Эндогенность. Инструментальные переменные.

Эндогенность

- Эндогенный регрессор — регрессор, который коррелирован со случайными ошибками модели: $Cov(x_i, \varepsilon_i) \neq 0$.
- Экзогенный регрессор — регрессор, который **не** коррелирован со случайными ошибками модели: $Cov(x_i, \varepsilon_i) = 0$.

Эндогенность

- Для использования МНК необходимо, чтобы все регрессоры были экзогенны (иначе получим смещенные и несостоятельные оценки)

Эндогенность

- $y_i = \beta_1 + \beta_2 * x_i + \varepsilon_i$
- x — эндогенный регрессор: $Cov(x_i, \varepsilon_i) \neq 0$
- В этом случае МНК-оценка $\widehat{\beta_2}$ несостоятельна **и смещена**

Пример (доска)

Когда возникает эндогенность

1. Пропуск существенных переменных
2. Ошибки измерения регрессоров
3. Самоотбор
4. Одновременность

Ошибка изменения регрессора

Замечание: если с ошибкой изменяется y, эндогенности не будет, будет просто потеря точности.

Модель в форме А:

$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ и $Cov(x_i, \varepsilon_i) = 0$

Наблюдаем y_i и $x_i^* = x_i + u_i$,
где u_i, ошибка измерения регрессора x_i,
не зависит от x_i и ε_i

Ошибка измерения регрессора Вывод другой формы модели

Подставим $x_i = x_i^* - u_i$ в форму А и получим:

$y_i = \beta_1 + \beta_2(x_i^* - u_i) + \varepsilon_i$

и модель в форме Б:

$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i^* + w_i,\ w_i = \varepsilon_i - \beta_2 u_i$

Эндогенность в форме Б

$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i^* + w_i,\ w_i = \varepsilon_i - \beta_2 u_i$

В форме Б:

$Cov(x_i^*, w_i) = Cov(x_i + u_i, \varepsilon_i - \beta_2 u_i) =$

$= -\beta_2 Var(u_i) \neq 0$

Пропущенная переменная

- Проблема смещения из-за пропуска пропущенных переменных (если переменная пропущена, то она косвенно присутствует в ошибках уравнения)
- Инструментальные переменные можно использовать, если нет данных по пропущенной переменной и нет данных по proxy – переменной.

Пропущенная переменная

Хотим оценить форму записи А:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 d_i + \varepsilon_i$$

где $Cov(x_i, d_i) \neq 0$, $Cov(x_i, \varepsilon_i) = 0$, $Cov(d_i, \varepsilon_i) = 0$

Не наблюдаем d_i

Модель с пропущенным регрессором:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 d_i + \varepsilon_i$$

регрессор d_i не наблюдаем

Хотим оценить β_2, т.е. на сколько растёт y_i при росте x_i на единицу и фиксированном d_i

Форма записи Б:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i \quad u_i = \beta_3 d_i + \varepsilon_i$$

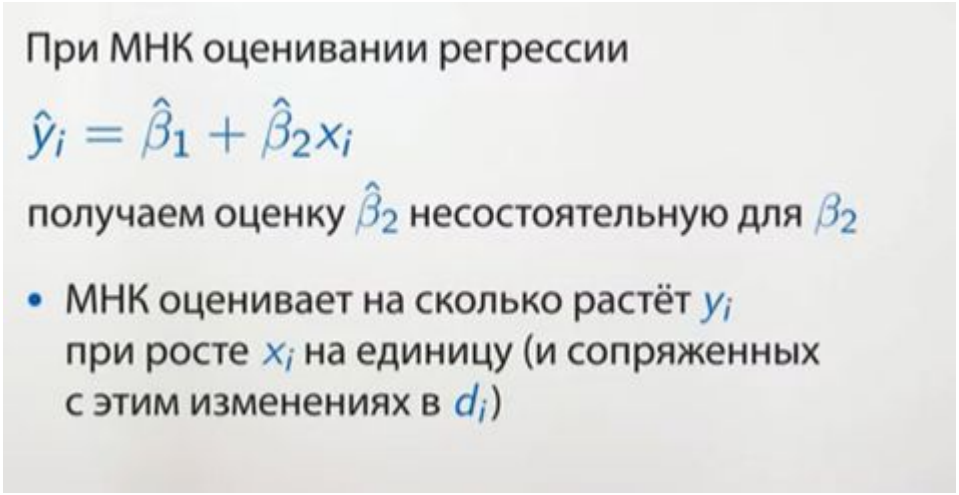
Эндогенность:

$$Cov(x_i, u_i) = Cov(x_i, \beta_3 d_i + \varepsilon_i) = \\ = \beta_3 Cov(x_i, d_i)$$

Пример (доска)

Вывод

- При наличии эндогенности мы не можем использовать МНК



Инструментальные переменные (IV)

- Пусть в нашем распоряжении есть переменная z, которая удовлетворяет двум свойствам:
  - Экзогенность: переменная не коррелирована со случайными ошибками $Cov(z_i, \varepsilon_i) = 0$
  - Релевантность: переменная коррелирована с регрессором $Cov(x_i, z_i) \neq 0$
- Тогда можно получить состоятельную оценку параметра β_2, используя **двухшаговый МНК**

Инструментальные переменные

Какая из следующих пар представляет собой удачную пару переменная и инструментальная переменная к ней соответственно?

Рост и образование родителей в регрессии среднего количества очков за матч баскетболиста на его рост.

Производство самогона и покупка сахара домохозяйством в регрессии потребления самогона на его производство.

Инструментальные переменные

Какая из следующих пар представляет собой удачную пару переменная и инструментальная переменная к ней соответственно?

Рост и образование родителей в регрессии среднего количества очков за матч баскетболиста на его рост.

Рост слабо кореллирует с образованием родителей, лучше подобрать какой-нибудь более явный инструмент.

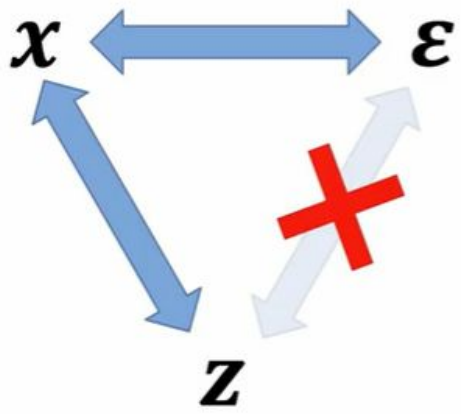
Производство самогона и покупка сахара домохозяйством в регрессии потребления самогона на его производство.

Верно! Потребление самогона зависит от склонности человека к потреблению спиртного, что не коррелярует с объёмами покупок сахара. А так как сахар является ингридиентом при производстве самогона, то эти две переменные скореллированы.

Переменная z может использоваться как **инструментальная переменная** (коротко — **инструмент**), если она является **валидной**, то есть обладает двумя свойствами:

- **Экзогенность**: переменная не коррелирована со случайными ошибками $Cov(z_i, \varepsilon_i) = 0$
- **Релевантность**: переменная коррелирована с регрессором $Cov(x_i, z_i) \neq 0$

Требования к инструментам



Двухшаговый МНК (метод инструментальных переменных)

Первый шаг

Оцениваем регрессию: $x_i = \theta_1 + \theta_2 z_i + v_i$

Получаем прогнозные значения $\hat{x}_i = \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 z_i$.

Второй шаг

Оцениваем регрессию: $y_i = \beta_1 + \beta_2 \hat{x}_i + \varepsilon_i$.

$$\left.\begin{array}{c} Cov(z_i, \varepsilon_i) = 0 \\ \hat{x}_i \text{ – линейно выражено через } z_i \end{array}\right\} \Rightarrow Cov(\hat{x}_i, \varepsilon_i) = 0$$

=> Проблема эндогенности регрессора решена

Двухшаговый МНК

Указанная процедура приводит к следующей формуле оценки коэффициента:

$$\widehat{\beta_2^{TSLS}} = \frac{\frac{1}{n}\sum(y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})}{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}$$

$$\widehat{\beta_2^{TSLS}} = \frac{\frac{1}{n}\sum(y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})}{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})} \xrightarrow{p} \frac{Cov(y_i, z_i)}{Cov(x_i, z_i)} = \beta_2$$

Мы доказали, что двухшаговый МНК дает состоятельную оценку.

Двухшаговый МНК

При $n \to \infty$ выборочные ковариации сходятся к своим теоретическим аналогам =>

$$\widehat{\beta_2^{TSLS}} = \frac{\frac{1}{n}\sum(y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})}{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})} \xrightarrow{p} \frac{Cov(y_i, z_i)}{Cov(x_i, z_i)} =$$

$$= \frac{Cov(y_i, z_i)}{Cov(x_i, z_i)} = \frac{Cov(\beta_1 + \beta_2 * x_i + \varepsilon_i, z_i)}{Cov(x_i, z_i)} =$$

$$= \frac{\beta_2 Cov(x_i, z_i) + Cov(\varepsilon_i, z_i)}{Cov(x_i, z_i)} = \beta_2$$

Метод двухшагового МНК также называют методом инструментальных переменных:

$$\hat{\beta}^{2OLS} = \hat{\beta}^{IV}$$

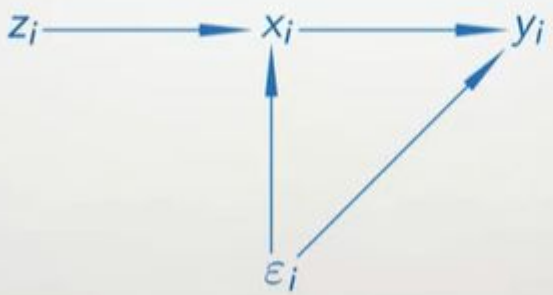
Как найти инструментальную переменную?

Инструментальная переменная z_i для регрессора x_i может влиять на y_i через через регрессор x_i, но не через ошибку ε_i

Связи инструментальной переменной

Модель с эндогенностью:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$$



Пропущенная переменная

- Проблема смещения из-за пропуска пропущенных переменных (если переменная пропущена, то она косвенно присутствует в ошибках уравнения)
- Инструментальные переменные можно использовать, если нет данных по пропущенной переменной и нет данных по proxy – переменной.

Пример

Пусть истинная модель имеет вид

$$y = \beta_1 + \beta_2 x^{(2)} + \beta_3 x^{(3)} + u$$

При этом переменная $x^{(3)}$ ненаблюдаема: у нас нет данных о ней.

Пример: на уровень дохода работника (y) влияет его талант $(x^{(3)})$, но у нас нет статистических данных об уровне таланта.

$x^{(2)}$ — число лет обучения — переменная, эффект которой нас интересует

Пример

Пусть истинная модель имеет вид

$$(1)\ y = \beta_1 + \beta_2 x^{(2)} + \underbrace{\beta_3 x^{(3)} + u}_{\varepsilon}$$

$$(2)\ y = \beta_1 + \beta_2 x^{(2)} + \varepsilon$$

где $\varepsilon = \beta_3 x^{(3)} + u$

Если $\mathrm{Cov}\left(x^{(2)}, x^{(3)}\right) \neq 0$,

то и $\mathrm{Cov}\left(x^{(2)}, \varepsilon\right) \neq 0$, то есть

регрессор в модели (2) — эндогенный

Пример

- Нам нужно придумать инструментальную переменную, которая коррелированна с уровнем образования, но некоррелированна с уровнем таланта. Это сложная задача.
- Например: насколько далеко индивид живет от колледжа.

Пример в R-studio

```
# эндогенность

data("CigarettesSW")
h <- CigarettesSW
help("CigarettesSW")

h2 <- mutate(h, rprice = price/cpi,
             rincome=income/cpi/population, rtax=tax/cpi)
h3 <- filter(h2, year=="1995")

model_0 <- lm(data=h3, log(packs)~log(rprice))
summary(model_0)
```

```
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  10.3389     1.0353   9.986 4.25e-13 ***
log(rprice)  -1.2131     0.2164  -5.604 1.13e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Пример в R-studio

- Как ценовые меры, используемые государством, повлияют на потребление сигарет?

- При оценке модели `log(packs)~log(rprice)` МНК мы предполагаем, что регрессор не коррелирует с ошибкой.

- Но если это не так, нужно использовать двухшаговый МНК

Двухшаговый МНК

- Выберем инструментальную переменную, которая влияет на цену, но не влияет на спрос (акцизные сборы)
- Можно ожидать, что акцизы будут хорошей инструментальной переменной (доказать это мы не сможем)

Двухшаговый МНК

```
# two stage OLS
# Step 1
st_1 <- lm(data=h3, log(rprice)~rtax)
h3$log_price_hat <- fitted(st_1)
# Step 2
st_2 <- lm(data=h3, log(packs)~log_price_hat)
summary(st_2)
```

```
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   10.0385     1.1651   8.616 3.72e-11 ***
log_price_hat -1.1502     0.2436  -4.722 2.22e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

- Вот этот коэффициент уже можно еинтерпретировать как причинный, т.е. можно сказать, что при увеличении цены на 1% потребление сигарет снизится на 1,5%.

Двухшаговый МНК

```
model_iv <- ivreg(data=h3, log(packs)~log(rprice)|rtax)
summary(model_iv)
```

```
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    10.039      1.095   9.164 6.06e-12 ***
log(rprice)    -1.150      0.229  -5.022 8.16e-06 ***
---
```

```
mtable(model_0, st_2, model_iv)
```

```
================================================
                  model_0     st_2     model_iv
------------------------------------------------
(Intercept)      10.339***  10.039***  10.039***
                 (1.035)    (1.165)    (1.095)
log(rprice)      -1.213***             -1.150***
                 (0.216)               (0.229)
log_price_hat                -1.150***
                             (0.244)
```

Тест Хаусмана

Несмотря на то что оценки инструментальных переменных состоятельны, они не являются эффективными, поэтому без необходимости их не следует использовать.

Но как определить, имеет ли для конкретной модели место проблема эндогенности или нет? Ответ на этот вопрос часто пытаются получить с помощью ***теста Хаусмана***.

Основная и альтернативная гипотезы в этом тесте таковы:

H_0: все регрессоры экзогенны, т.е. $\operatorname{plim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbf{X}_j^T\boldsymbol{\varepsilon} = 0 \ \forall j$;

H_1: имеет место проблема эндогенности, т.е. $\exists j \in \{1, ..., k\}$: $\operatorname{plim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbf{X}_j^T\boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$.

Основная идея теста Хаусмана — сравнение оценок МНК и ИП. Если имеет место гипотеза H_0, то и оценки МНК, и оценки ИП являются состоятельными, т.е. должны быть достаточно близки. Если же имеет место гипотеза H_1, то оценка ИП является состоятельной, а оценка МНК — нет, следовательно, их разность велика. Для оценки близости оценок МНК и ИП используют квадратичную форму (одновременно являющуюся тестовой статистикой):

$$H = (\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{ИП}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{МНК}})^T(\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{ИП}}) - \hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{МНК}}))^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{ИП}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{МНК}}),$$

где $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{ИП}}$ — вектор оценок инструментальных переменных; $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{МНК}}$ — вектор МНК-оценок; $\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{ИП}}), \hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{МНК}})$ — соответствующие оценки ковариационных матриц.

Если $H > \chi^2_{\text{crit}}(k+1)$ при выбранном уровне значимости, то основная гипотеза отвергается, и необходимо использовать инструментальные переменные.