

Лекция № 3

Моменты случайных функций

Дисциплина: “Статистическая теория радиотехнических систем”

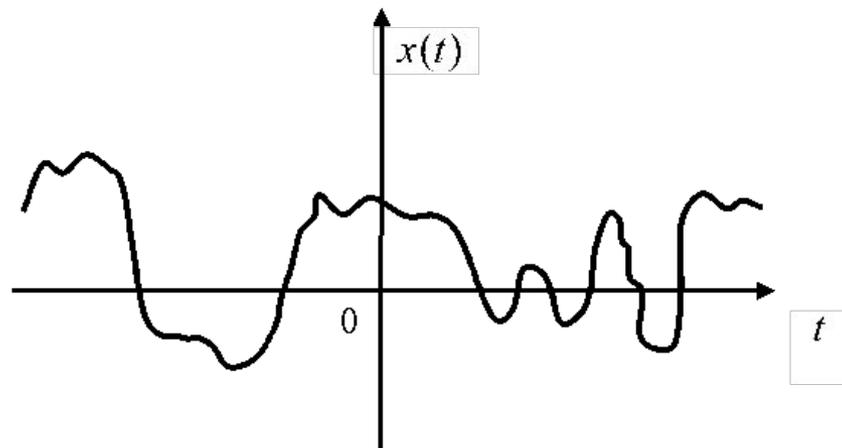


Рис. 1.1 – Случайный процесс

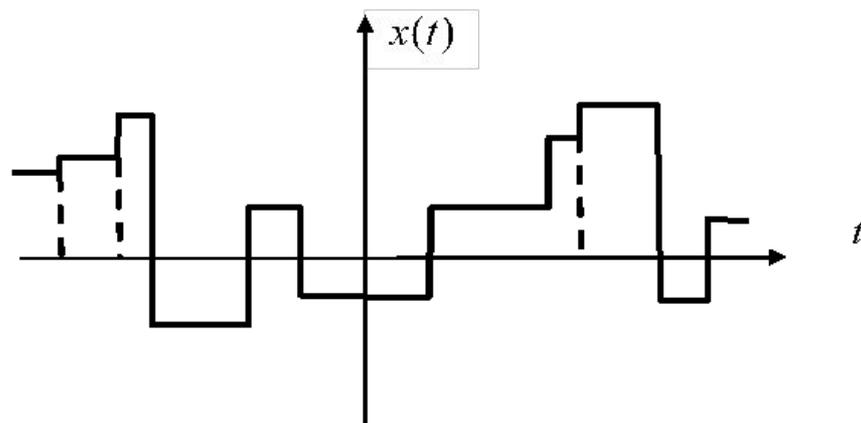


Рис. 1.2 – Дискретный случайный процесс

Процессы с независимыми значениями

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\} = \prod_{k=1}^n P\{X_k = x_k\} \quad (1.1)$$

Процессы с некоррелированными значениями

$$Cov(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (1.2)$$

Процессы с независимыми приращениями

$t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ($n \geq 3$) разности значений процесса $X(t_2) - X(t_1)$ взаимно независима.

Процессы с некоррелированными приращениями

$$\begin{aligned} & Cov(X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), X(t_4) - X(t_3)) = \\ & = Cov(X(t_2), X(t_3) - X(t_2)) - Cov(X(t_1), X(t_3) - X(t_2)) - Cov(X(t_4) - X(t_3), X(t_2)) \end{aligned} \quad (1.3)$$

при любых моментах времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$

Марковские процессы

$$P\{X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1\} = P\{X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}\} \quad (1.4)$$

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\} = P\{X_1 = x_1\} \prod_{k=2}^n P\{X_k = x_k | X_{k-1} = x_{k-1}\} \quad (1.5)$$

Стационарные процессы

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(t) &= \dots \\
 \hat{x}(t_1 + t_0), \hat{x}(t_2 + t_0) &= \hat{x}(t_1, t_2) - \hat{x}(t_0) = \hat{x}(t)
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

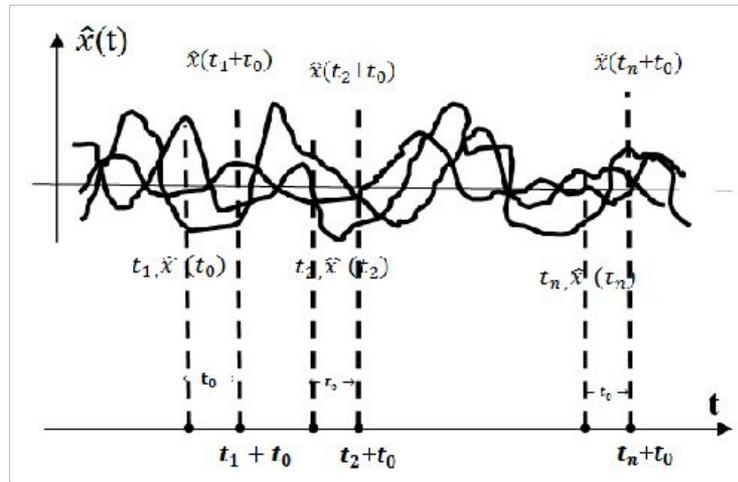


Рис. 1.3 – Стационарные случайные процессы.

$$\hat{x}(t_1 + t_0), \hat{x}(t_2 + t_0), \dots \dots \hat{x}(t_n + t_0) = \hat{x}(t_1, t_2, \dots \dots t_n)
 \tag{1.7}$$

$$\hat{x}(t_1 + t_0), \hat{x}(t_2 + t_0), \dots \dots \hat{x}(t_n + t_0) = \hat{x}(t_1, t_2, \dots \dots t_n; 0, t_2 - t_1, \dots \dots, t_n - t_1)
 \tag{1.8}$$

Вытекают следующие свойства процесса

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(t) + 0 = \hat{x}(t)
 \tag{1.9}$$

$$\hat{x}(t_1 + t_0, t_2 + t_0) = \hat{x}(t_1, t_2) - \hat{x}(t_0) = \hat{x}(t_1, t_2, t_0)
 \tag{1.10}$$

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t) dt = \hat{x}(t)
 \tag{1.11}$$

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{x}_1 - \hat{x}_2) dt_1 - \hat{x}_2 dt_2, \dots \dots \hat{x}_2
 \tag{1.12}$$

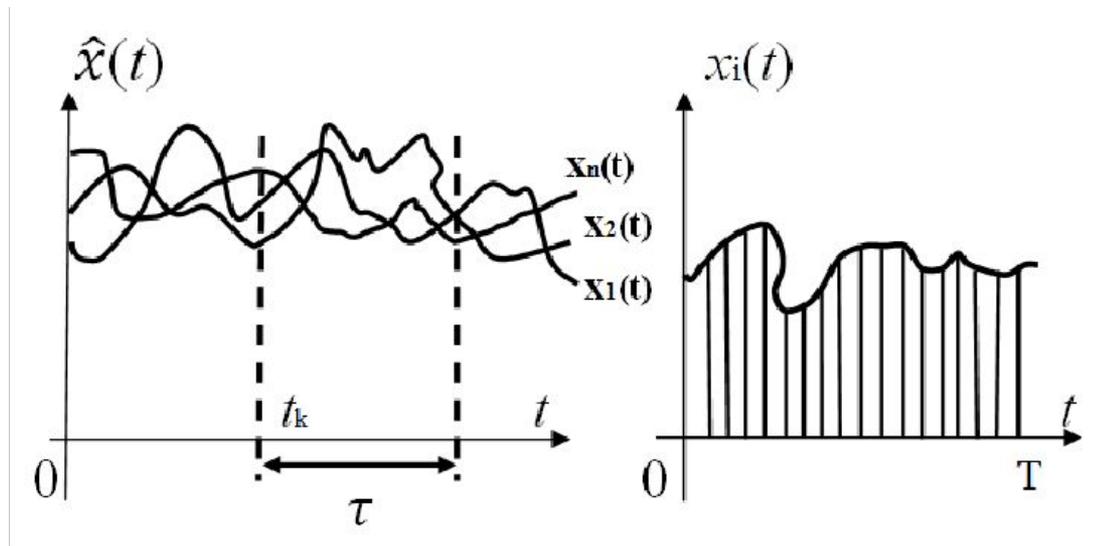


Рис. 1.4 – сечение случайного процесса $\hat{x}(t)$ и возможные значения реализаций в момент

$$t_k: x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_n(t_k)$$

$$x(t_k) = \frac{\sigma_{x^2}(t_k)}{\sigma_{x^2}(0)} \quad (1.13)$$

$$x(T) = \frac{\sigma_{x^2}(T)}{\sigma_{x^2}(0)} = \frac{\sigma_{x^2}(T+0)}{\sigma_{x^2}(0)} \quad (1.14)$$

$$x(T) = x_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t) dt \quad (1.15)$$

$$x_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t) dt = x_0 \quad (1.16)$$

$$\sigma_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2 - \bar{x}^2 \quad (1.17)$$

$$\hat{x}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \delta(t - t_k) - \bar{x} \delta(t) - \bar{x} \delta(t) \quad (1.18)$$

$$\sigma_{\hat{x}}^2 \leq \sigma_x^2 \leq \sigma_x + \sigma_{\hat{x}}^2 = \sigma_x \sigma_{\hat{x}} \sigma_x = \frac{\sigma_x^2 \sum_{k=1}^N \Delta t_k \leq \sigma_x \sigma_{\hat{x}} \leq \sigma_x + \sigma_{\hat{x}}^2}{N} \quad (1.19)$$

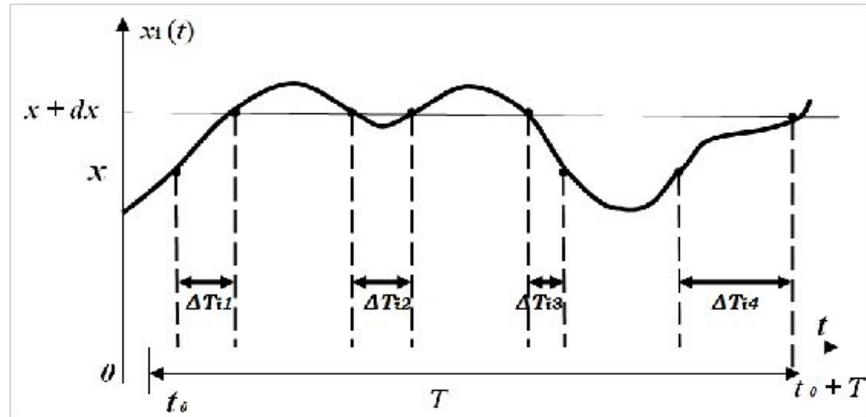


Рис. 1.5 – случайный процесс

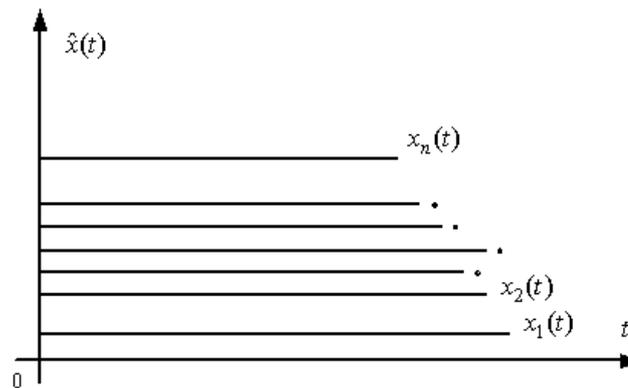


Рис. 1.6- Реализации случайного процесса