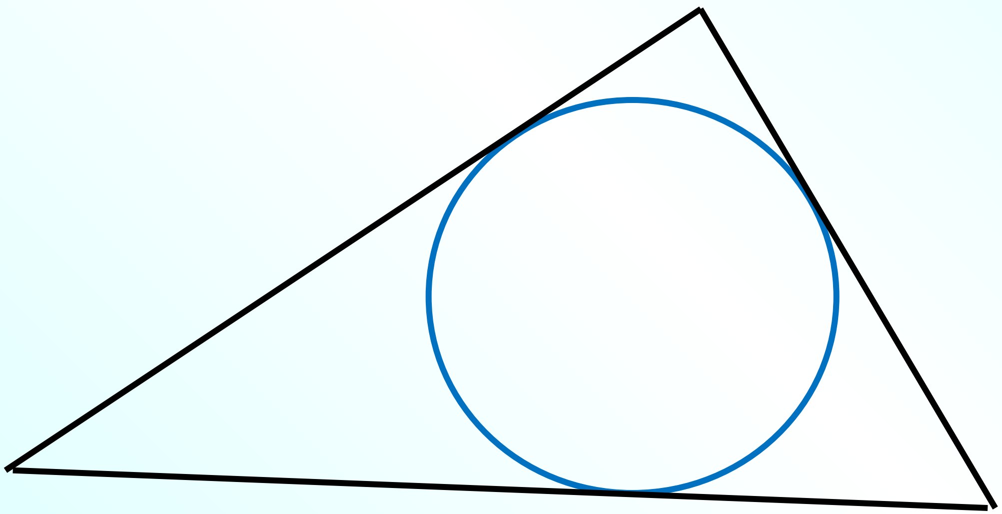
8 класс

Вписанная и описанная окружности

Л.С. Атанасян   Геометрия 7-9

Определение:

Окружность называют вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон



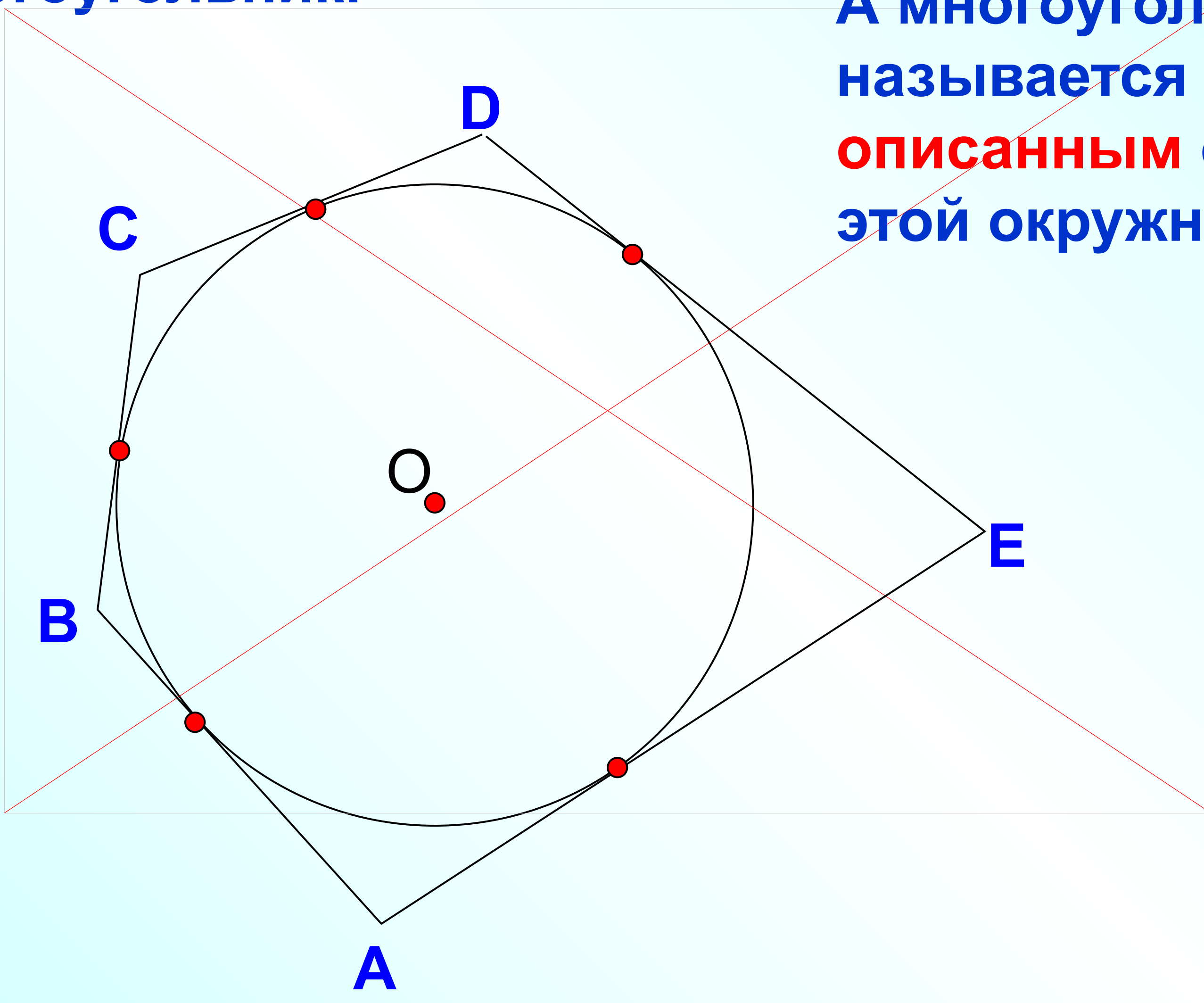
Радиус окружности вписанной в прямоугольный треугольник, определяется по формуле

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

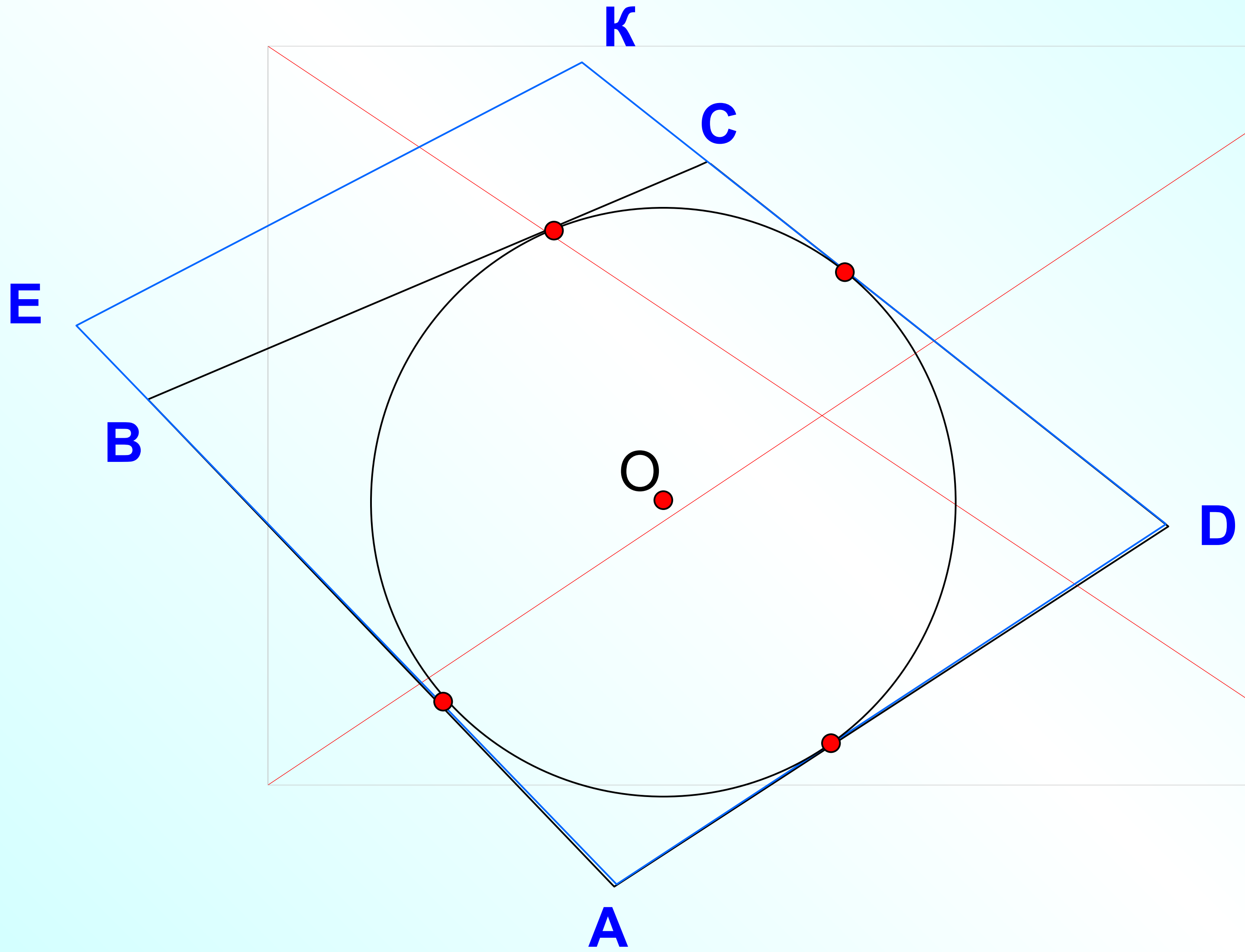
где r – радиус вписанной окружности, a и b - катеты, c - гипотенуза

Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется **вписанной** в многоугольник.

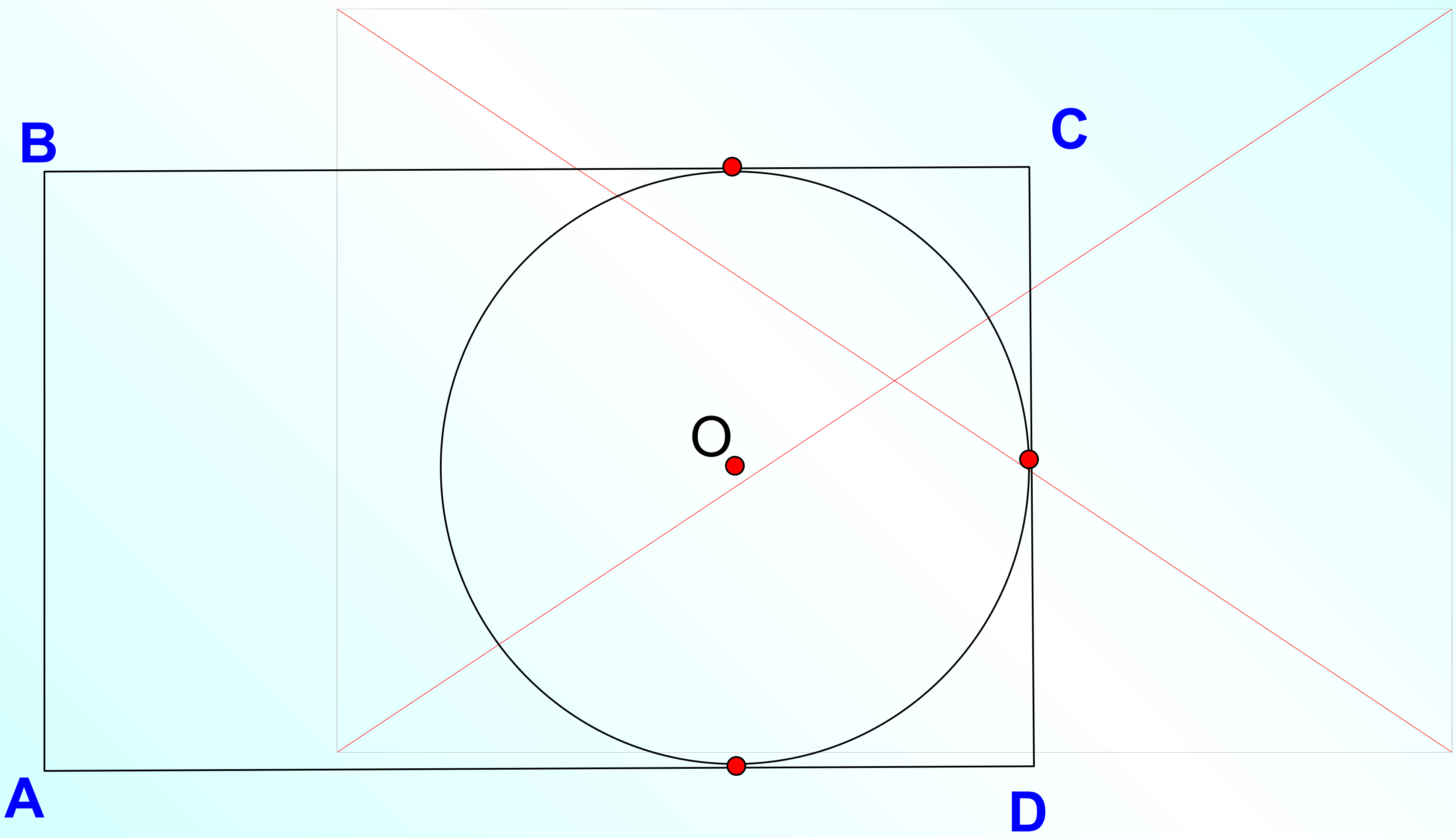
А многоугольник называется **описанным** около этой окружности.



Какой из двух четырехугольников ABCD или AEKD является описанным?



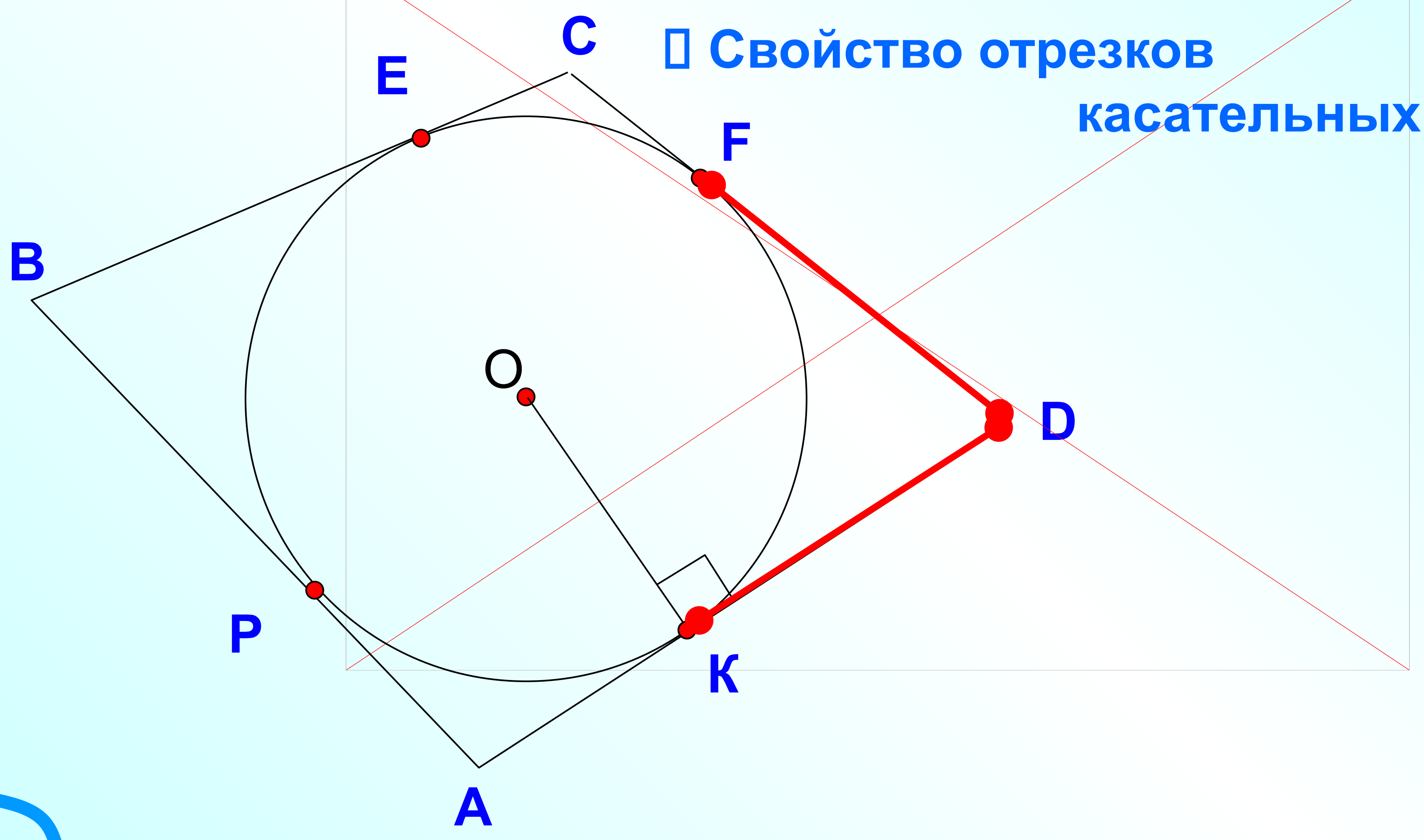
В прямоугольник нельзя вписать окружность.



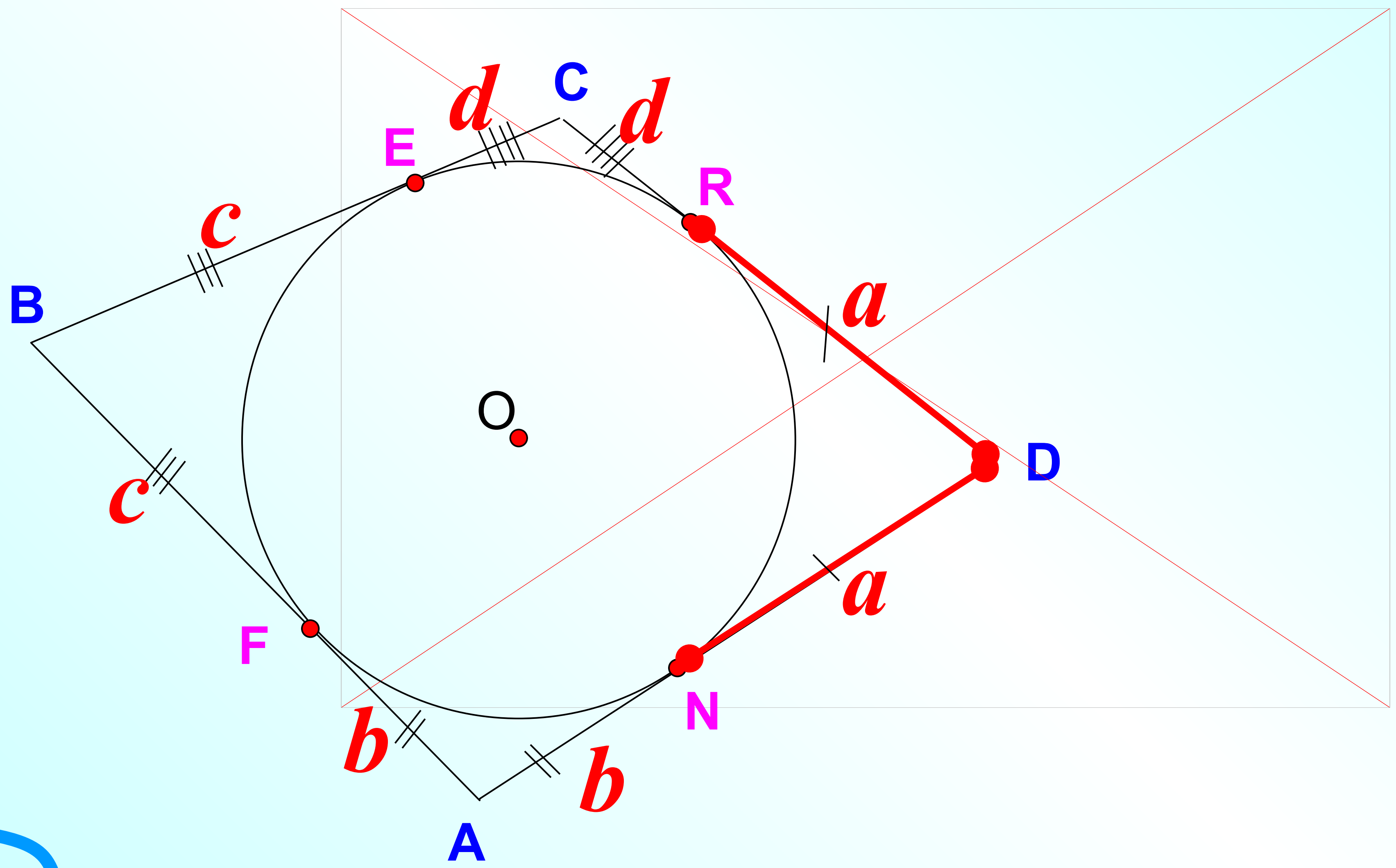
Какие известные свойства нам пригодятся при изучении вписанной окружности?

 Свойство касательной

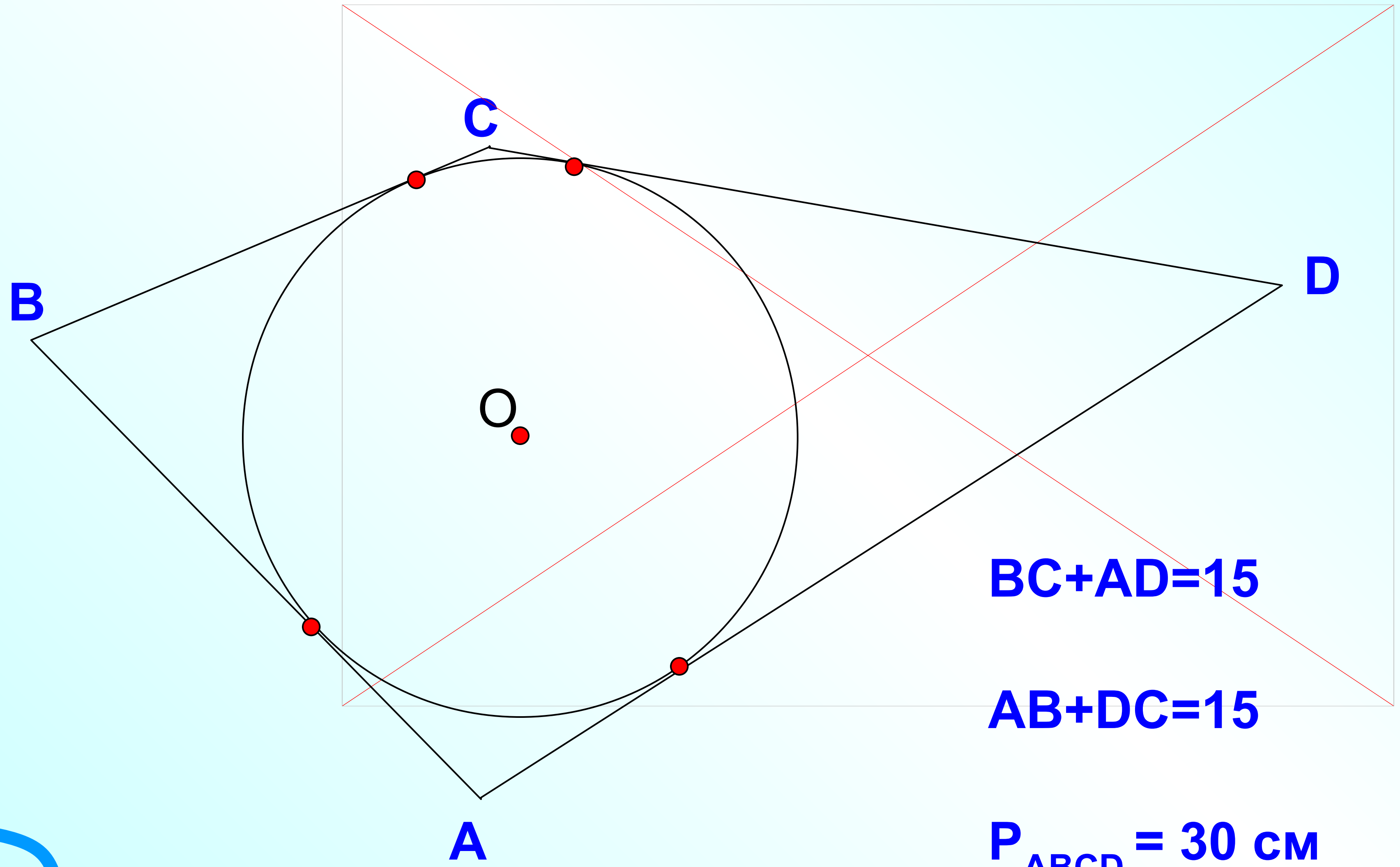
 Свойство отрезков касательных



В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.



№ 695 Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 15 см. Найдите периметр этого четырехугольника.

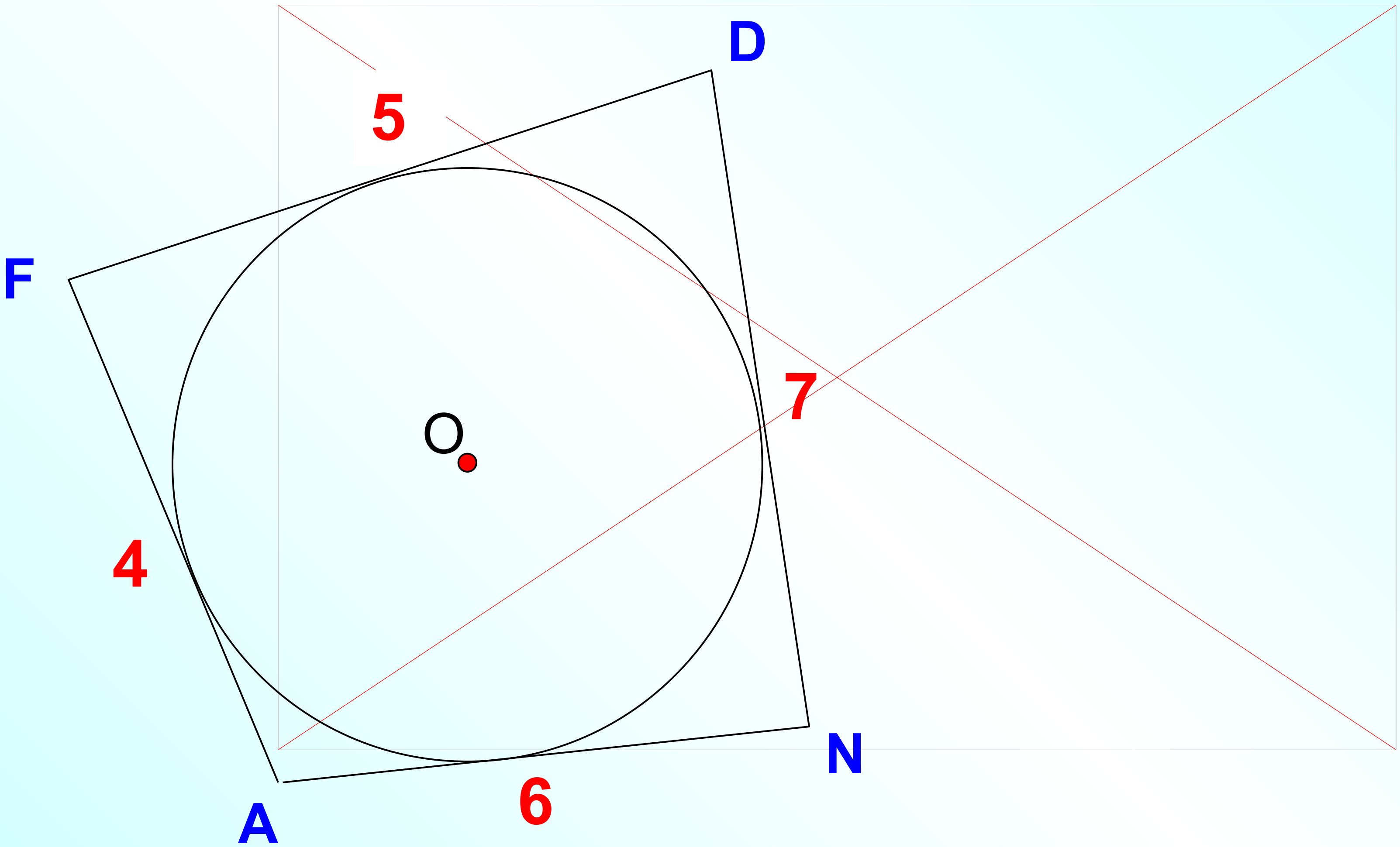


$BC+AD=15$

$AB+DC=15$

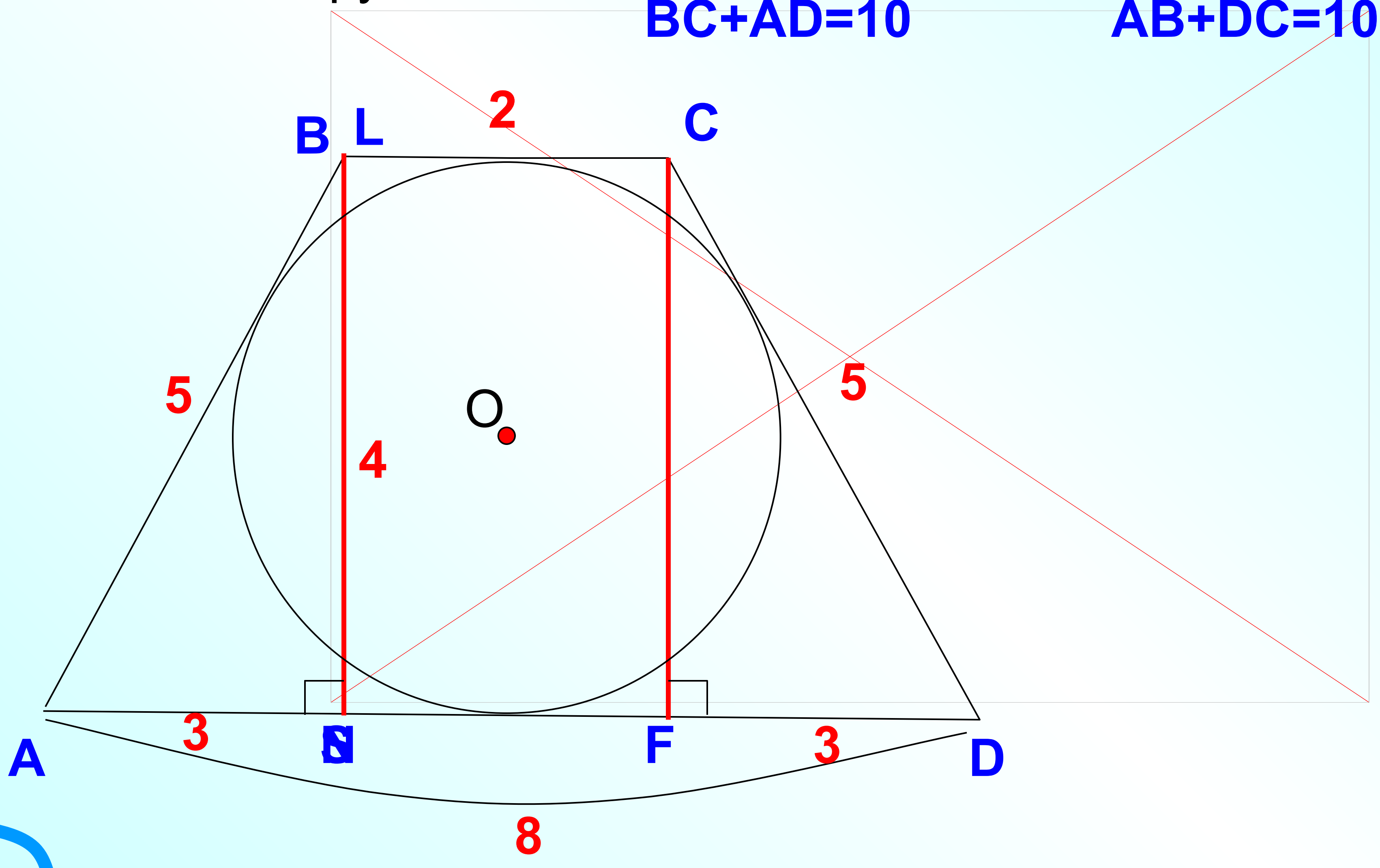
$P_{ABCD} = 30$ см

Найти FD



Равнобокая трапеция описана около окружности. Основания трапеции равны 2 и 8. найдите радиус вписанной окружности.

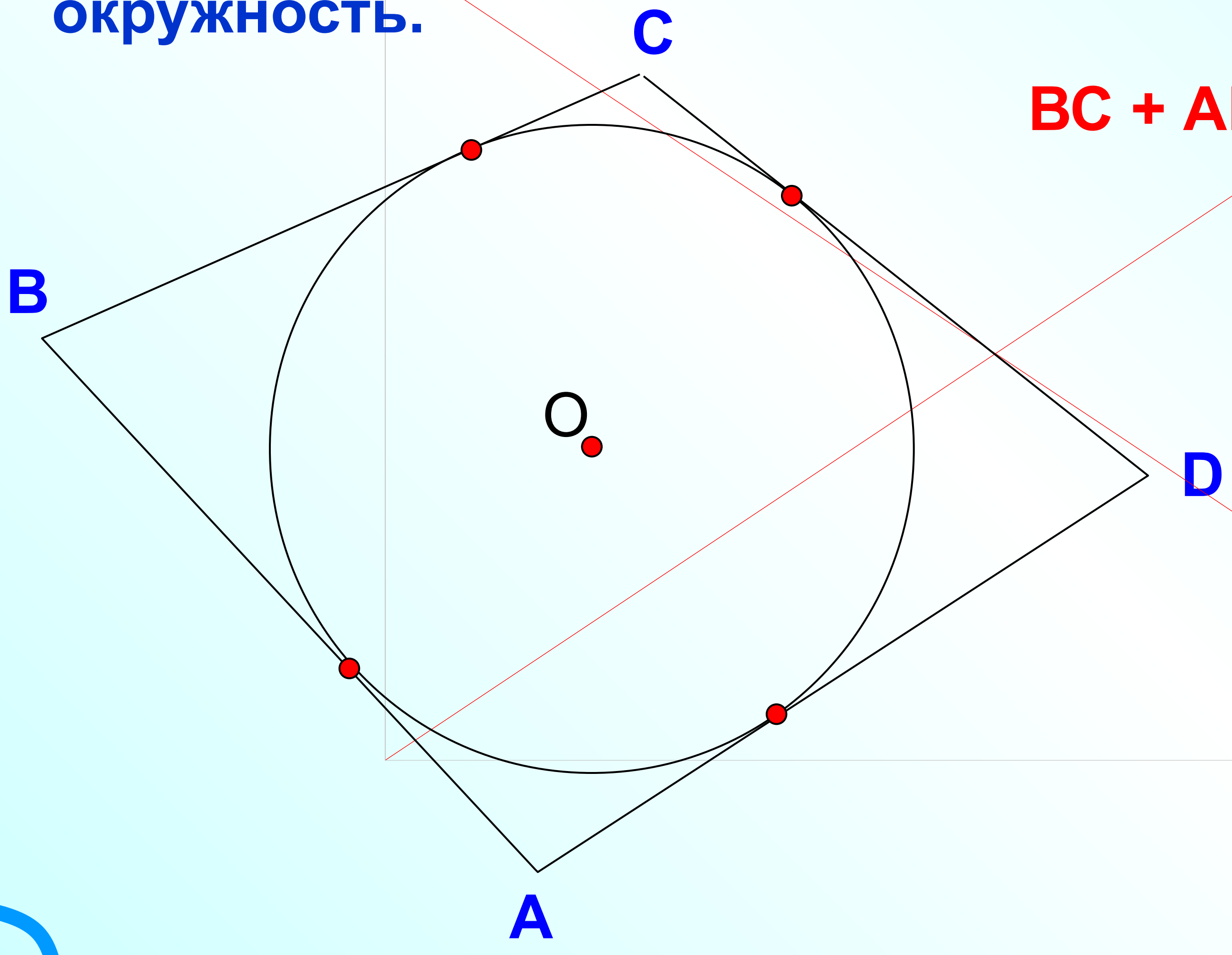
BC+AD=10 **AB+DC=10**



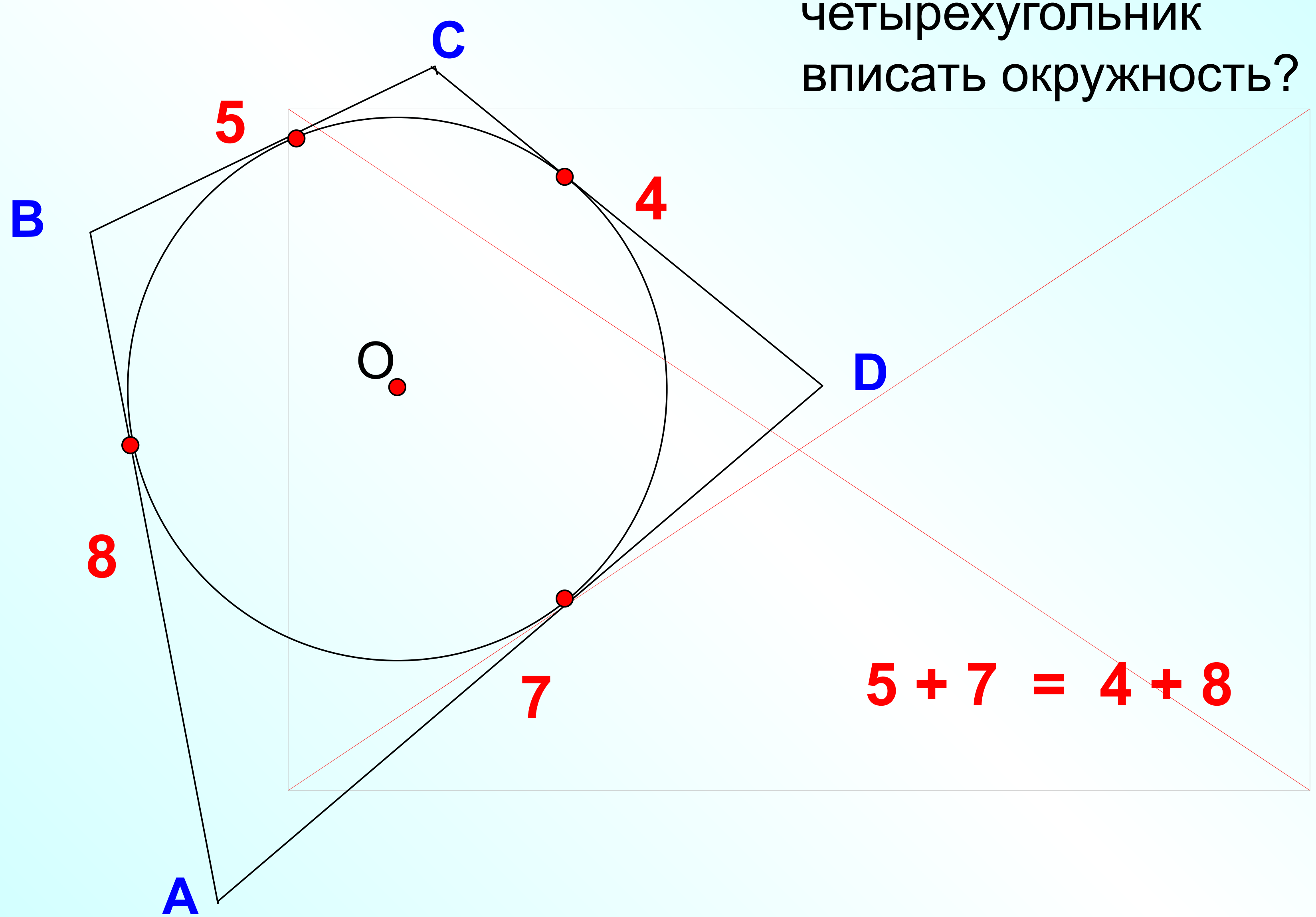
Верно и обратное утверждение.

Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

BC + AD = AB + DC



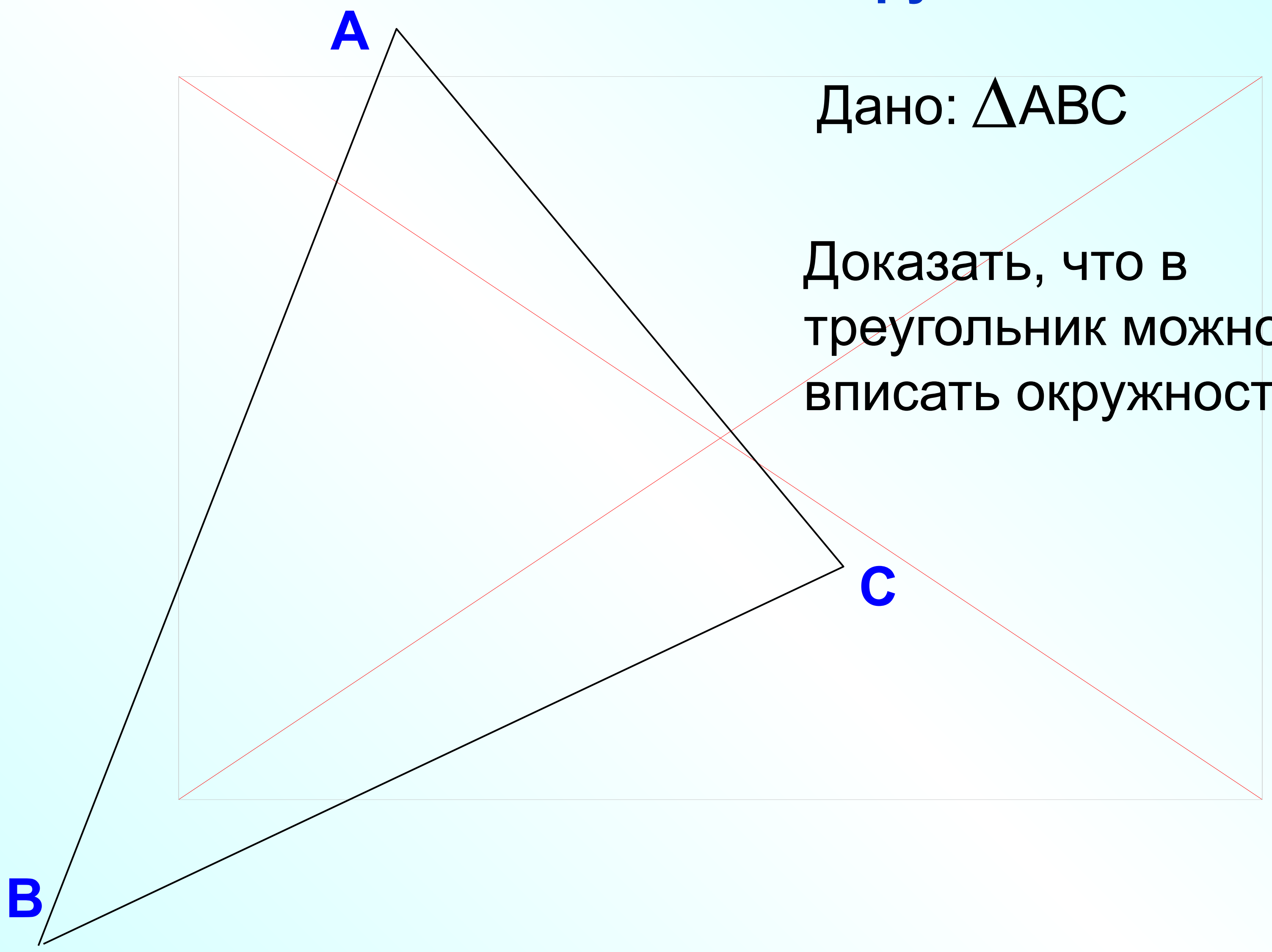
Можно ли в данный четырехугольник вписать окружность?



5 + 7 = 4 + 8

Теорема

В любой треугольник можно вписать окружность.



Дано: ΔABC

Доказать, что в треугольник можно вписать окружность

1) ДП: биссектрисы углов треугольника
Проведем из точки О перпендикуляры к сторонам треугольника

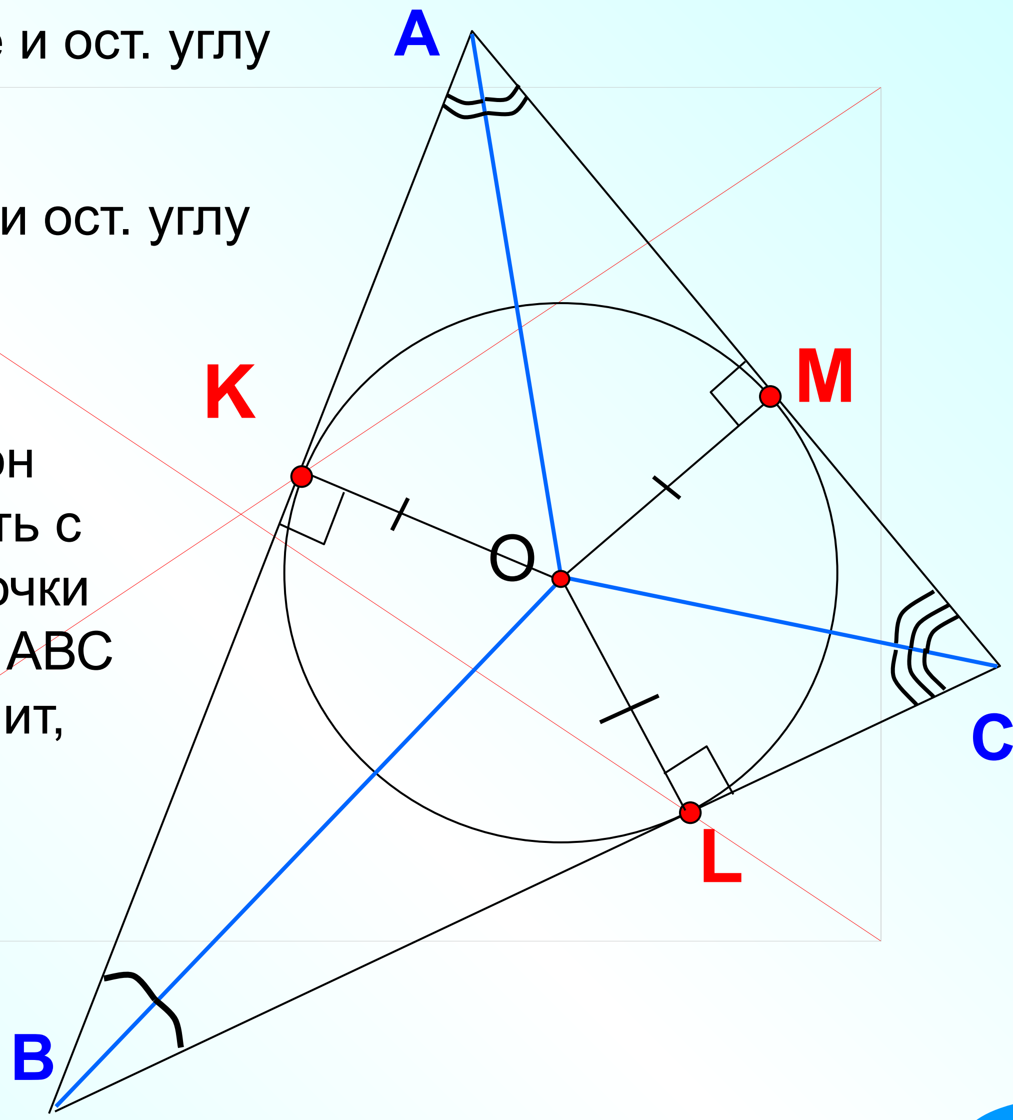
2) ΔCOL = ΔCOM, по гипотенузе и ост. углу

$\Rightarrow$ OL = MO

3) ΔMOA = ΔKOA, по гипотенузе и ост. углу

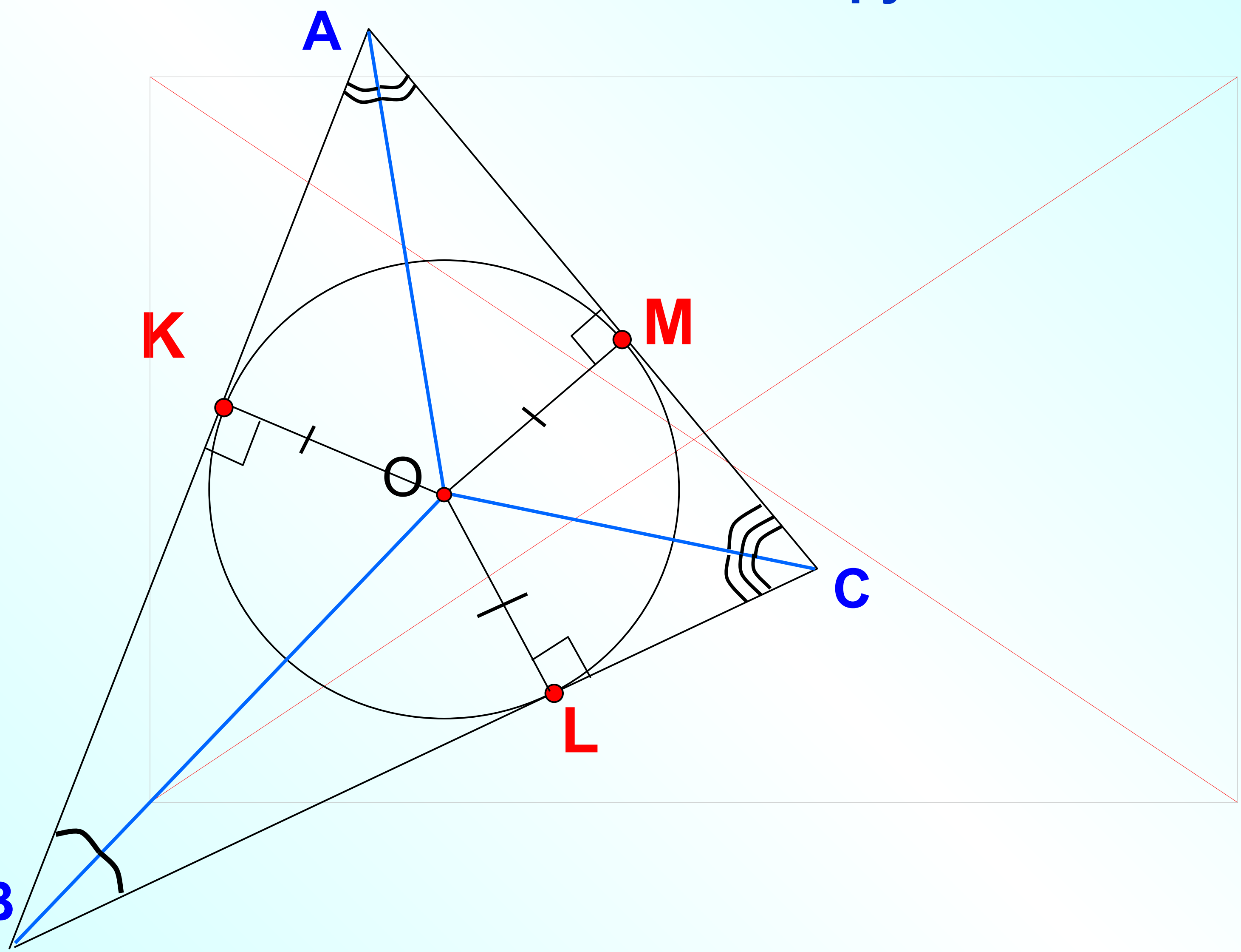
$\Rightarrow$ MO = KO

4) LO=MO=KO
точка О **равноудалена** от сторон треугольника. Значит, окружность с центром в т.О проходит через точки K, L и M. Стороны треугольника АВС касаются этой окружности. Значит, окружность является вписанной ΔABC.

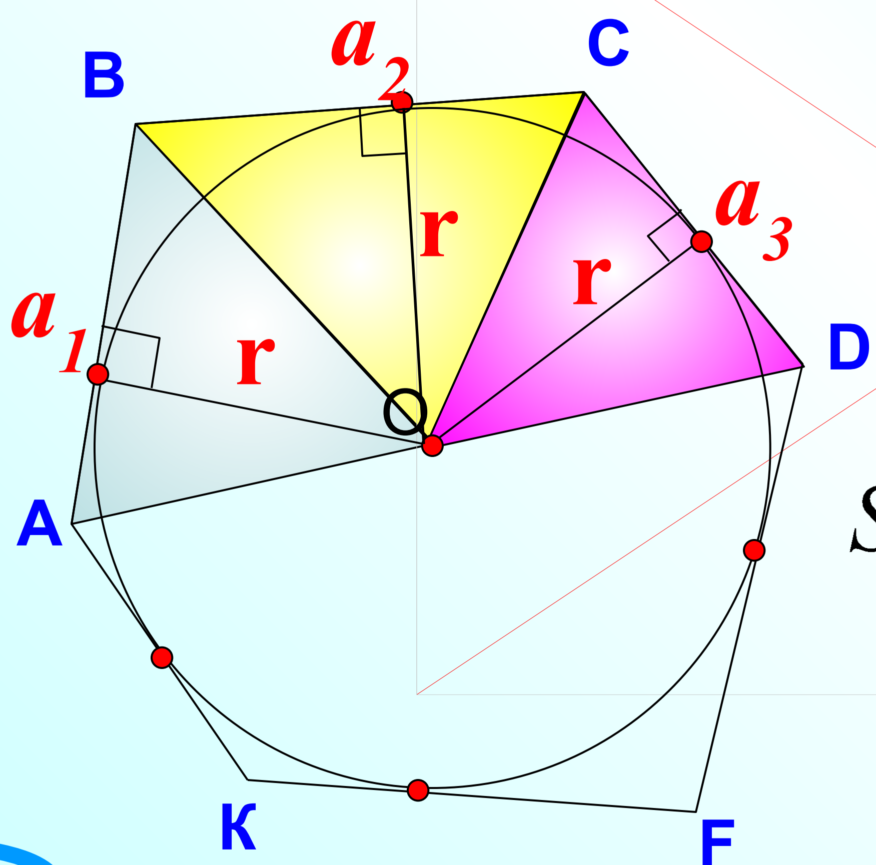


Теорема

В любой треугольник можно вписать окружность.



№ 697 Докажите, что площадь описанного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.



$$S_{AOB} = \frac{1}{2} a_1 \cdot r$$

$$+ \quad S_{BOC} = \frac{1}{2} a_2 \cdot r$$

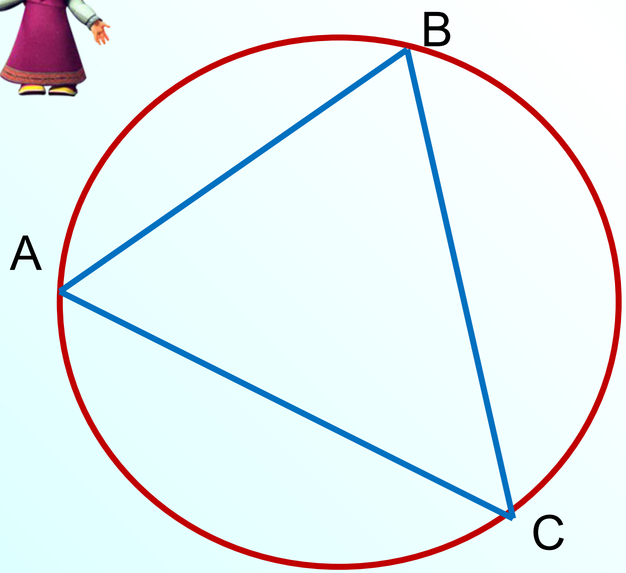
$$S_{COD} = \frac{1}{2} a_3 \cdot r$$

...

$$S_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) \cdot r$$

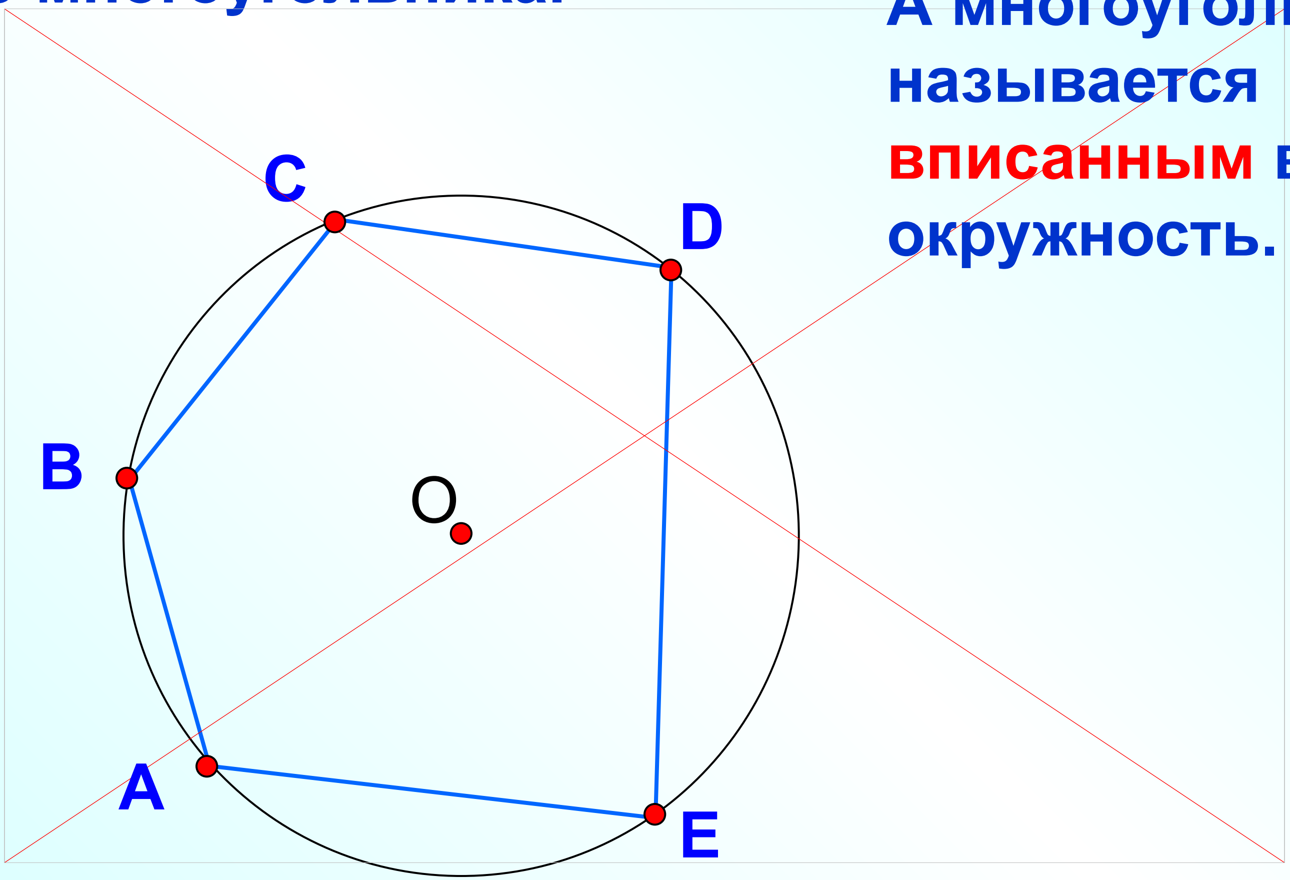
$$S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot r$$

Определение:



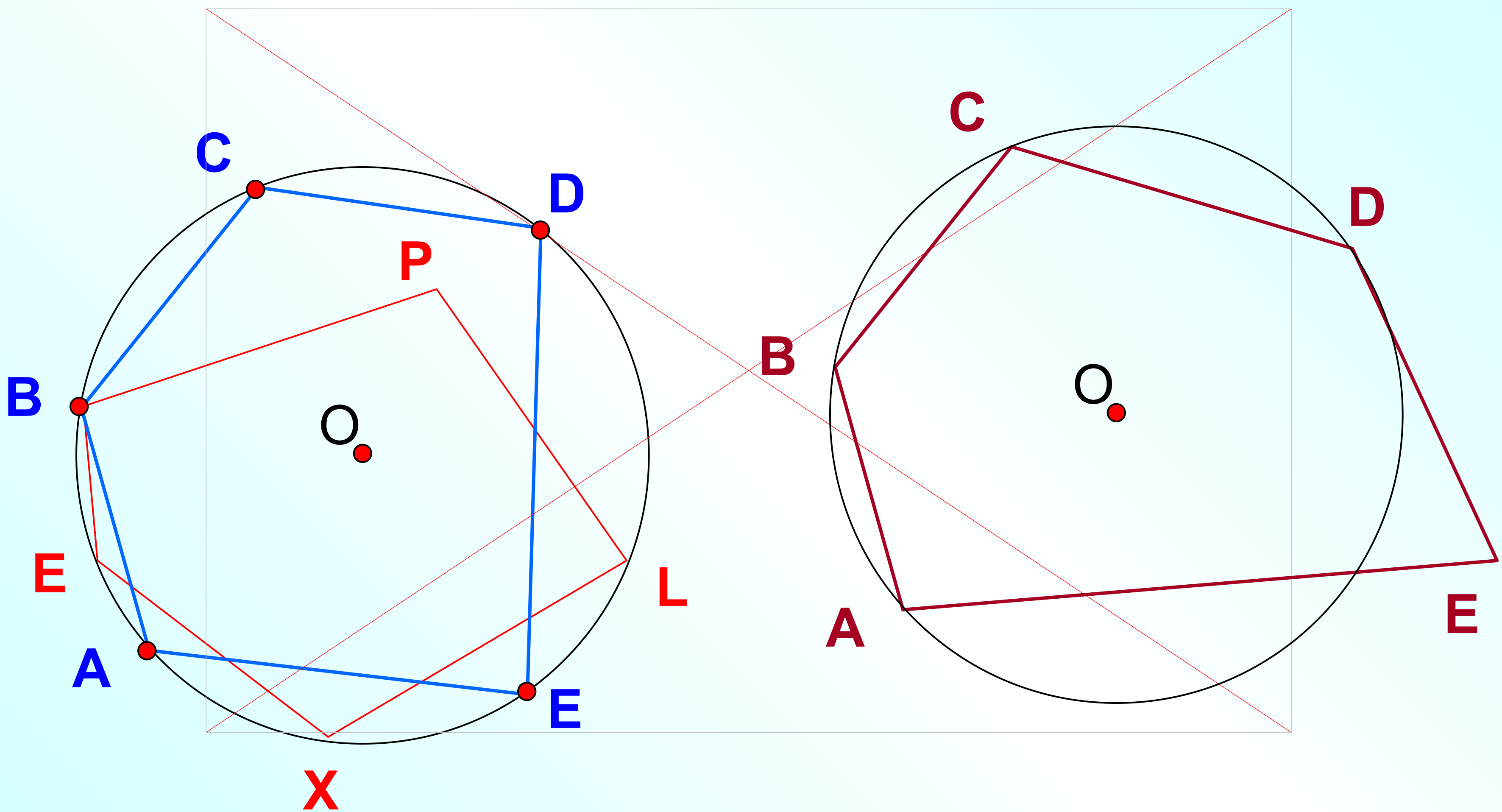
Окружность называют описанной около треугольника, если она проходит через все вершины этого треугольника

Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около многоугольника.

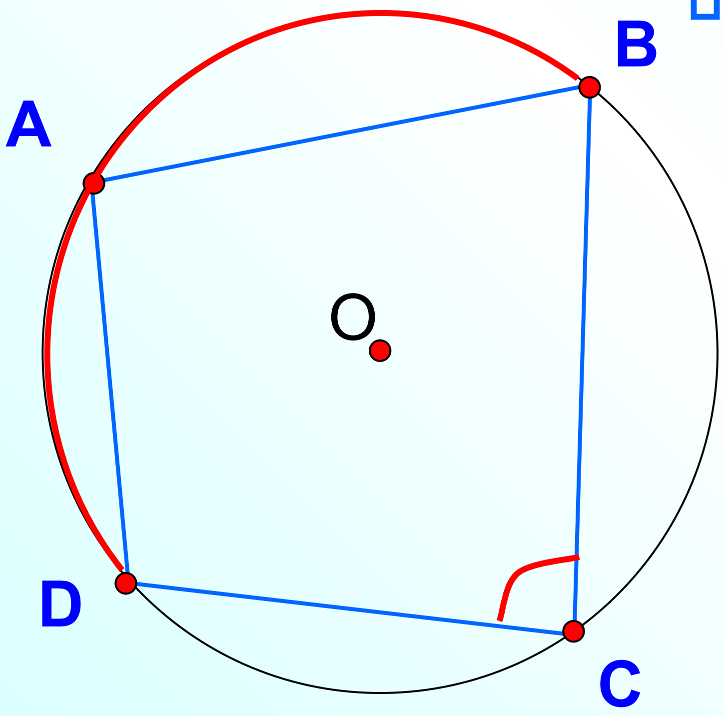


А многоугольник называется вписанным в эту окружность.

Какой из многоугольников, изображенных на рисунке является вписанным в окружность?

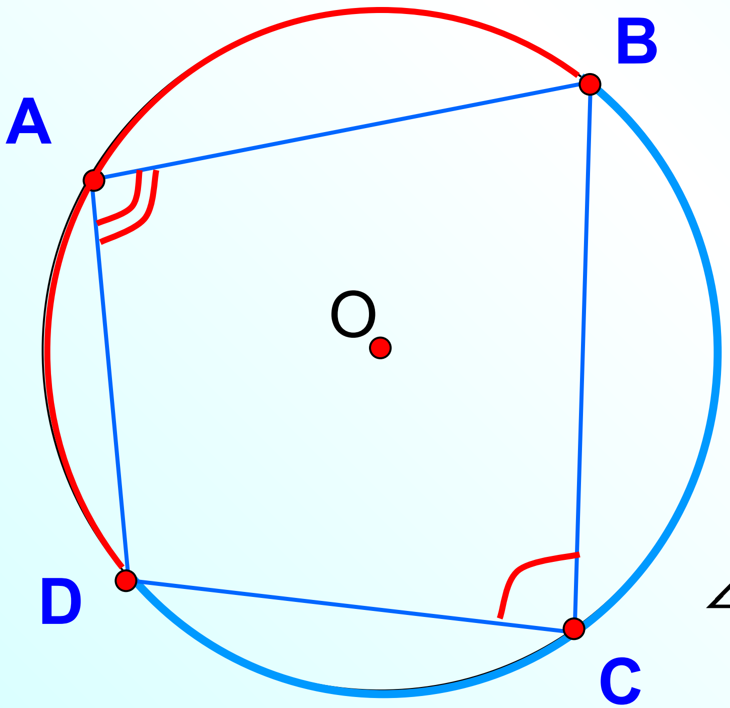


Какие известные свойства нам пригодятся при изучении описанной окружности?



 Теорема о вписанном угле

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180^0.



$$\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD$$

+

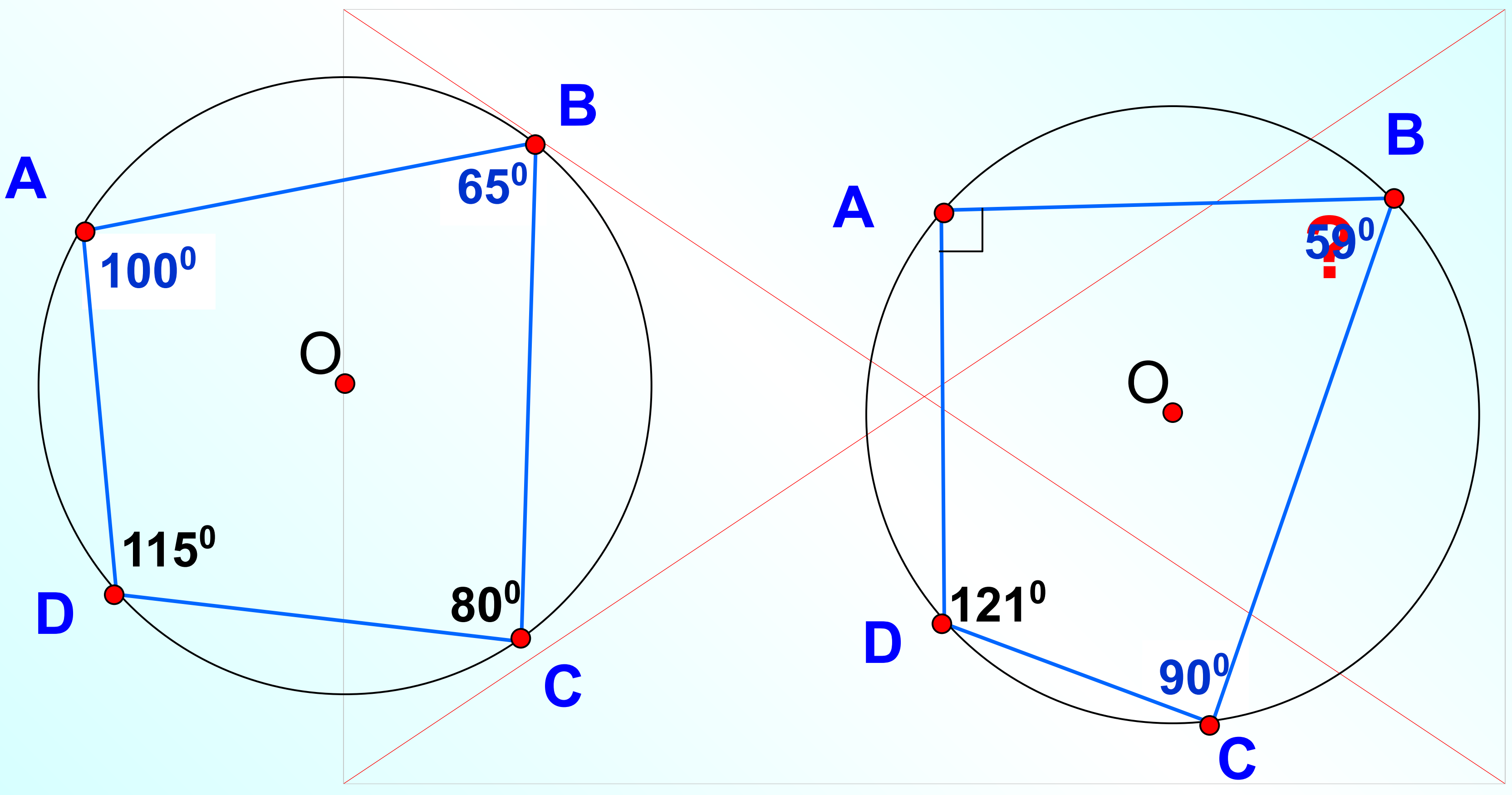
$$\angle C = \frac{1}{2} \cup BAD$$

360^0

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\cup BCD + \cup BAD)$$

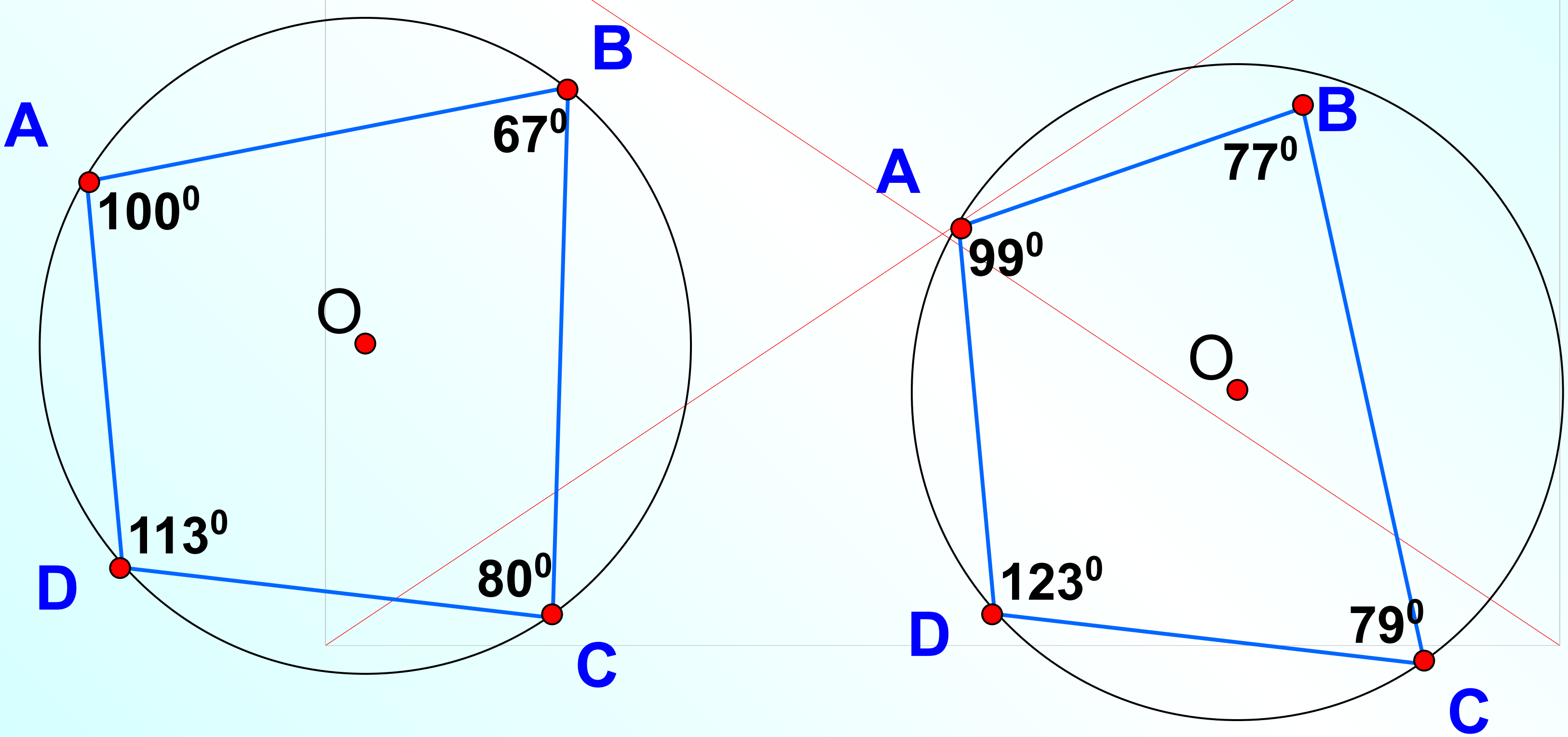
$$\angle A + \angle C = 180^0$$

Найти неизвестные углы четырехугольников.



Верно и обратное утверждение.

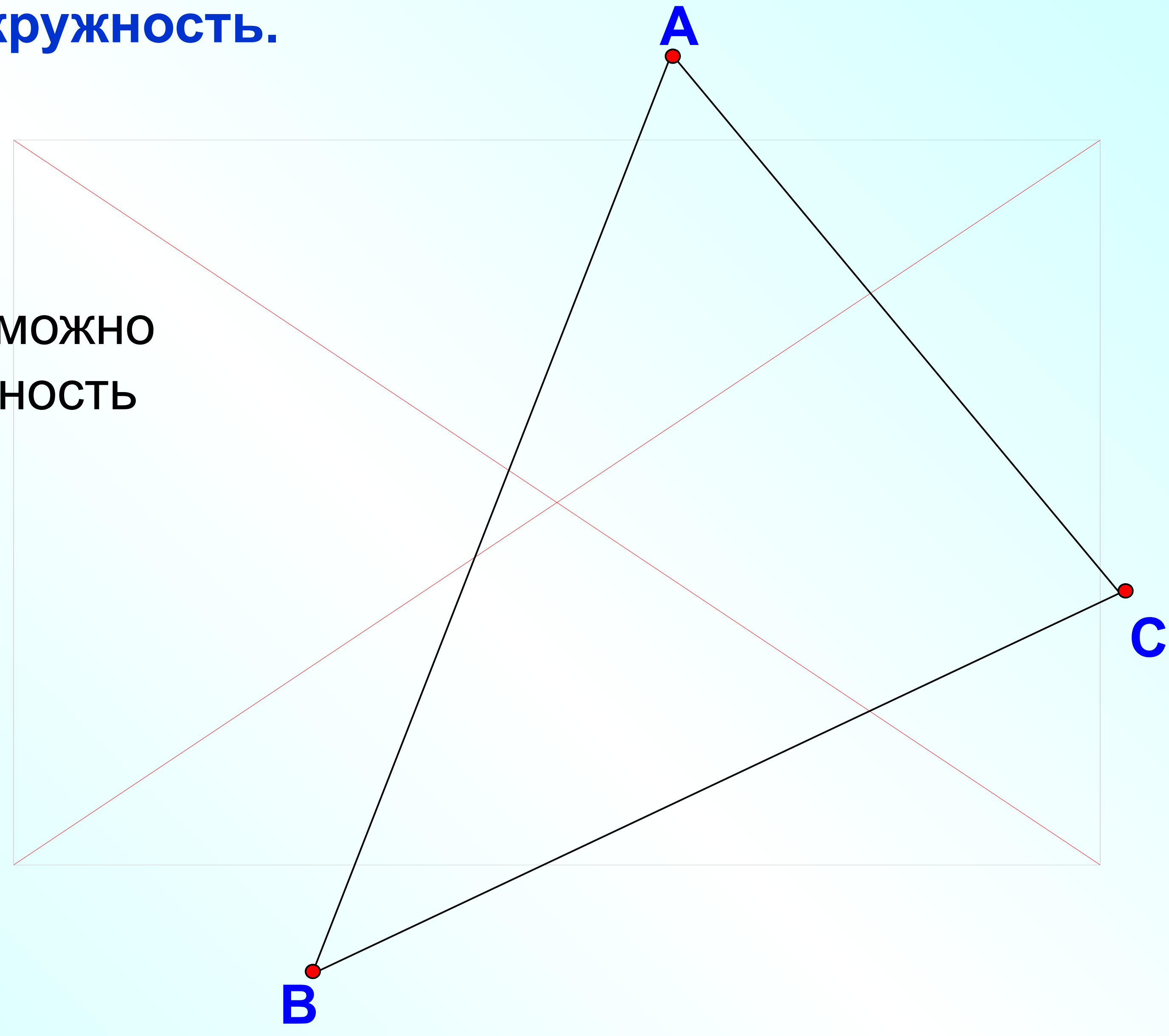
Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180^0, то около него можно вписать окружность.



Теорема **Около любого треугольника можно описать окружность.**

Дано: ΔABC

Доказать, что можно описать окружность

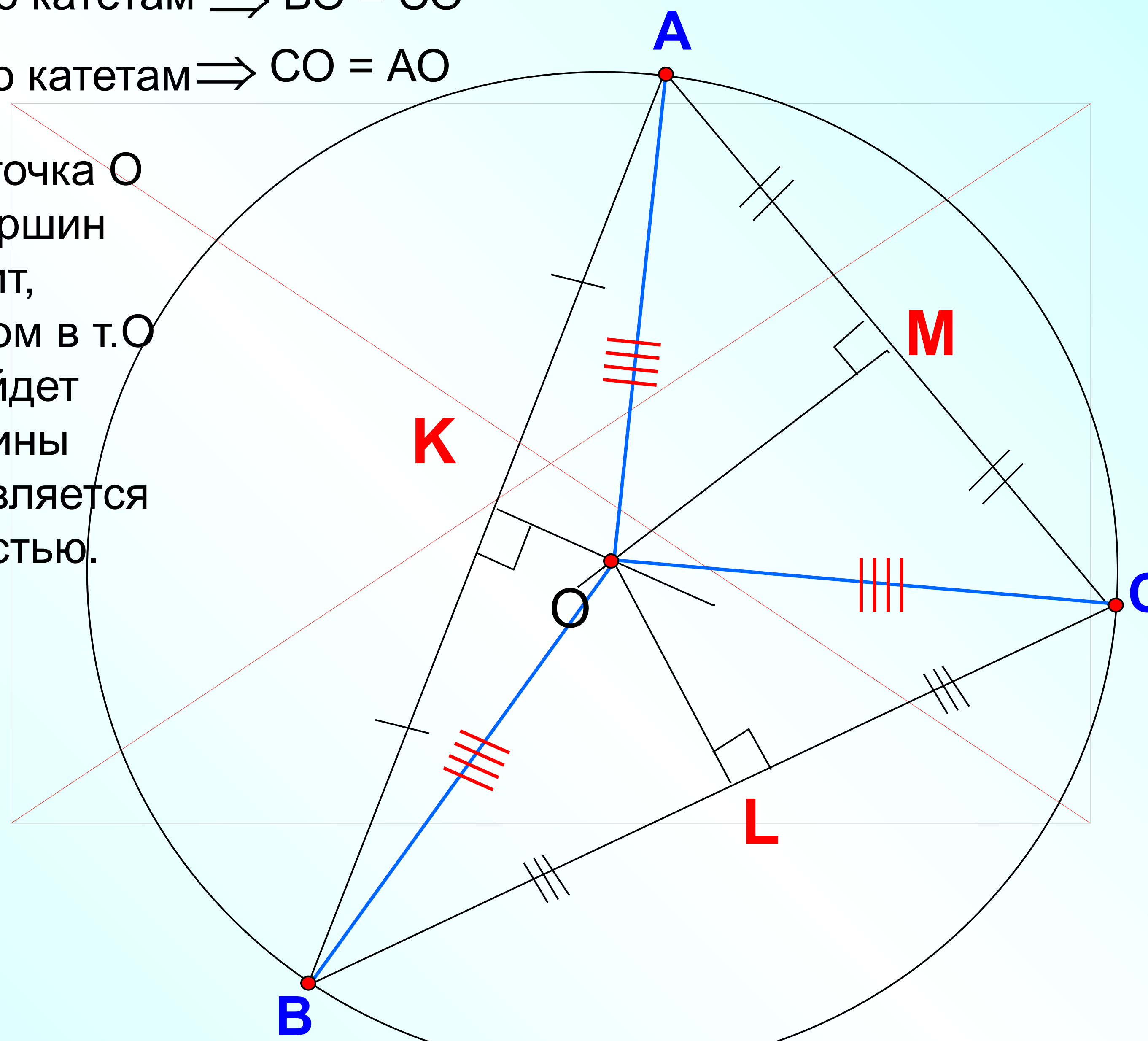


1) ДП: серединные перпендикуляры к сторонам

2) $\Delta BOL = \Delta CO\,L$, по катетам $\Longrightarrow BO = CO$

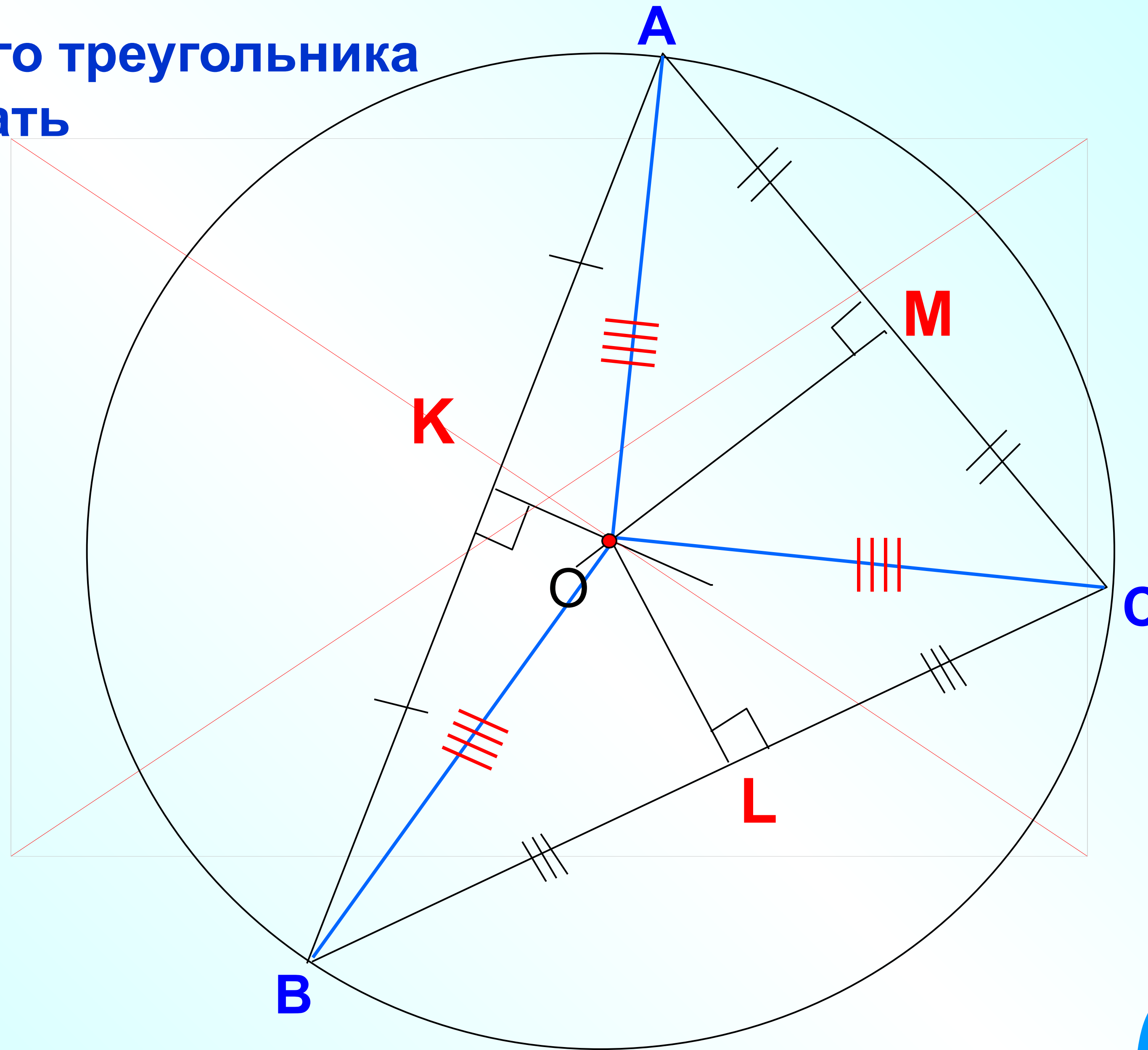
3) $\Delta COM = \Delta AOM$, по катетам $\Longrightarrow CO = AO$

4) BO=CO=AO, т.е. точка O равноудалена от вершин треугольника. Значит, окружность с центром в т.O и радиусом OA пройдет через все три вершины треугольника, т.е. является описанной окружностью.

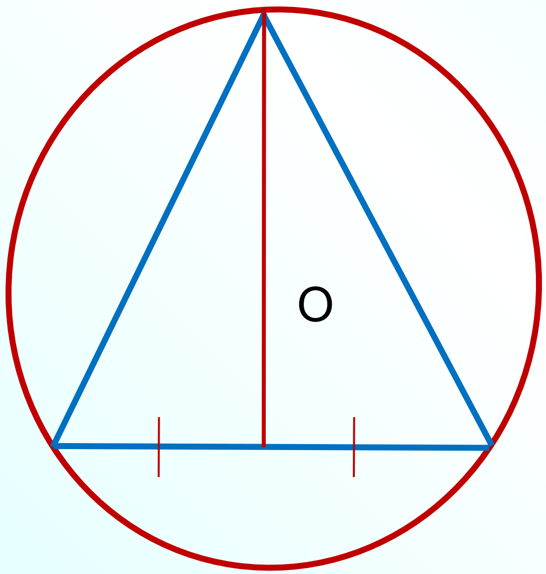


Теорема

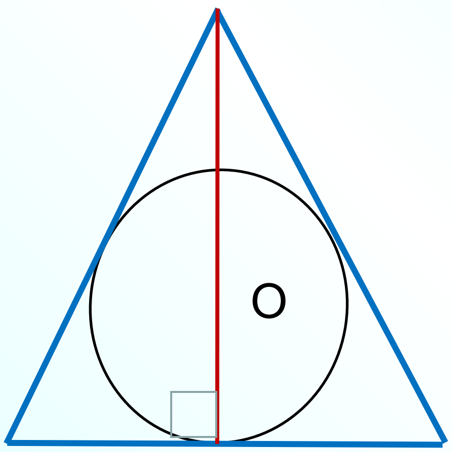
Около любого треугольника можно описать окружность.



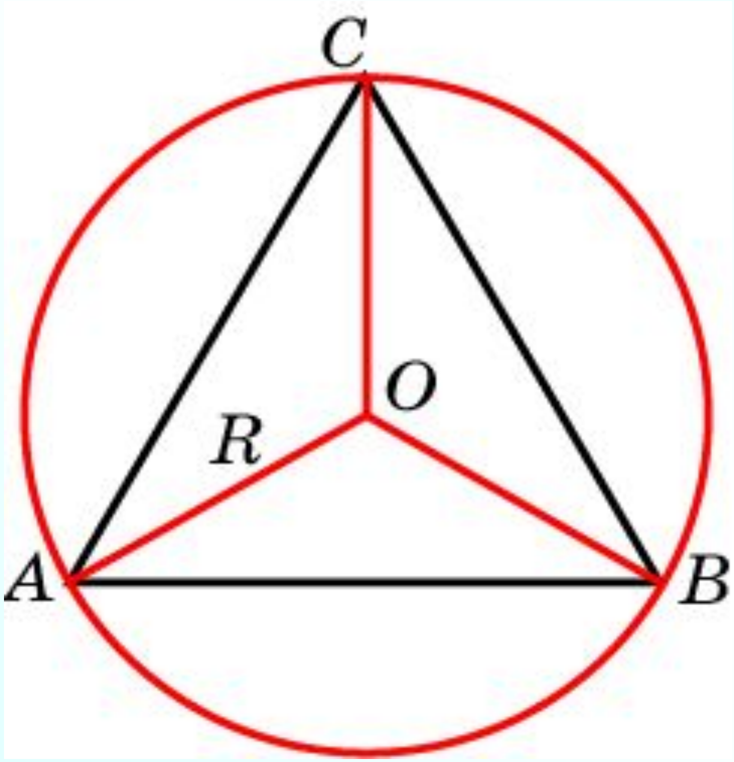
Центр описанной окружности равнобедренного треугольника принадлежит прямой, которая содержит медиану, проведенную к его основанию.



Центр вписанной окружности равнобедренного треугольника принадлежит высоте, проведенной к его основанию

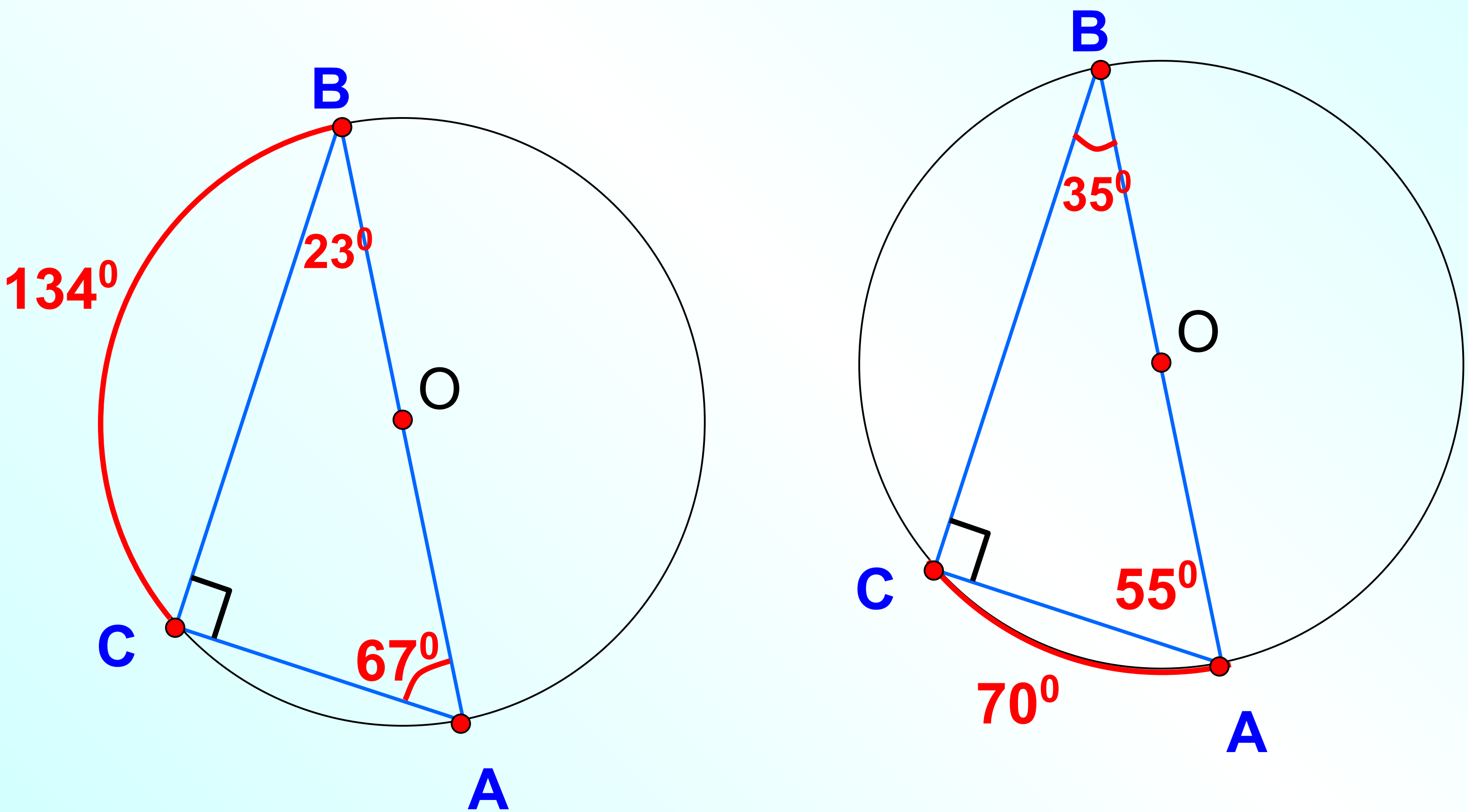


Центр описанной окружности равностороннего треугольника является точкой пересечения его биссектрис.



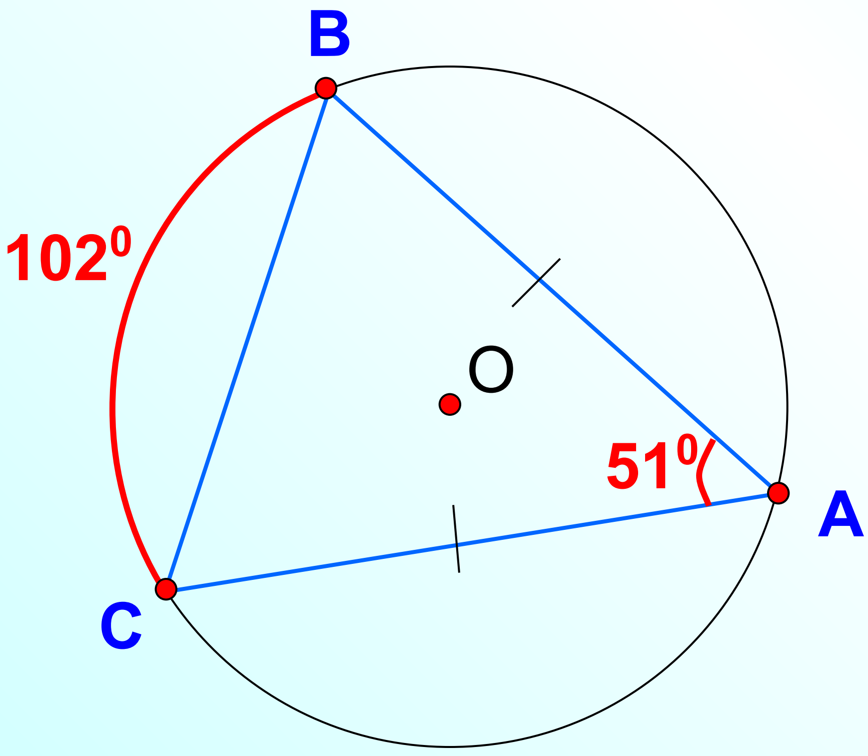
Если центр окружности, описанной около треугольника принадлежит его стороне, то треугольник - прямоугольный

№702 В окружность вписан треугольник АВС так, что АВ – диаметр окружности. Найдите углы треугольника, если: а) $\smile BC = 134^0$ б) $\smile AC = 70^0$

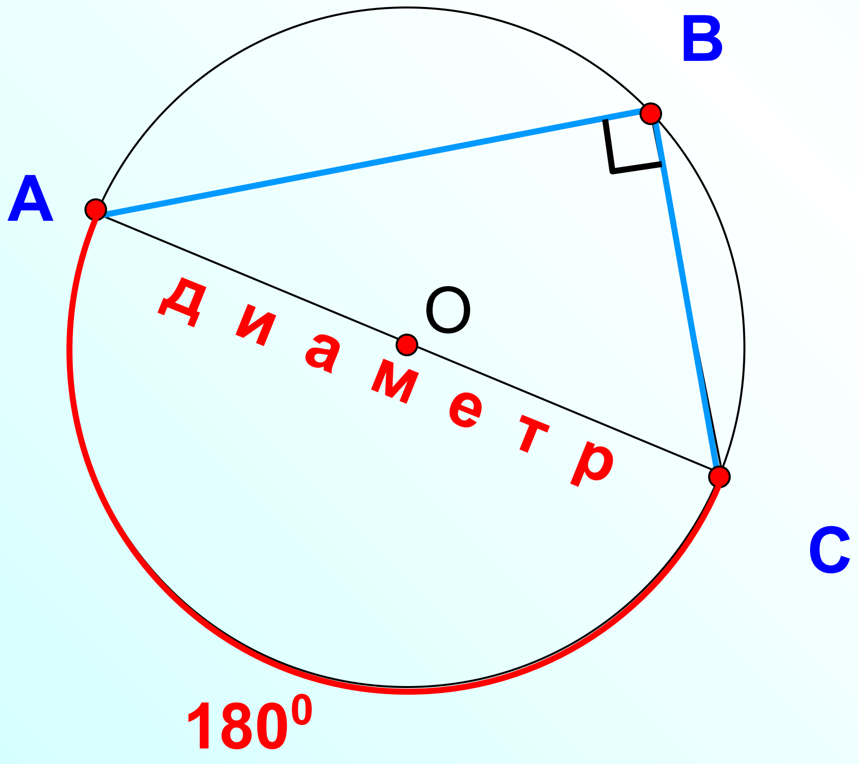


№703 В окружность вписан равнобедренный треугольник АВС с основанием ВС. Найдите углы треугольника, если $\smile BC = 102^0$.

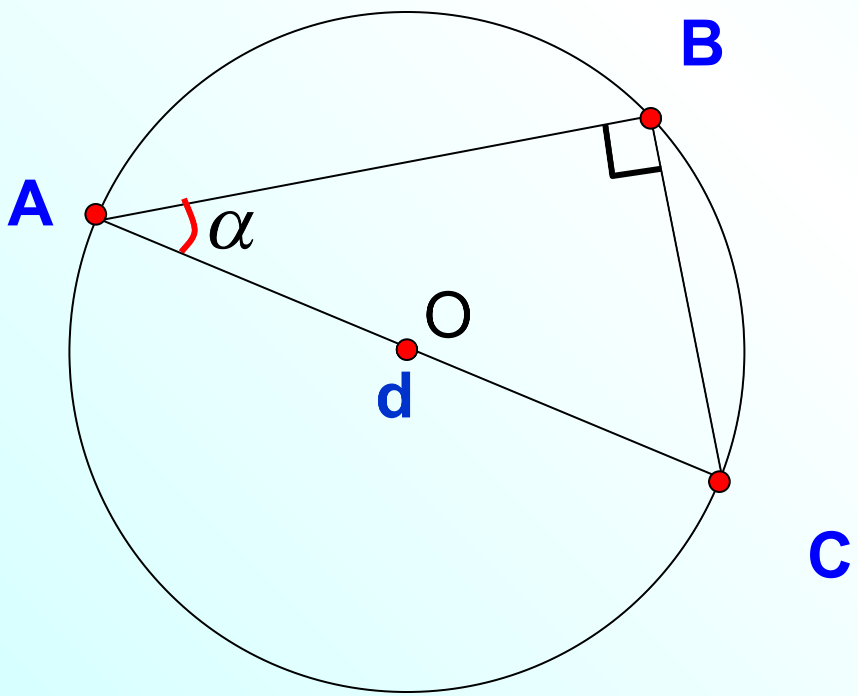
$(180^0 – 51^0) : 2 = 129^0 : 2 = 128^0 60' : 2 = 64^0 30'$



№704 (а) Окружность с центром О описана около прямоугольного треугольника. Докажите, что точка О – середина гипотенузы.



№704 (б) Окружность с центром О описана около прямоугольного треугольника. Найдите стороны треугольника, если диаметр окружности равен d, а один из острых углов треугольника равен α.



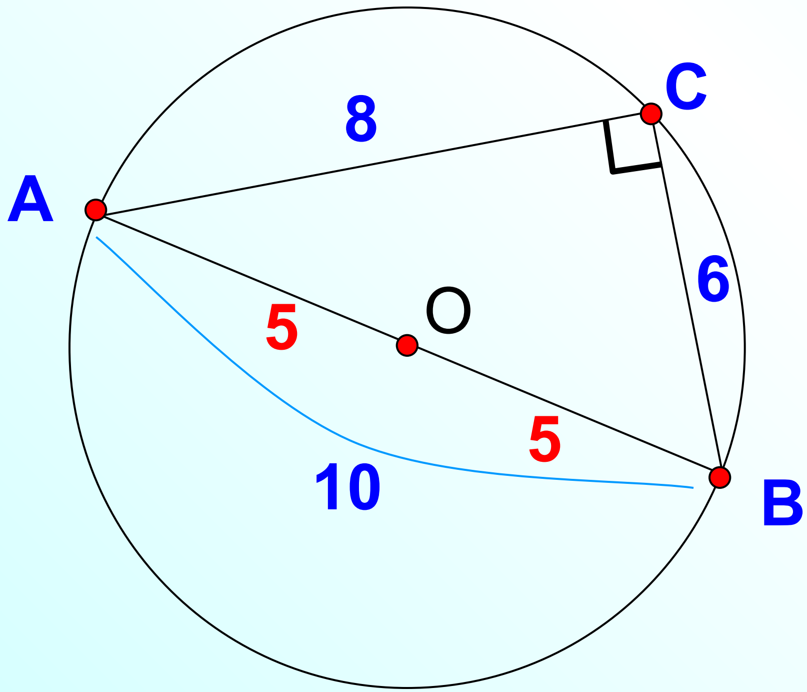
$$\cos\alpha = \frac{AB}{d}$$

$$AB = d\cdot\cos\alpha$$

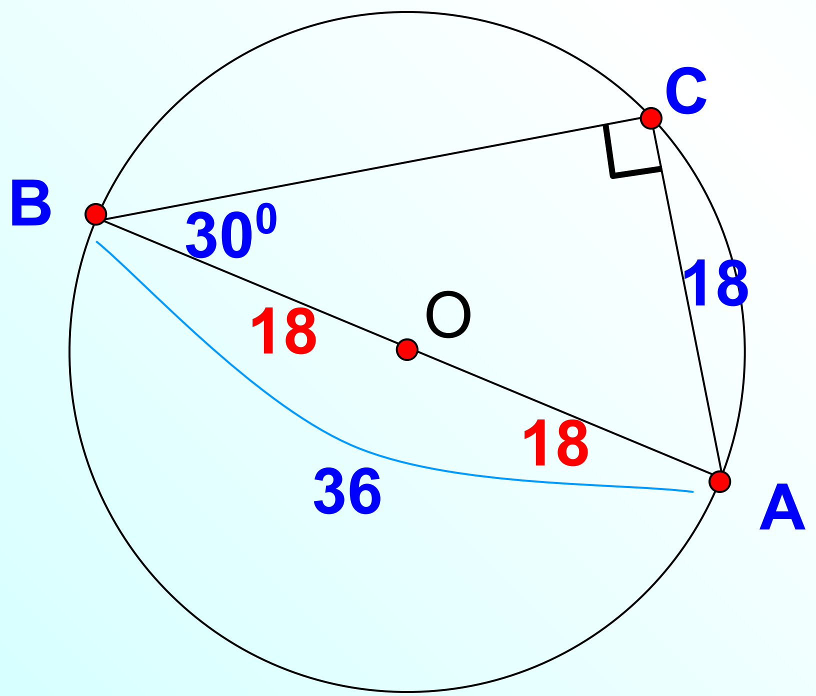
$$\sin\alpha = \frac{BC}{d}$$

$$BC = d\cdot\sin\alpha$$

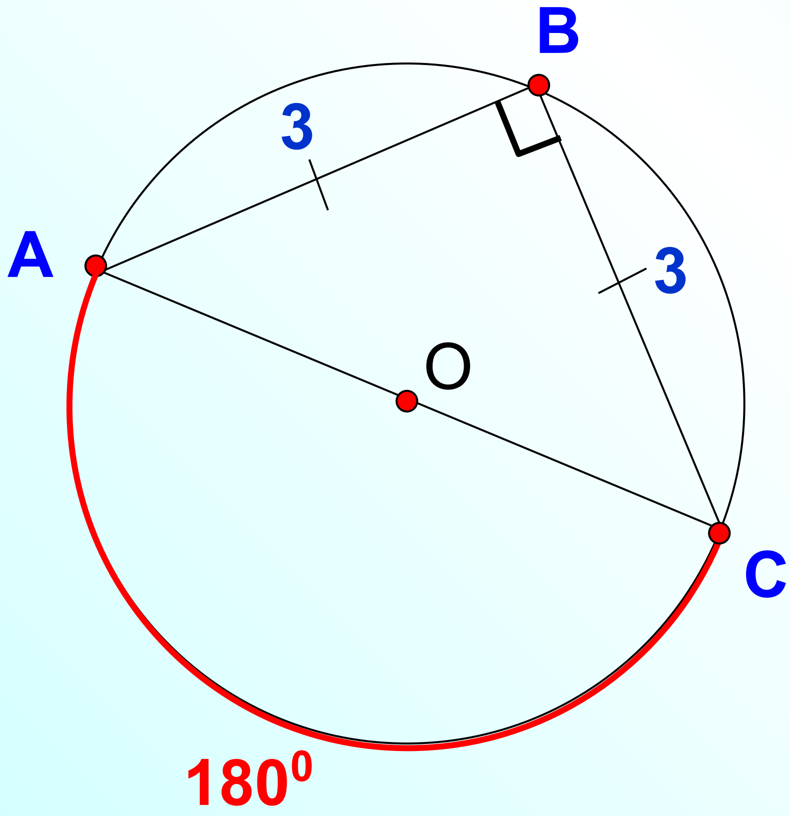
№705 (а) Около прямоугольного треугольника АВС с прямым углом С описана окружность. Найдите радиус этой окружности, если АС=8 см, ВС=6 см.



№705(б) Около прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность. Найдите радиус этой окружности, если AC=18 см, $\angle B = 30^0$.



Боковые стороны треугольника, изображенного на рисунке, равны 3 см. Найти радиус описанной около него окружности.



Радиус окружности, описанной около треугольника, изображенного на чертеже, равен 2 см.
Найти сторону АВ.