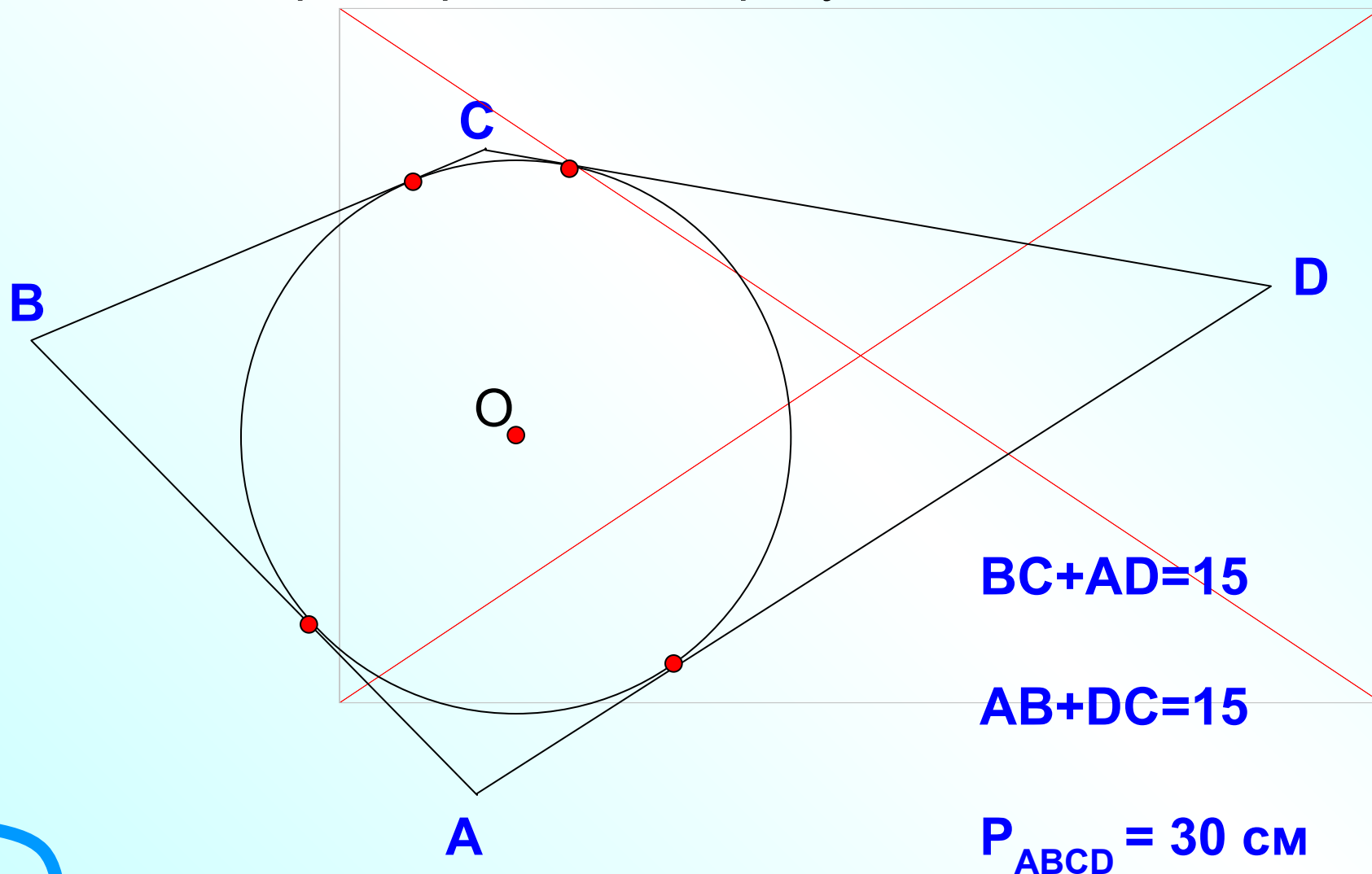
касательных



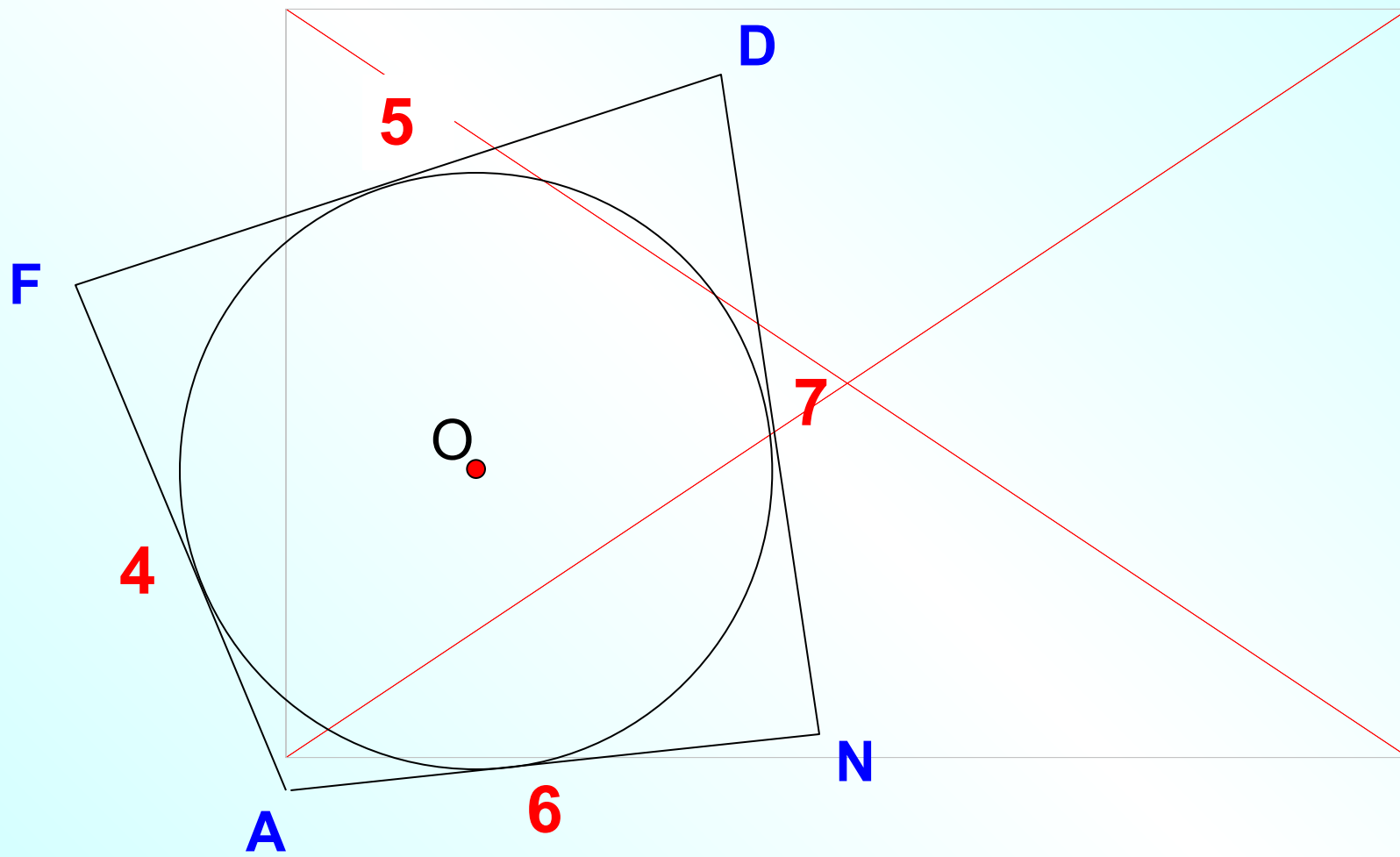
В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.



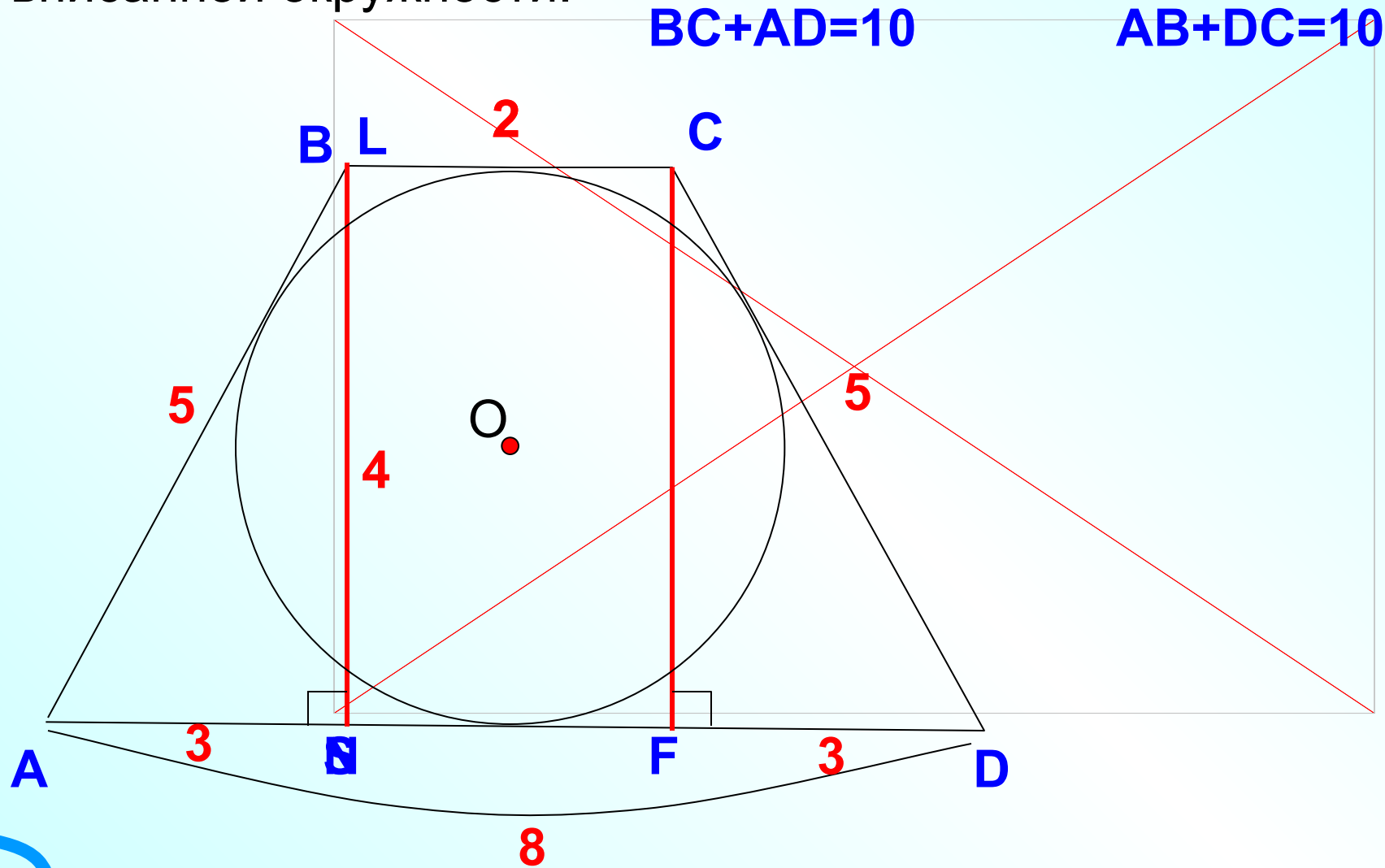
№ 695 Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 15 см. Найдите периметр этого четырехугольника.



Найти FD

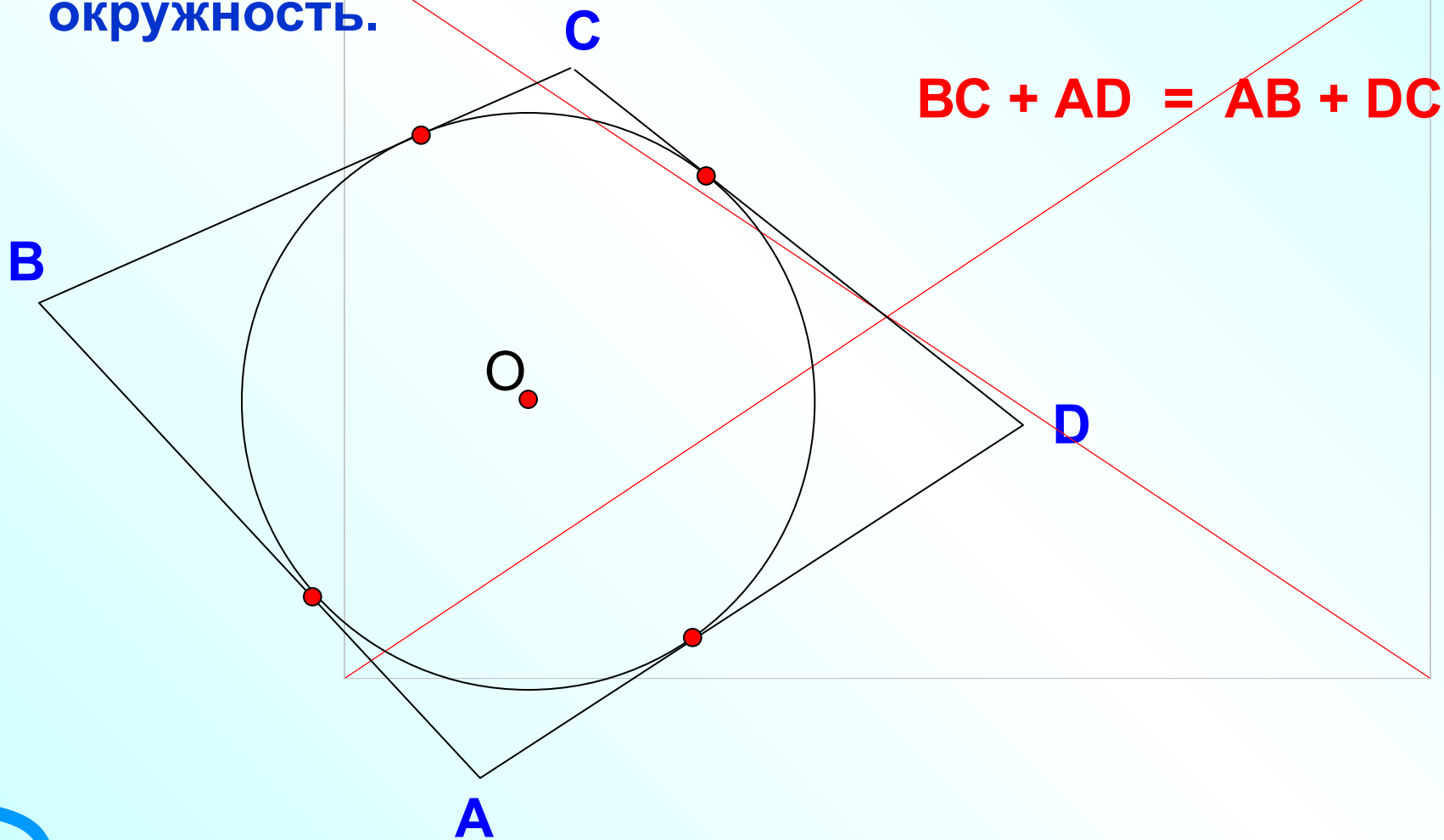


Равнобокая трапеция описана около окружности.
 Основания трапеции равны 2 и 8. найдите радиус
 вписанной окружности.

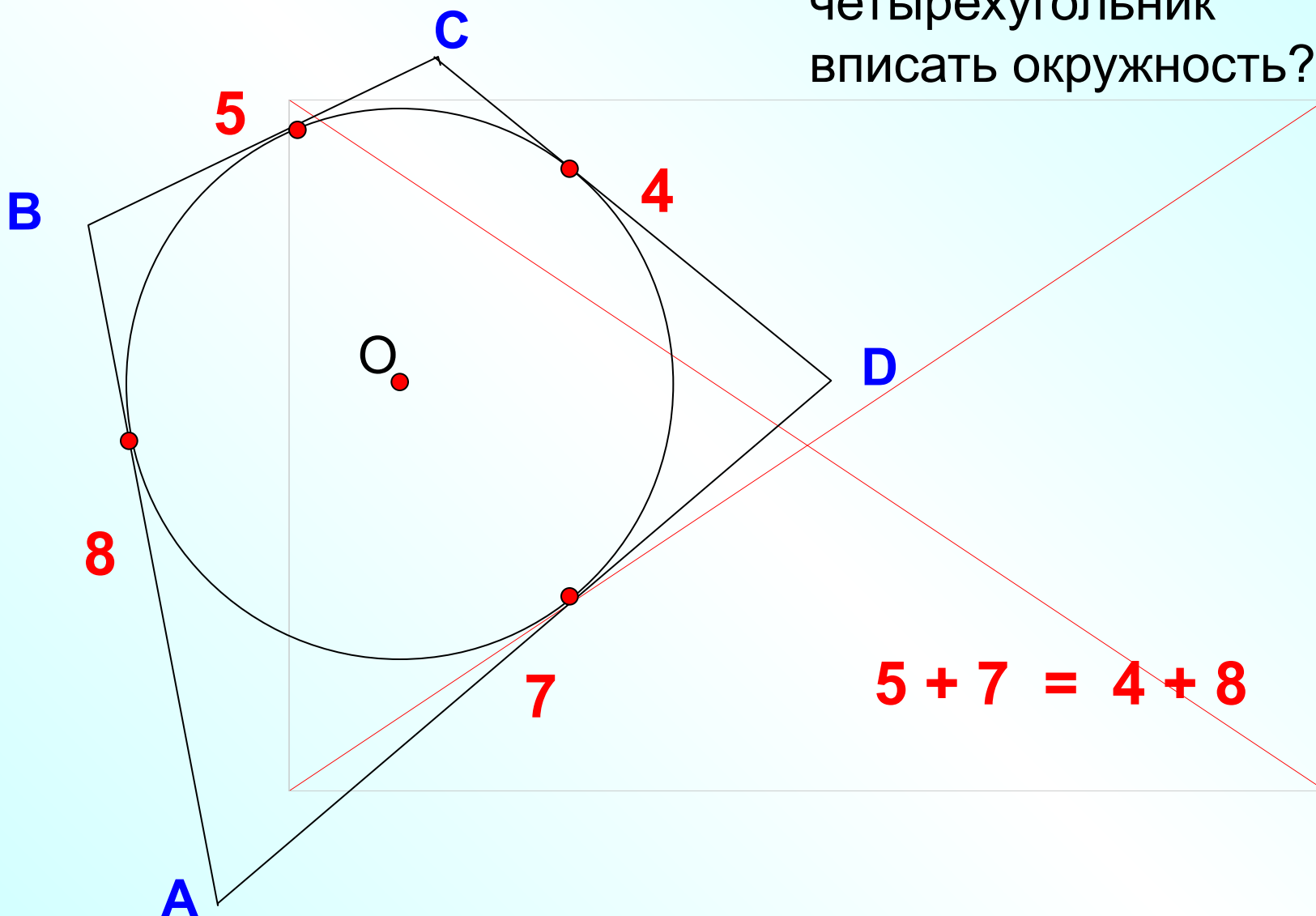


Верно и обратное утверждение.

Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.



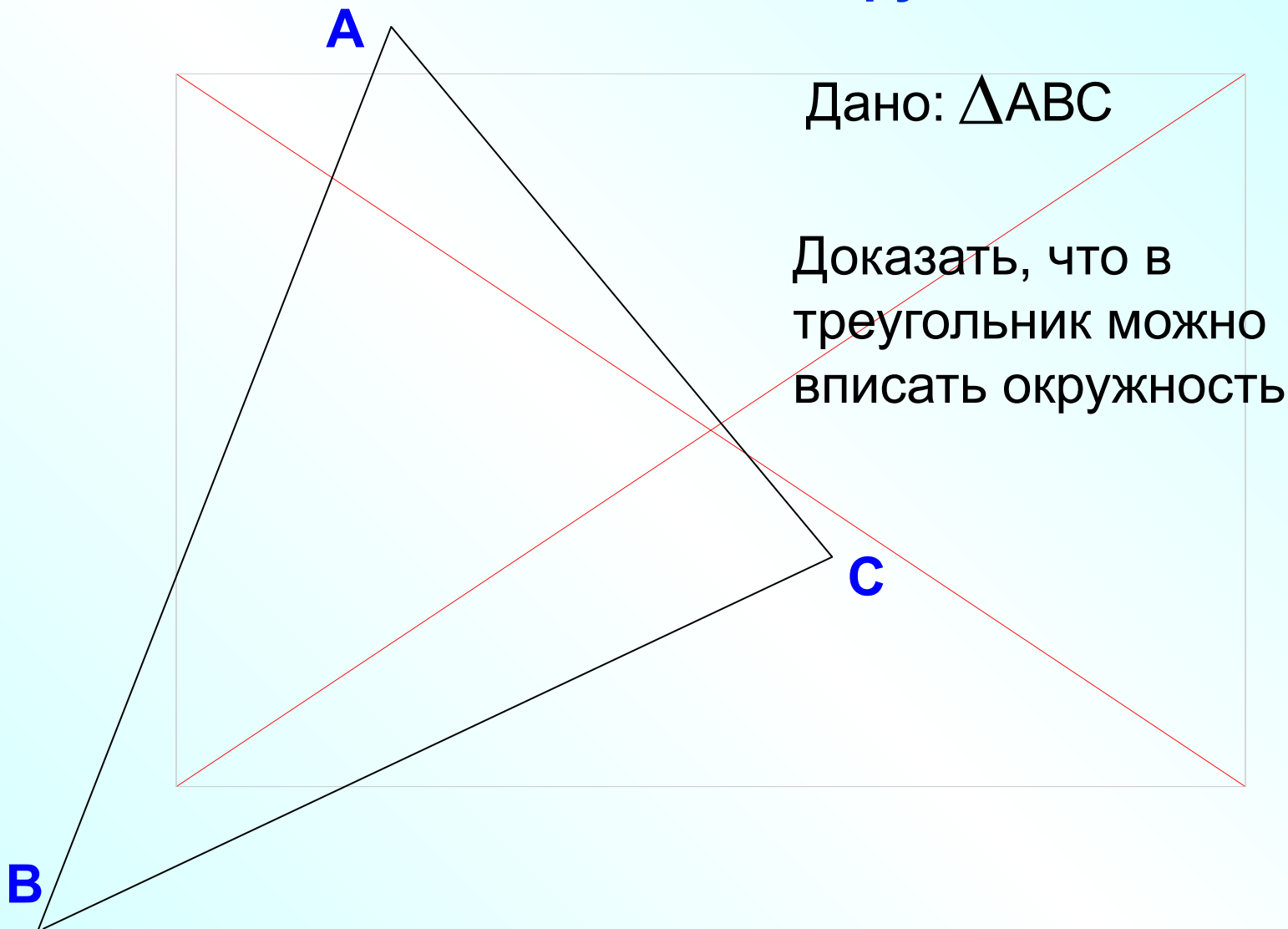
Можно ли в данный
четырехугольник
вписать окружность?



$$5 + 7 = 4 + 8$$

Теорема

В любой треугольник можно
вписать окружность.



1) ДП: биссектрисы углов треугольника

Проведем из точки O перпендикуляры к сторонам треугольника

2) $\triangle COL = \triangle COM$, по гипотенузе и ост. углу

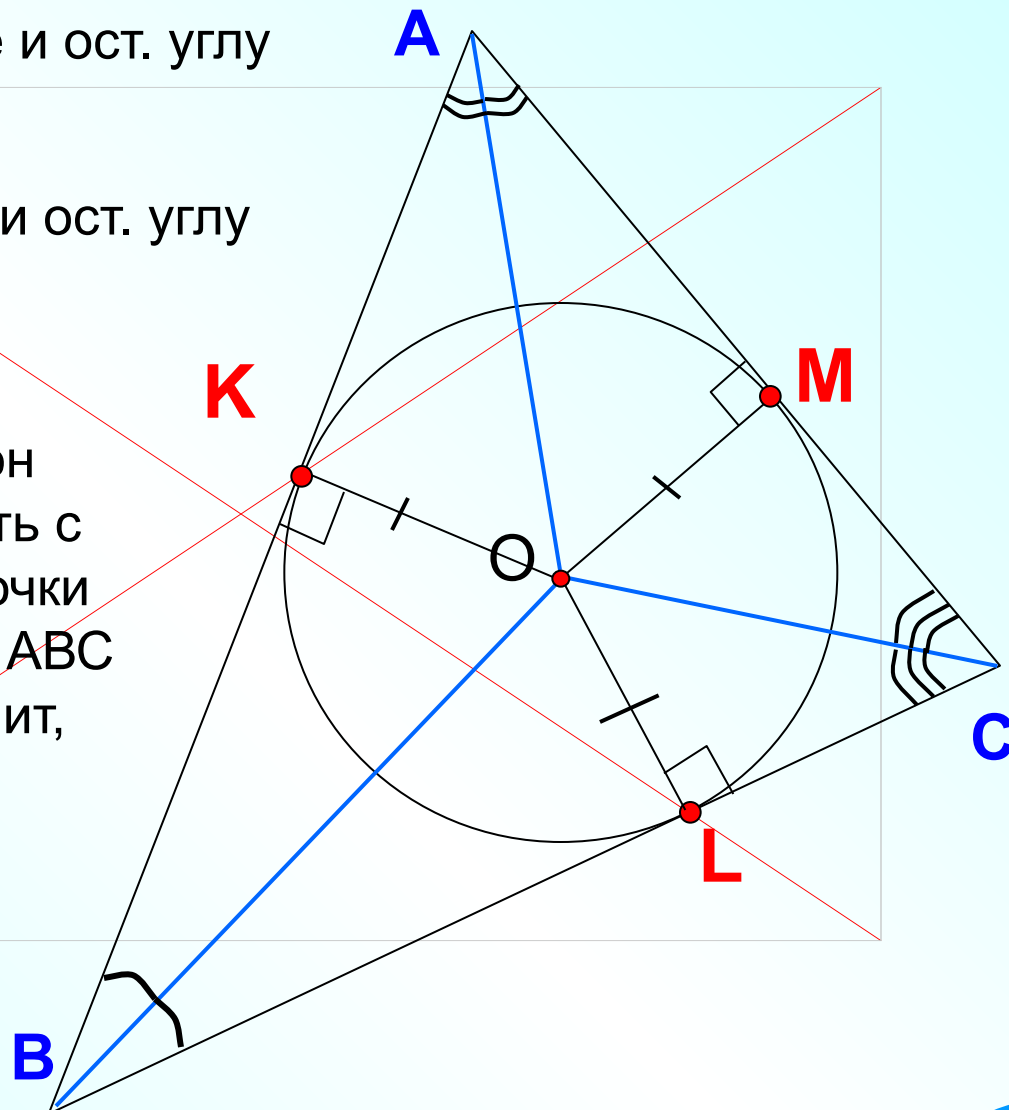
$$\Rightarrow OL = MO$$

3) $\triangle MOA = \triangle KOA$, по гипотенузе и ост. углу

$$\Rightarrow MO = KO$$

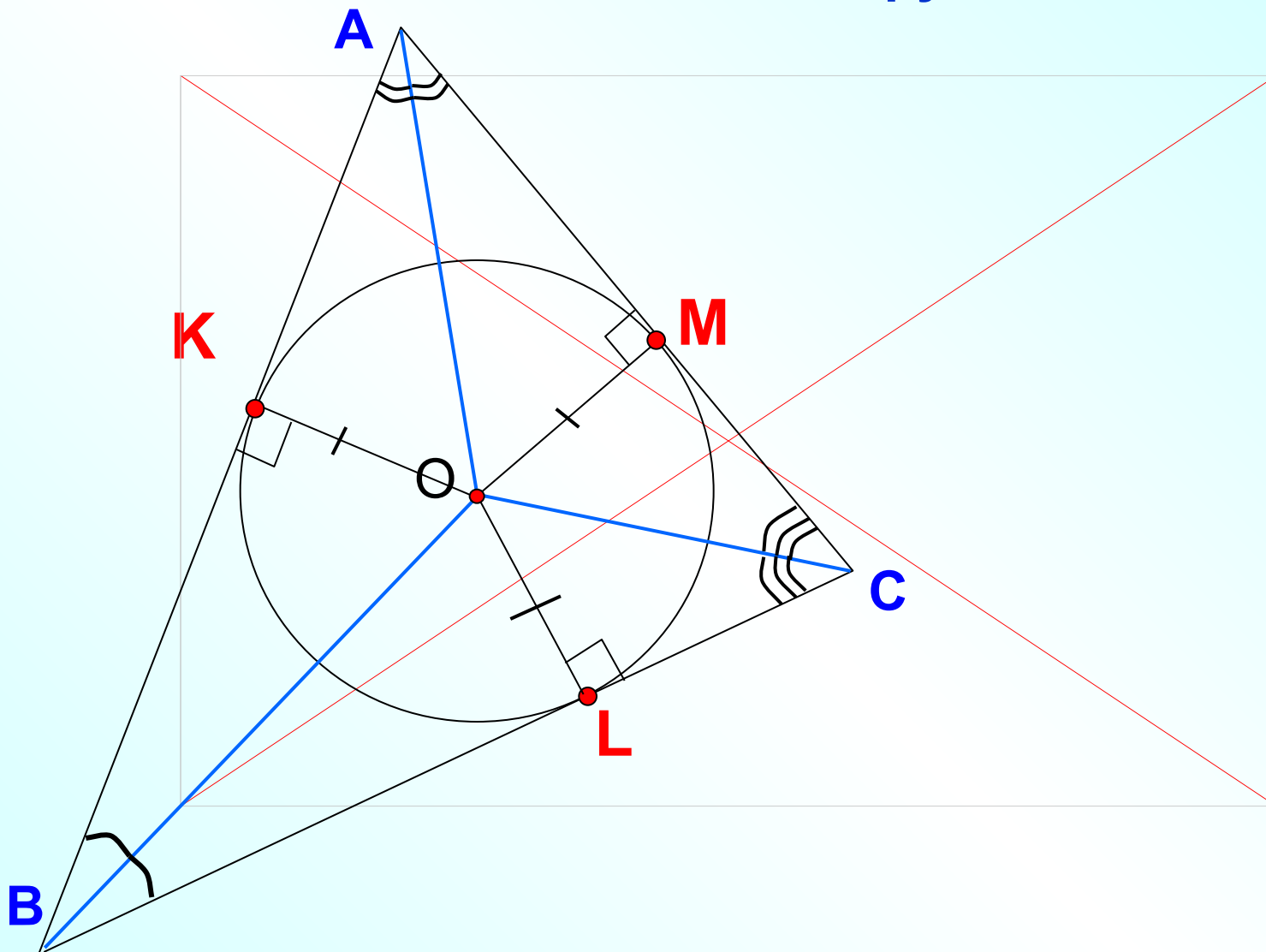
4) $LO = MO = KO$

точка O **равноудалена** от сторон треугольника. Значит, окружность с центром в т. O проходит через точки K , L и M . Стороны треугольника ABC касаются этой окружности. Значит, окружность является вписанной $\triangle ABC$.

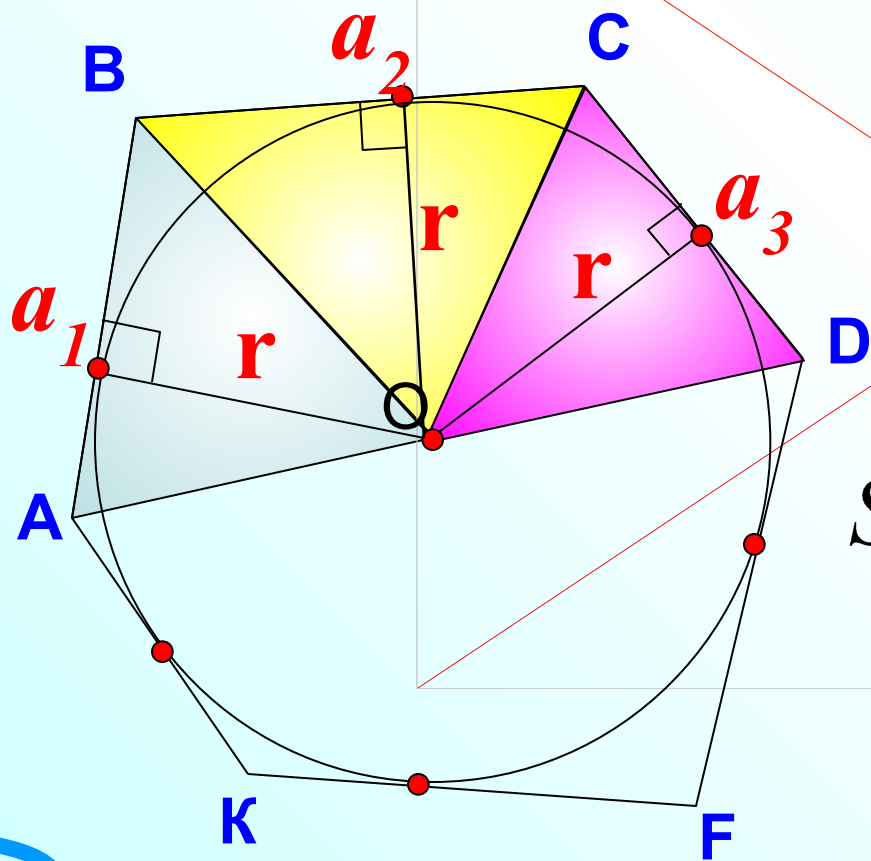


Теорема

В любой треугольник можно
вписать окружность.



№ 697 Докажите, что площадь описанного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.



$$S_{AOB} = \frac{1}{2} a_1 \cdot r$$

$$+ S_{BOC} = \frac{1}{2} a_2 \cdot r$$

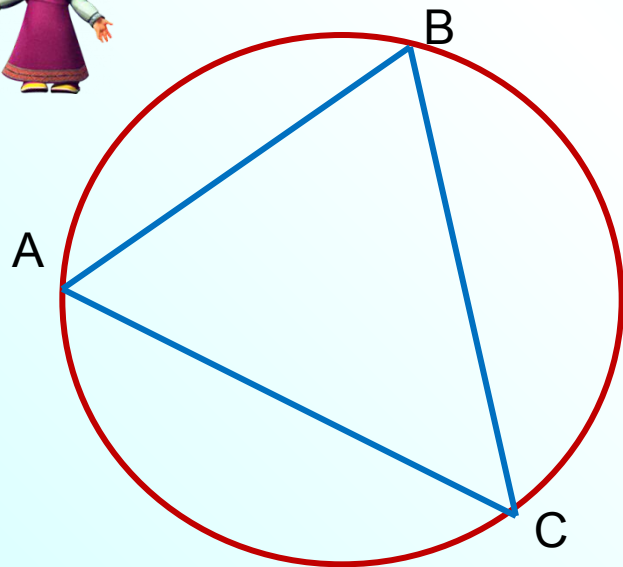
$$S_{COD} = \frac{1}{2} a_3 \cdot r$$

...

$$S_n = \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots) \cdot r$$

$$S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot r$$

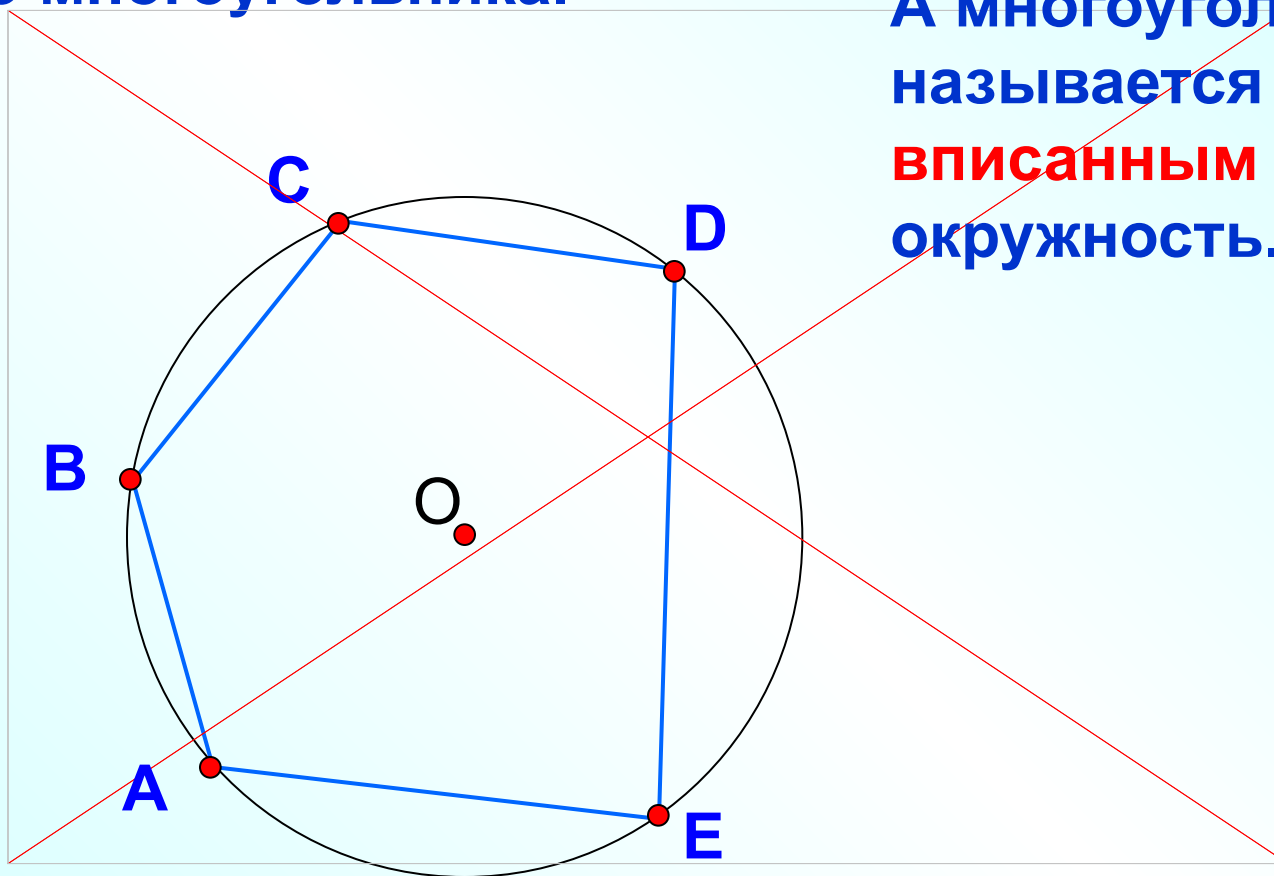
Определение:



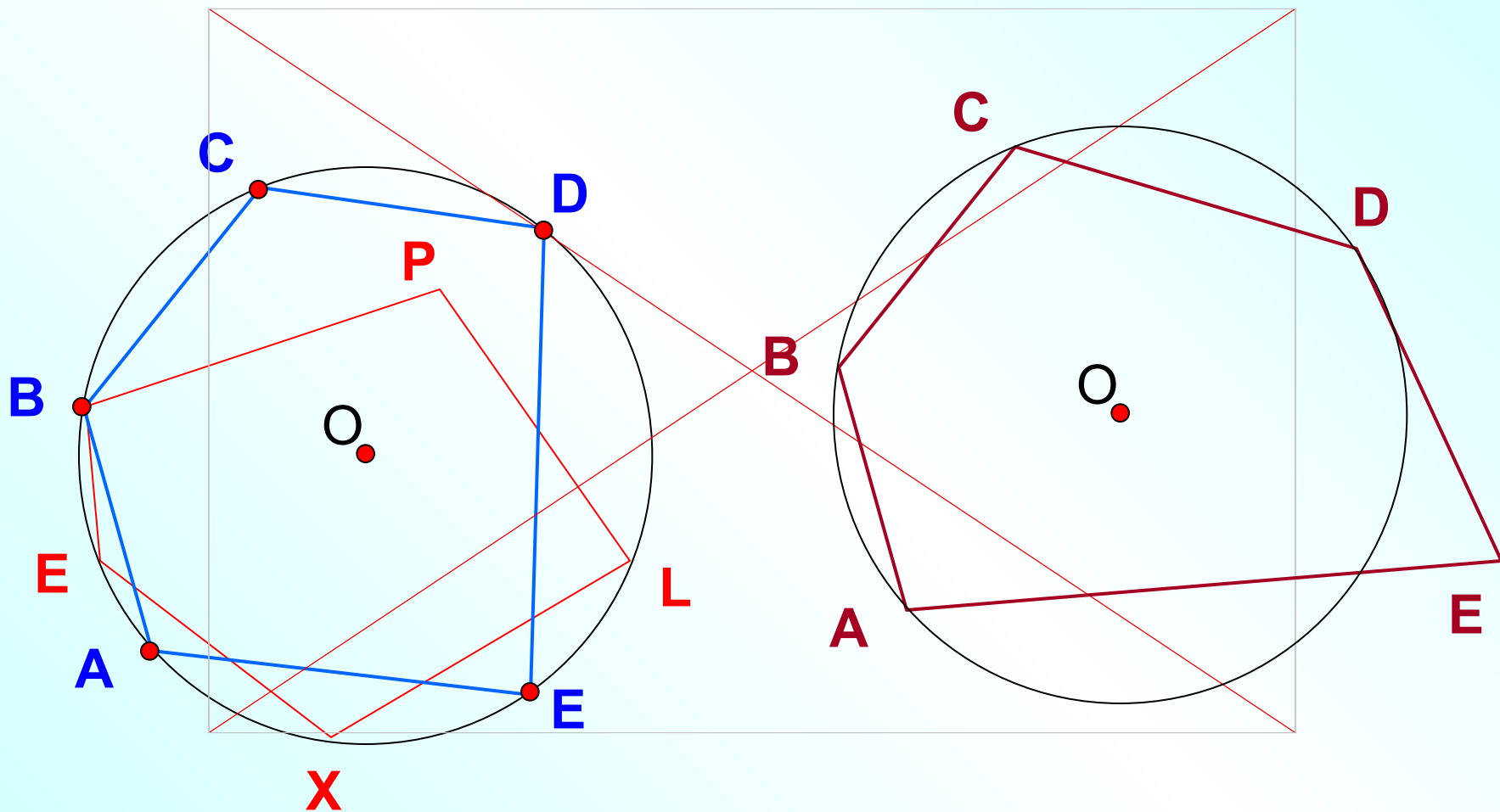
Окружность называют описанной около треугольника, если она проходит через все вершины этого треугольника

Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется **описанной** около многоугольника.

А многоугольник называется **вписанным** в эту окружность.

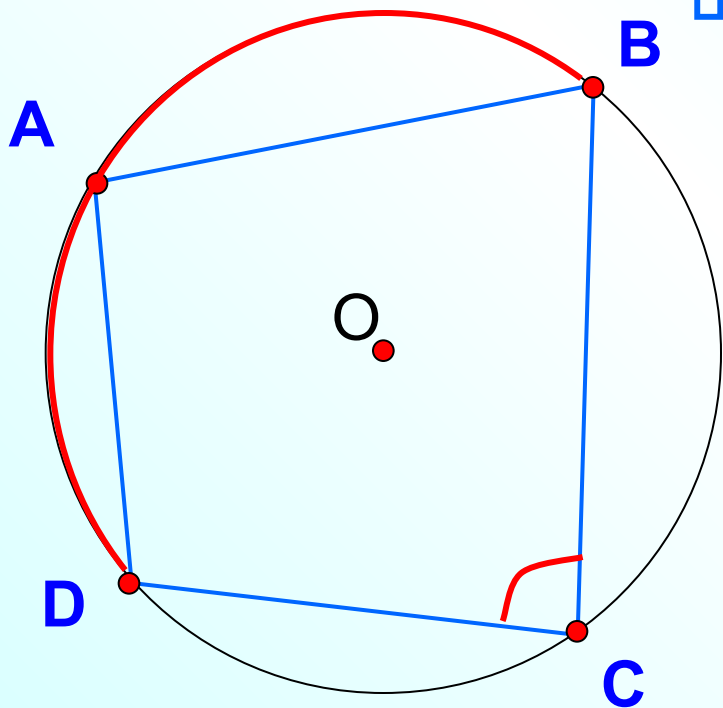


Какой из многоугольников, изображенных на рисунке является вписанным в окружность?

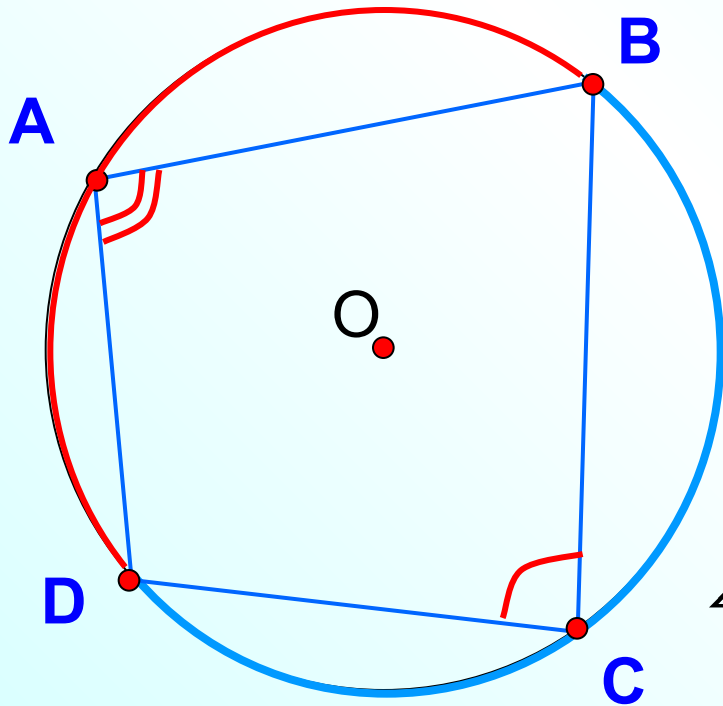


Какие известные свойства нам пригодятся при изучении описанной окружности?

□ Теорема о вписанном угле



В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180° .

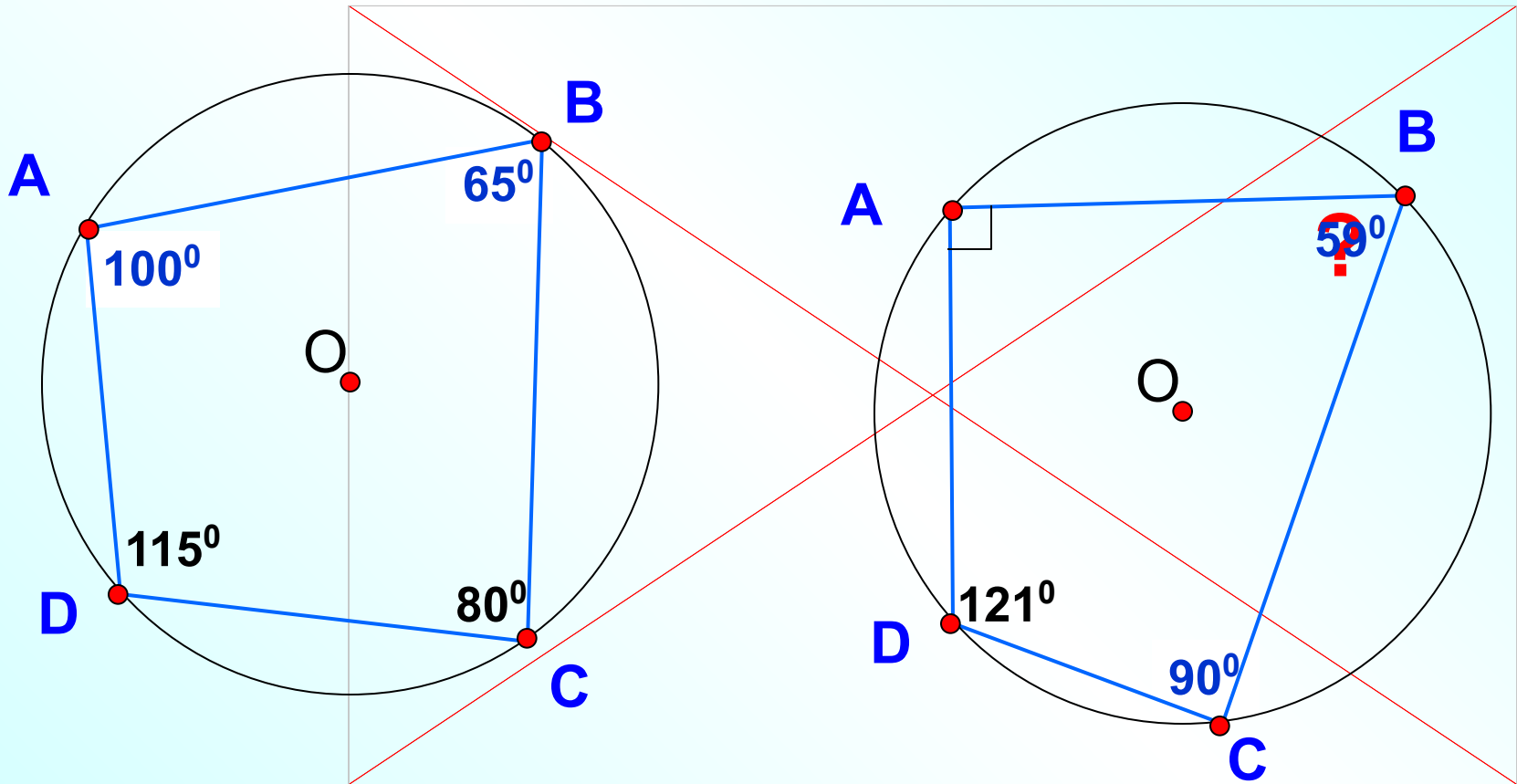


$$\begin{aligned} \angle A &= \frac{1}{2} \cup BCD \\ + \\ \angle C &= \frac{1}{2} \cup BAD \end{aligned}$$

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\cup BCD + \cup BAD)$$

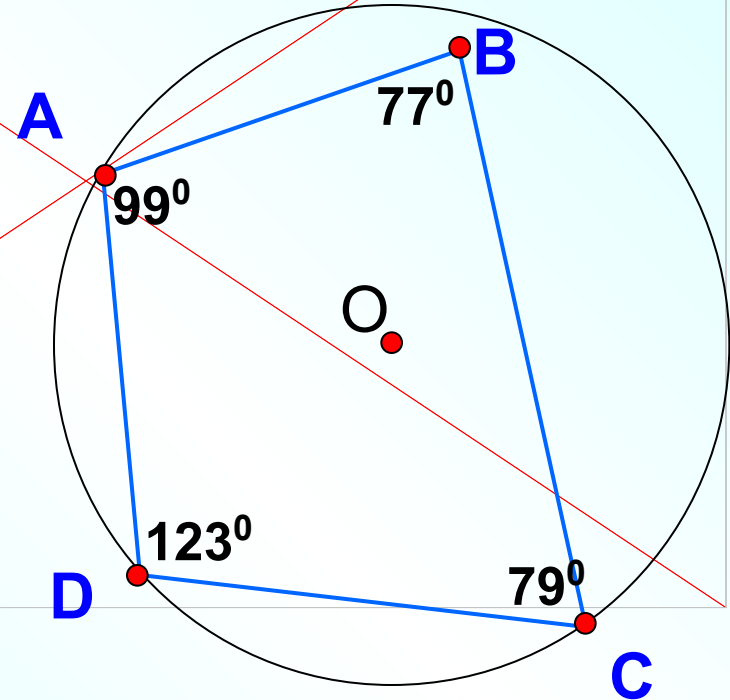
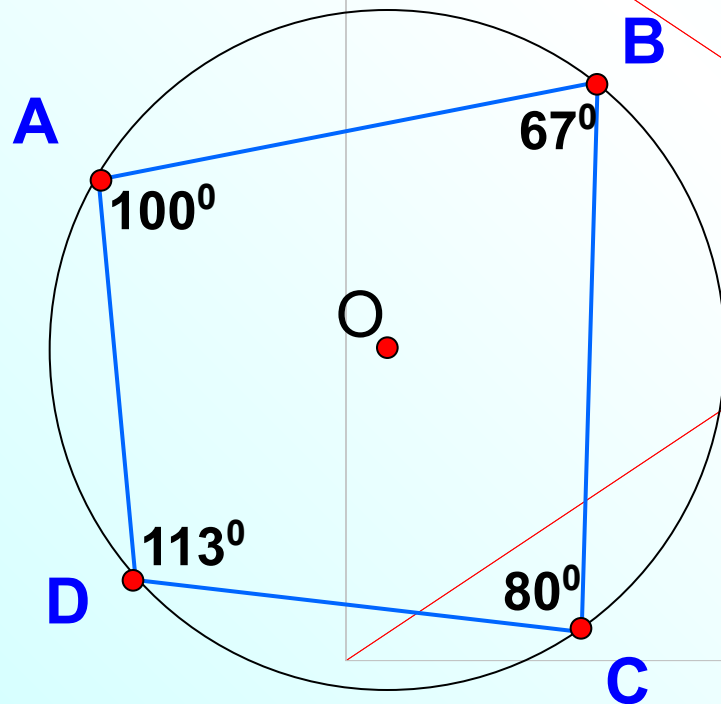
$$\angle A + \angle C = 180^{\circ}$$

Найти неизвестные углы четырехугольников.



Верно и обратное утверждение.

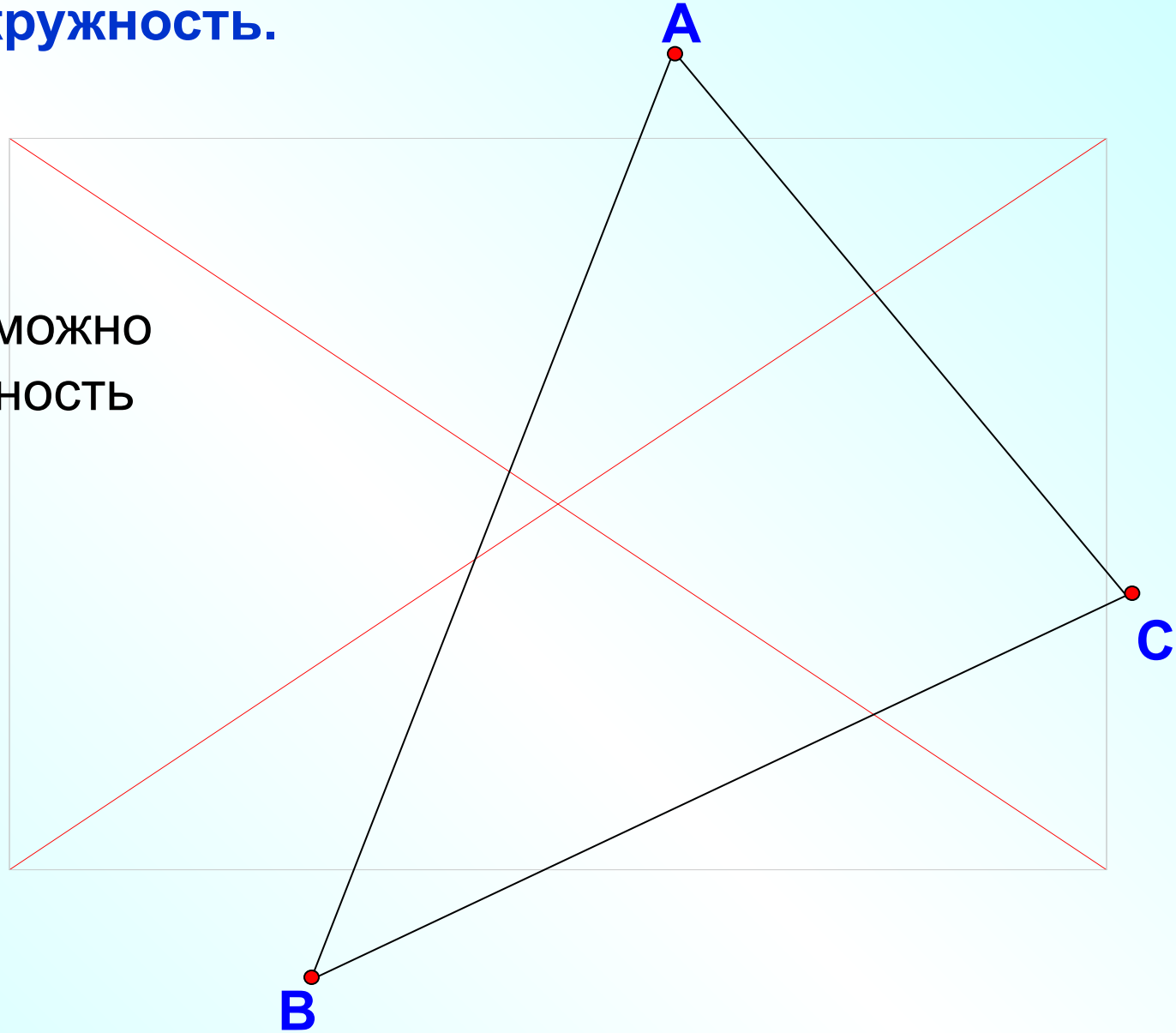
Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180° , то около него можно вписать окружность.



Теорема **Около любого треугольника можно описать окружность.**

Дано: $\triangle ABC$

Доказать, что можно описать окружность

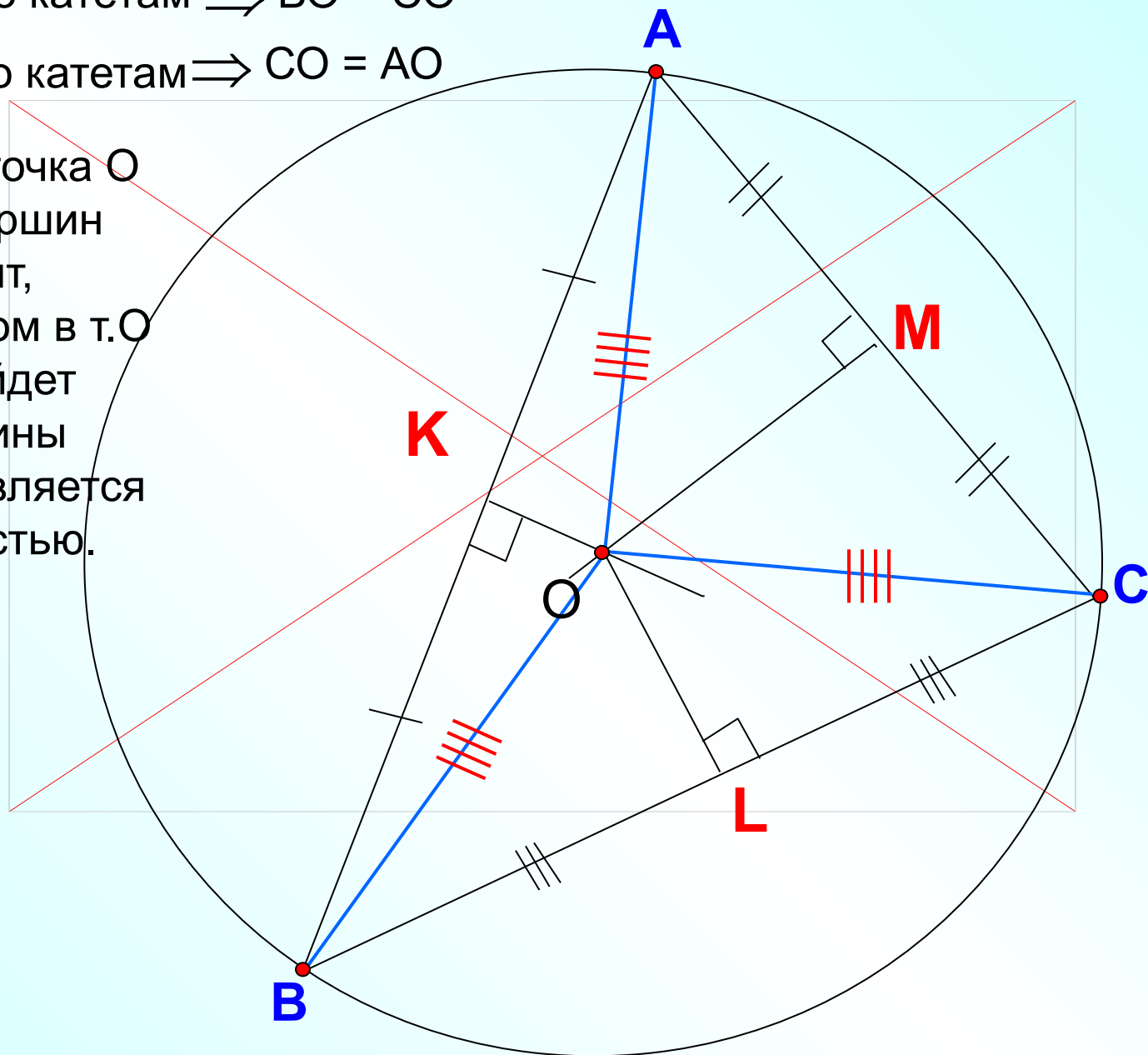


1) ДП: серединные перпендикуляры к сторонам

2) $\triangle BOL = \triangle COL$, по катетам $\Rightarrow BO = CO$

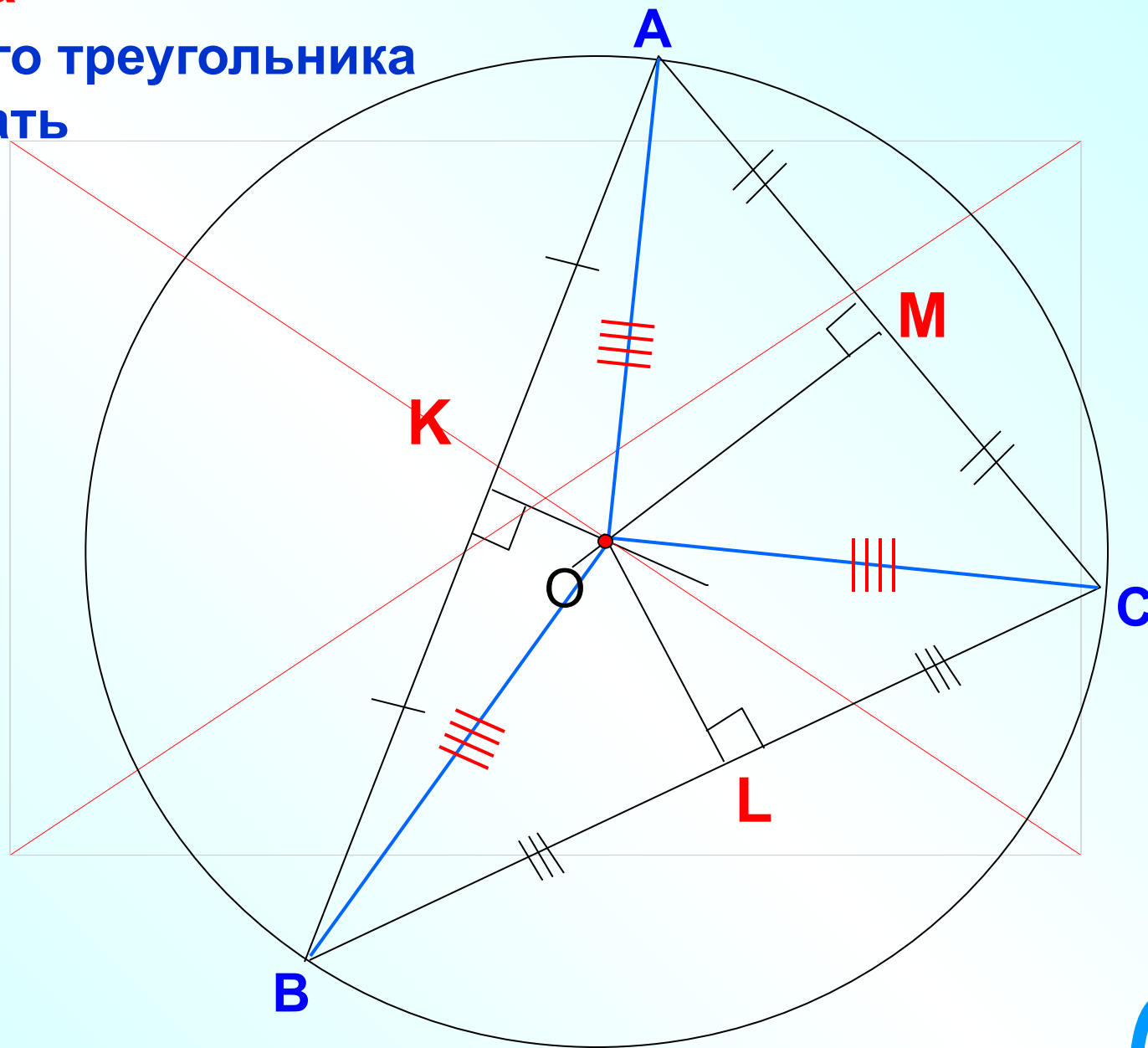
3) $\triangle COM = \triangle AOM$, по катетам $\Rightarrow CO = AO$

4) $BO = CO = AO$, т.е. точка O равноудалена от вершин треугольника. Значит, окружность с центром в т. O и радиусом OA пройдет через все три вершины треугольника, т.е. является описанной окружностью.

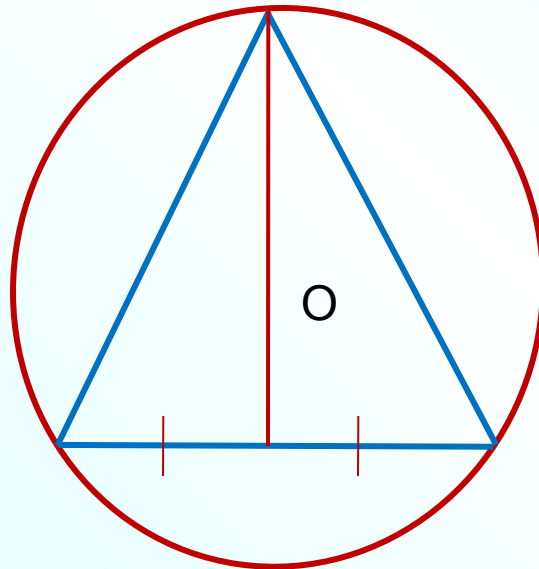


Теорема

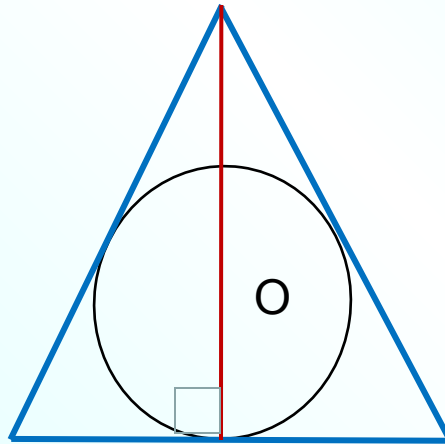
Около любого треугольника
можно описать
окружность.



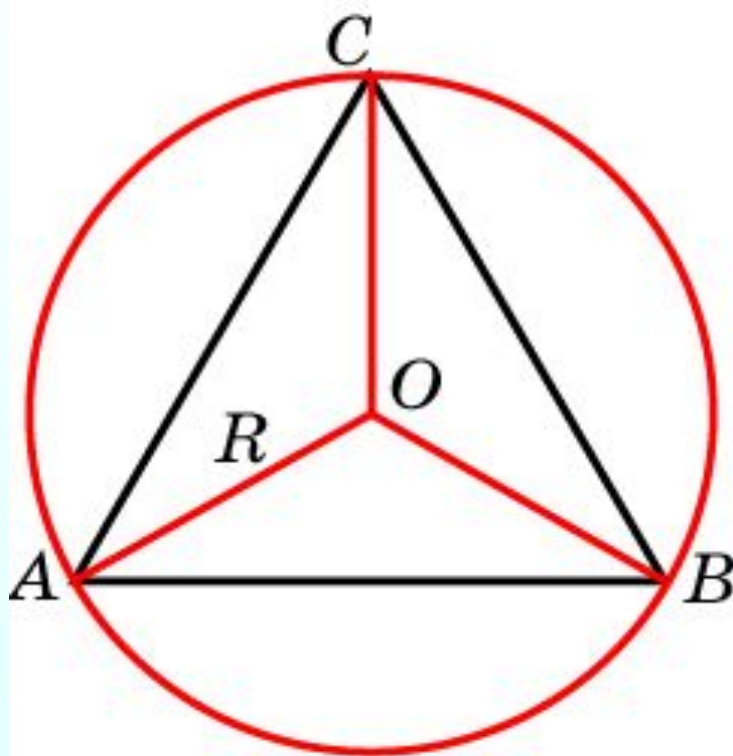
Центр описанной окружности
равнобедренного треугольника принадлежит
прямой, которая содержит медиану,
проведенную к его основанию.



Центр вписанной окружности
равнобедренного треугольника принадлежит
высоте, проведенной к его основанию

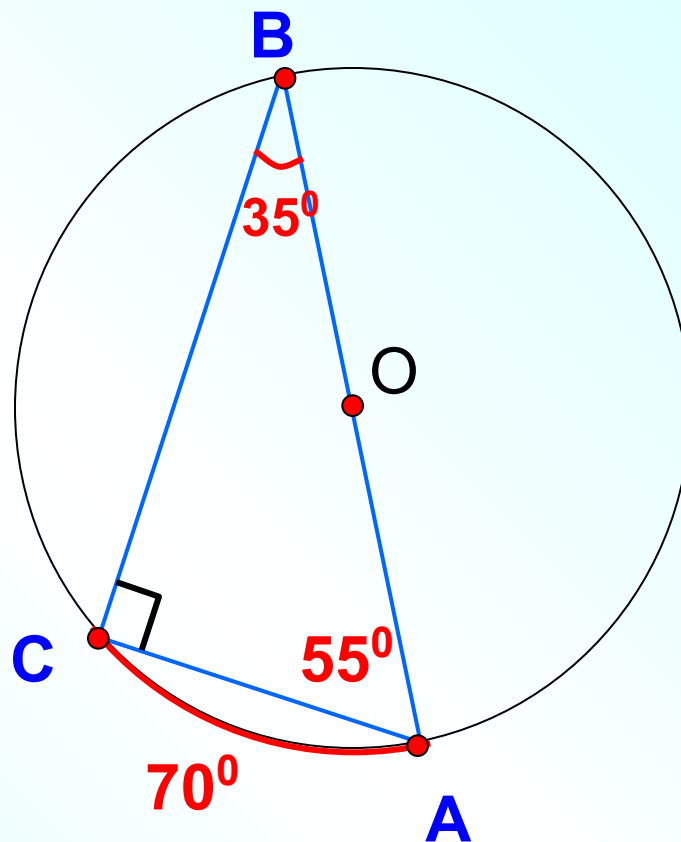
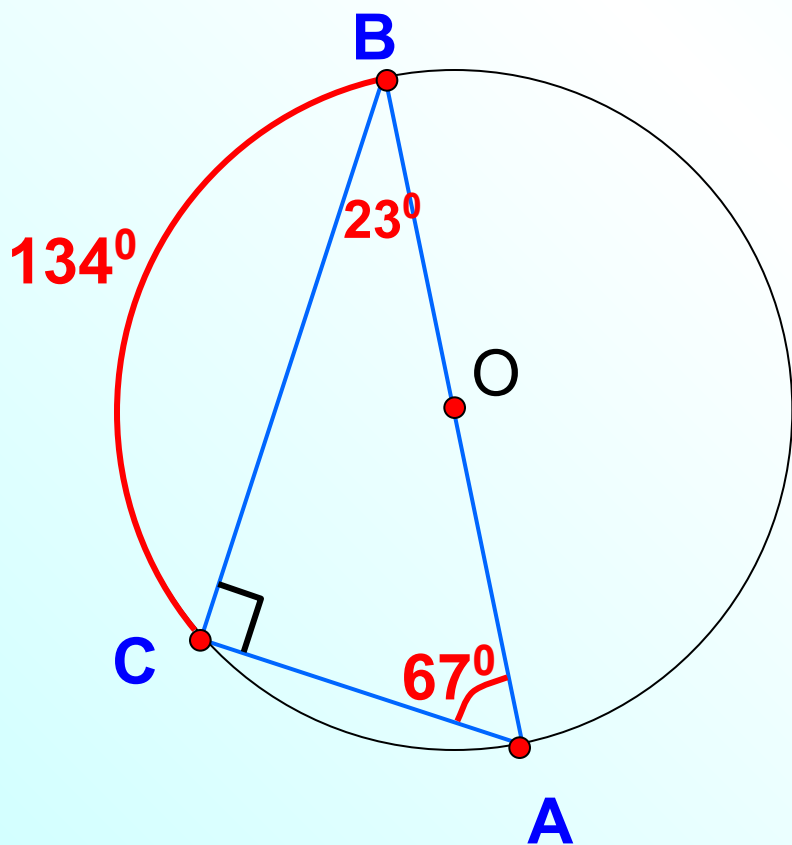


Центр описанной окружности
равностороннего треугольника является
точкой пересечения его биссектрис.



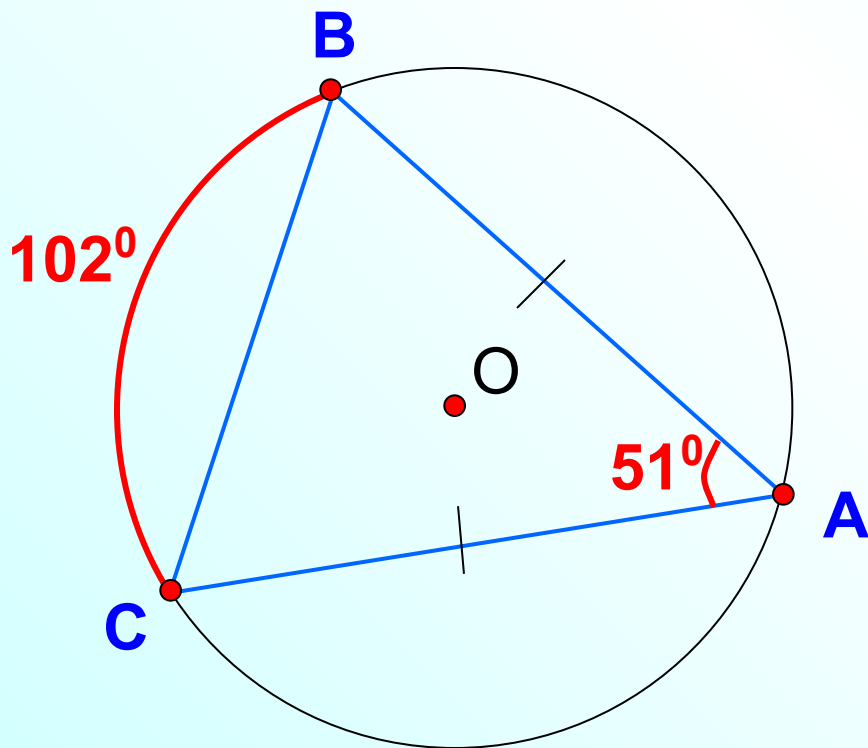
Если центр окружности, описанной около
треугольника принадлежит его стороне, то
треугольник - прямоугольный

№702 В окружность вписан треугольник ABC так, что AB – диаметр окружности. Найдите углы треугольника, если: а) $\cup BC = 134^\circ$ б) $\cup AC = 70^\circ$

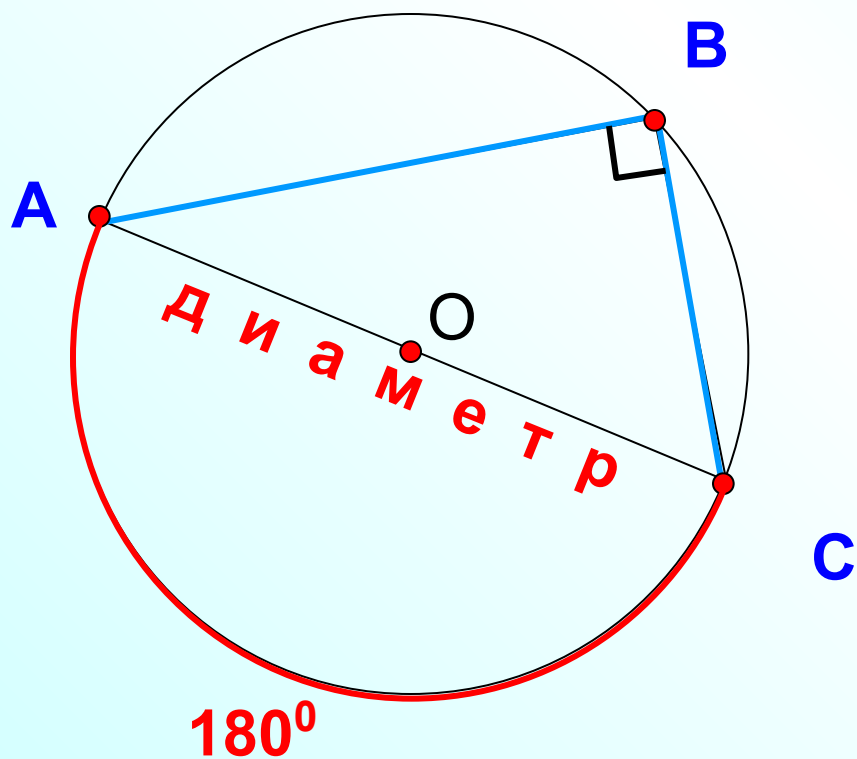


№703 В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Найдите углы треугольника, если $\cup BC = 102^\circ$.

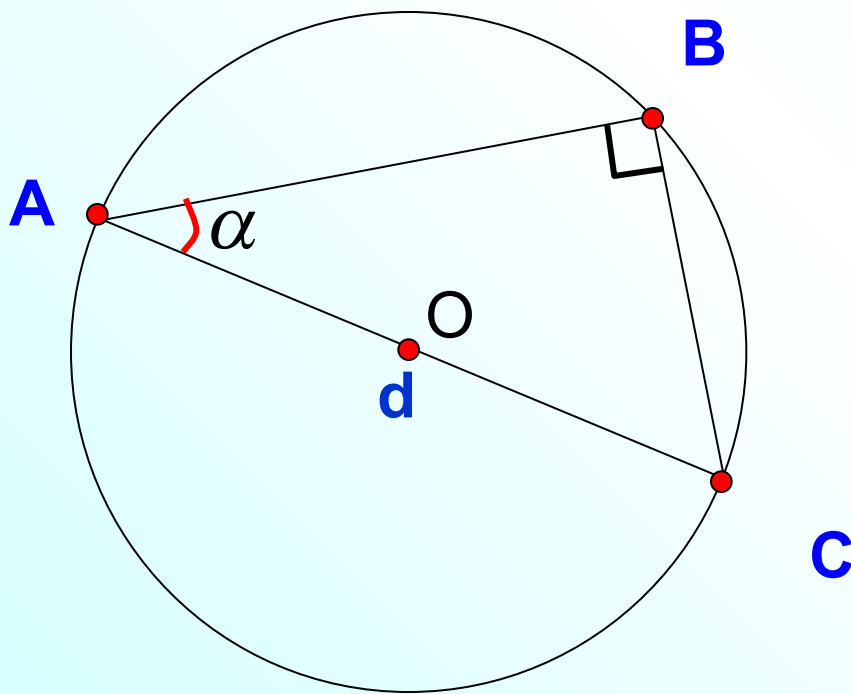
$$(180^\circ - 51^\circ) : 2 = 129^\circ : 2 = 128^\circ 60' : 2 = 64^\circ 30'$$



№704 (а) Окружность с центром O описана около прямоугольного треугольника. Докажите, что точка O – середина гипотенузы.



№704 (б) Окружность с центром O описана около прямоугольного треугольника. Найдите стороны треугольника, если диаметр окружности равен d , а один из острых углов треугольника равен α .



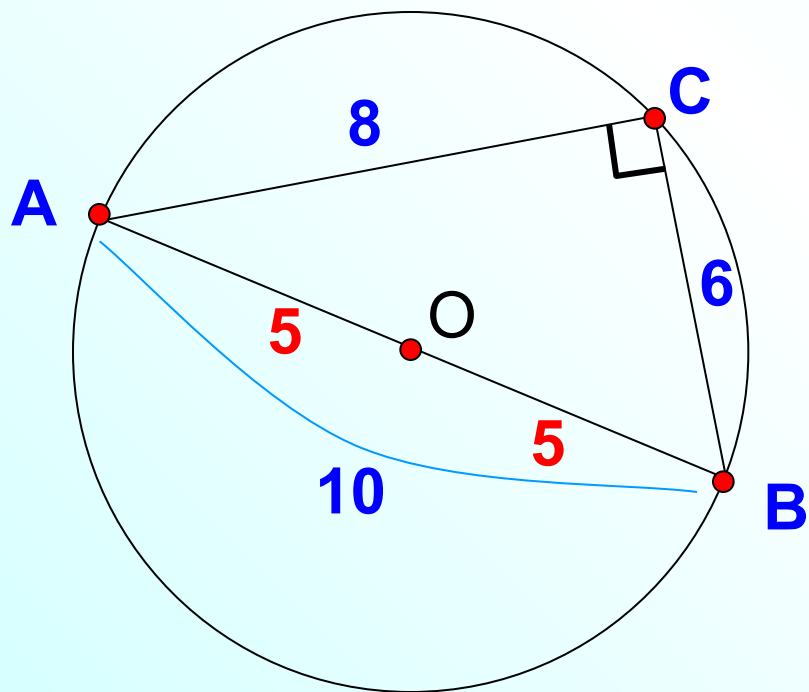
$$\cos \alpha = \frac{AB}{d}$$

$$AB = d \cdot \cos \alpha$$

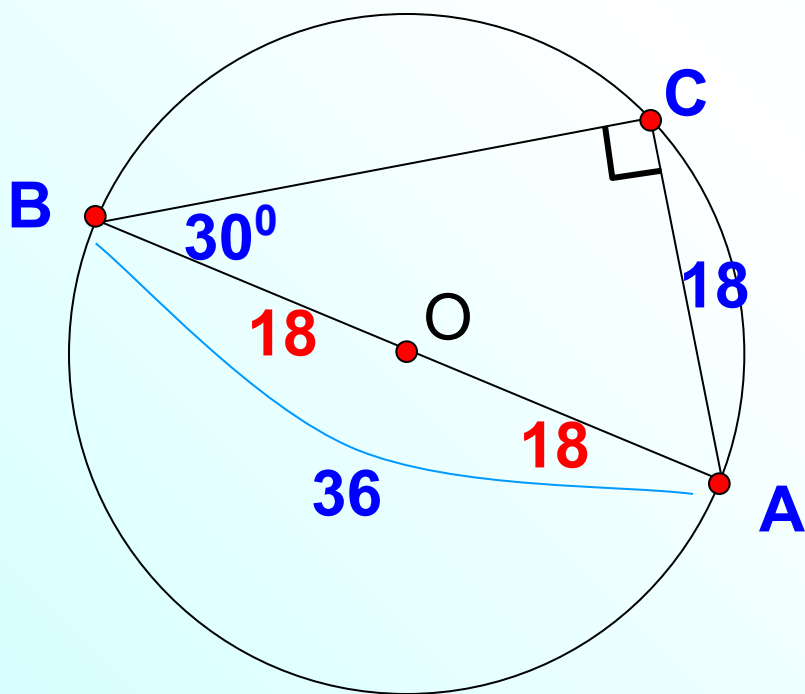
$$\sin \alpha = \frac{BC}{d}$$

$$BC = d \cdot \sin \alpha$$

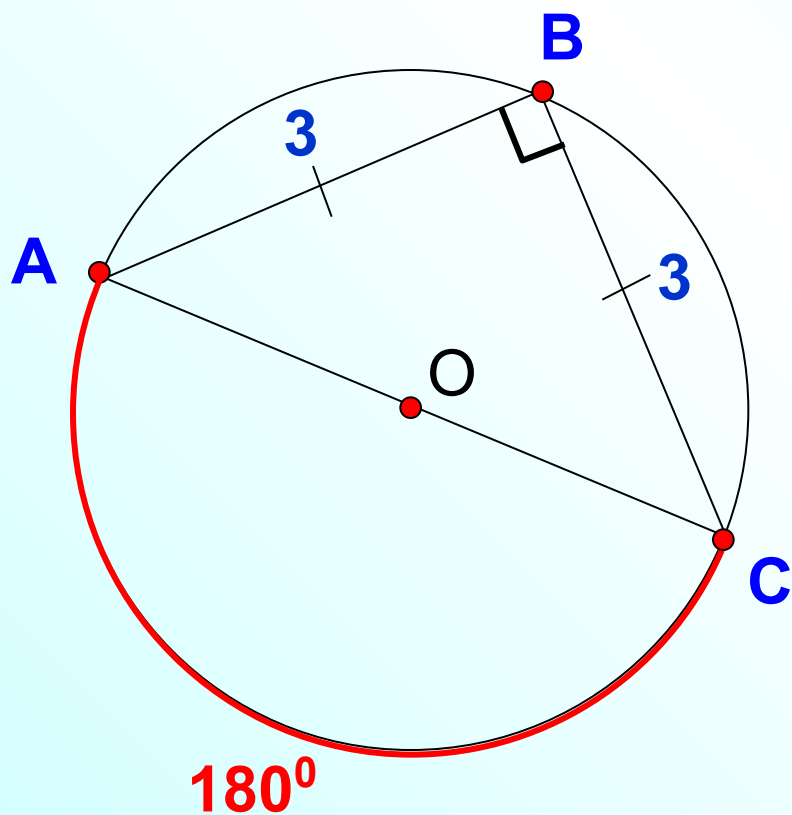
№705 (a) Около прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность. Найдите радиус этой окружности, если $AC=8$ см, $BC=6$ см.



№705(6) Около прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность. Найдите радиус этой окружности, если $AC=18$ см, $\angle B = 30^\circ$.



Боковые стороны треугольника, изображенного на рисунке, равны 3 см. Найти радиус описанной около него окружности.



Радиус окружности, описанной около треугольника, изображенного на чертеже, равен 2 см. Найти сторону АВ.

