

РАЗДЕЛ 2. РЕШЕНИЕ СЛАУ

СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

m - уравнений, n - неизвестных

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Обозначения:

x_1, x_2, \dots, x_n – неизвестные;

a_{ij} – коэффициенты при неизвестных (любые действительные числа);

b_i – свободные члены (любые действительные числа).

СЛАУ В МАТРИЧНОМ ВИДЕ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Система линейных уравнений может быть представлена в виде матричного уравнения $AX=B$, где

A – матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных;

B – матрица-столбец свободных членов;

X – матрица-столбец неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР ЗАДАЧ, РЕШЕНИЕ КОТОРЫХ СВОДИТСЯ К РЕШЕНИЮ СЛАУ

Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Сведения о расходе сырья для каждого вида продукции и запасе сырья каждого типа представлены в таблице. Требуется определить план выпуска каждого вида продукции при условии использования всего имеющегося в запасе сырья.

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, ед./изд.			Запас сырья, ед.
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
C_1	6	4	5	2400
C_2	4	3	1	1450
C_3	5	2	3	1550

Решение.

Обозначим через x , y , z план выпуска соответственно первого, второго и третьего вида продукции.. Используя данные таблицы запишем систему:

$$\begin{cases} 6x + 4y + 5z = 2400, \\ 4x + 3y + z = 1450, \\ 5x + 2y + 3z = 1550. \end{cases}$$

Методы решения СЛАУ

Прямые (точные)

- метод Крамера,
- метод Гаусса,
- метод обратной матрицы,
- метод квадратных корней,
- ...

Итерационные

- метод простой итерации,
- метод Зейделя,
- ...

2.1

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

2.1.1 МЕТОД ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

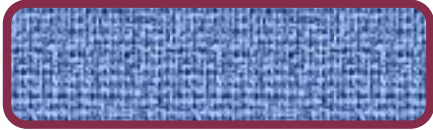
Дано: $AX = B$, $\det A \neq 0$

Решение:

$$AX = B,$$

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B,$$

т. к. $A^{-1} \cdot A = E$, то получим $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$,

т. к. $E \cdot X = X$, то получим 

2.1.1 МЕТОД ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

- Если $m=n$ и $\det A \neq 0$, то система имеет единственное решение.
- Вычисление обратной матрицы для $n > 4$ требует много времени.

2.1.1 МЕТОД ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Пример.

Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = 15 \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix},$$

2.1.1 МЕТОД ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + \left(\frac{4}{5}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 15 \\ 2 \cdot 5 + \left(\frac{12}{5}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot 15 \\ 0 \cdot 5 + \left(\frac{1}{5}\right) \cdot 0 + \left(\frac{1}{5}\right) \cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.1.2 МЕТОД КРАМЕРА

Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных называется матрицей системы, а ее определитель – определителем системы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad |A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Если в определителе системы заменить поочередно столбцы коэффициентов при x_1, x_2, \dots, x_n на столбец свободных членов, то получим n определителей (для n неизвестных).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Если определитель матрицы системы не равен нулю, система имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_1 = \Delta_1/\Delta, \quad x_2 = \Delta_2/\Delta, \quad \dots, \quad x_n = \Delta_n/\Delta.$$

2.1.2 МЕТОД КРАМЕРА

Пример.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = 15 \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

2.1.2 МЕТОД КРАМЕРА

Решение: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 15 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 15 + 5 = 10,$$

2.1.2 МЕТОД КРАМЕРА

Решение: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 15 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 15 + 5 = 10,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 15 & 4 \end{vmatrix} = 10 - 45 + 40 = 5,$$

2.1.2 МЕТОД КРАМЕРА

Решение: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 15 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 15 + 5 = 10,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 15 & 4 \end{vmatrix} = 10 - 45 + 40 = 5, \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 15 \end{vmatrix} = 15,$$

2.1.2 МЕТОД КРАМЕРА

Решение: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 15 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 15 + 5 = 10,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 15 & 4 \end{vmatrix} = 10 - 45 + 40 = 5, \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 15 \end{vmatrix} = 15,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2,$$

2.1.2 МЕТОД КРАМЕРА

Решение: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 15 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 15 + 5 = 10,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 15 & 4 \end{vmatrix} = 10 - 45 + 40 = 5, \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 15 \end{vmatrix} = 15,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1,$$

2.1.2 МЕТОД КРАМЕРА

Решение: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 15 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 15 + 5 = 10,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 15 & 4 \end{vmatrix} = 10 - 45 + 40 = 5, \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 15 \end{vmatrix} = 15,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3.$$

2.1.2 МЕТОД КРАМЕРА

Решение: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 15 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 15 + 5 = 10,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 15 & 4 \end{vmatrix} = 10 - 45 + 40 = 5, \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 15 \end{vmatrix} = 15,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3.$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.1.2 МЕТОД КРАМЕРА

Пример:

- $\det A \neq 0$,
- при больших n вычисление определителей трудоемко.

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

- алгоритм последовательного исключения неизвестных.

Прямой ход:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right),$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

- алгоритм последовательного исключения неизвестных.

Прямой ход:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right),$$

$a_{11} \neq 0, I \cdot \left(\frac{1}{a_{11}}\right):$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right),$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

- алгоритм последовательного исключения неизвестных.

Прямой ход:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right),$$

$$a_{11} \neq 0, I \cdot \left(\frac{1}{a_{11}} \right): \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right),$$

$$II - I \cdot a_{21}, II - I \cdot a_{31}: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{array} \right),$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

- алгоритм последовательного исключения неизвестных.

Прямой ход:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right),$$

$a_{11} \neq 0, I \cdot \left(\frac{1}{a_{11}}\right):$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right),$$

$II - I \cdot a_{21}, III - I \cdot a_{31}:$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{array} \right),$$

■ ■ ■

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & d_{34} \end{array} \right)$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Пример.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = 15 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array} \right)$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Решение:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array} \right)$$

$3 \neq 0, I \cdot \left(\frac{1}{3}\right) :$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array} \right)$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Решение:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array} \right)$$

$3 \neq 0, I \cdot \left(\frac{1}{3}\right):$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array} \right)$$

$II - I \cdot (-2), III - I \cdot 2:$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & 1 & 10/3 \\ 0 & -1/3 & 4 & 35/3 \end{array} \right)$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Решение:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array} \right)$$

$3 \neq 0, I \cdot \left(\frac{1}{3}\right):$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array} \right)$$

$II - I \cdot (-2), III - I \cdot 2:$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & 1 & 10/3 \\ 0 & -1/3 & 4 & 35/3 \end{array} \right)$$

$II \cdot (3):$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & -1/3 & 4 & 35/3 \end{array} \right)$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Решение:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array} \right)$$

$3 \neq 0, I \cdot \left(\frac{1}{3}\right):$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array} \right)$$

$II - I \cdot (-2), III - I \cdot 2:$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & 1 & 10/3 \\ 0 & -1/3 & 4 & 35/3 \end{array} \right)$$

$II \cdot (3):$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & -1/3 & 4 & 35/3 \end{array} \right)$$

$III - II \cdot (-1/3):$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 5/3 \end{array} \right)$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Решение:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array} \right)$$

$3 \neq 0, I \cdot \left(\frac{1}{3}\right):$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array} \right)$$

$II - I \cdot (-2), III - I \cdot 2:$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & 1 & 10/3 \\ 0 & -1/3 & 4 & 35/3 \end{array} \right)$$

$II \cdot (3):$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & -1/3 & 4 & 35/3 \end{array} \right)$$

$III - II \cdot (-1/3):$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 5/3 \end{array} \right)$$

$III \cdot \left(\frac{1}{5}\right):$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

- алгоритм последовательного исключения неизвестных.

Обратный ход:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & d_{34} \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 1 \cdot x + b_{12} \cdot y + b_{13} \cdot z = b_{14} \\ 1 \cdot y + c_{23} = c_{24} \\ 1 \cdot z = d_{34} \end{cases}$$

$$z = d_{34},$$

$$y = c_{24} - c_{23} \cdot z,$$

$$x = b_{14} - b_{13} \cdot z - b_{12} \cdot y$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 3 \end{array} \right.$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot y = 10 - 3 \cdot z = 1 \\ z = 3 \end{array} \right.$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot x = \left(\frac{5}{3}\right) - 0 \cdot z + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot y = 2 \\ 1 \cdot y = 10 - 3 \cdot z = 1 \\ z = 3 \end{array} \right.$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Необходимое и достаточное условие применимости: ведущие элементы $\neq 0$

2.1.4 МЕТОД ГЛАВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

За ведущий элемент выбирается наибольший по модулю и не принадлежащий столбцу свободных членов элемент в каждой строке.

Метод Гаусса - частный случай метода главных элементов.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1q} & \dots & a_{1n} & a_{1, n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2q} & \dots & a_{2n} & a_{2, n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{iq} & \dots & a_{in} & a_{i, n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pj} & \dots & \boxed{a_{pq}} & \dots & a_{pn} & a_{p, n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nq} & \dots & a_{nn} & a_{n, n+1} \end{bmatrix}$$

2.1.4 МЕТОД ГЛАВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Применим, если $\det A \neq 0$

2.1.5 МЕТОД КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

Дано: $AX = B$,

где A – симметричная, т. е. $A^T = A$.

Решение:

Представим матрицу A в виде произведения

$A = T^T \cdot T$, где

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}, \quad T^T = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

2.1.5 МЕТОД КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

Дано: $AX = B$,

где A – симметричная, т. е. $A^T = A$.

Решение:

Представим матрицу A в виде произведения

$$A = T^T \cdot T, \text{ где}$$

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}, \quad T^T = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

Тогда $T^T \cdot TX = B$,

2) $T^T Y = B$.

1) $TX = Y$,



2.1.5 МЕТОД КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \quad T^T = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A = T^T \cdot T$$



2.1.5 МЕТОД КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \quad T^T = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A = T^T \cdot T$$

$$\left. \begin{aligned} t_{11} &= \sqrt{a_{11}}, & t_{1j} &= \frac{a_{1j}}{t_{11}} & (j > 1), \\ t_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2} & & & (1 < i \leq n), \\ t_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{ii}} & & & (i < j), \\ t_{ij} &= 0 & \text{при} & & i > j. \end{aligned} \right\}$$

2.1.5 МЕТОД КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

Пример.

Решить систему уравнений:

Решение:

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

Дано: $AX = B$, где A - квадратная матрица.

Решение:

Представим матрицу A в виде произведения

$$A = L \cdot U,$$

$$\text{где } L = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

нижняя
треугольная
матрица

верхняя
треугольная матрица
с единичной диагональю

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

Дано: $AX = B$, где A - квадратная матрица.

Решение:

Представим матрицу A в виде произведения

$$A = L \cdot U,$$

$$\text{где } L = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

нижняя
треугольная
матрица

верхняя
треугольная матрица
с единичной диагональю

Тогда

$$LU \cdot X = B,$$

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

Дано: $AX = B$, где A - квадратная матрица.

Решение:

Представим матрицу A в виде произведения

$$A = L \cdot U,$$

$$\text{где } L = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

нижняя
треугольная
матрица

верхняя
треугольная матрица
с единичной диагональю

Тогда

$$LU \cdot X = B,$$

$$1) LY = B,$$

$$2) UX = Y.$$

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

$$A = L \cdot U,$$
$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

$$A = L \cdot U,$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

$$A = L \cdot U,$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} \cdot 1 & l_{11} \cdot u_{12} & l_{11} \cdot u_{13} \\ l_{21} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} \\ l_{31} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

$$A = L \cdot U,$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} \cdot 1 & l_{11} \cdot u_{12} & l_{11} \cdot u_{13} \\ l_{21} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} \\ l_{31} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

$$A = L \cdot U,$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} \cdot 1 & l_{11} \cdot u_{12} & l_{11} \cdot u_{13} \\ l_{21} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} \\ l_{31} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} \cdot 1 & l_{11} \cdot u_{12} & l_{11} \cdot u_{13} \\ l_{21} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} \\ l_{31} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

$$\begin{pmatrix} l_{11} \cdot 1 & l_{11} \cdot u_{12} & l_{11} \cdot u_{13} \\ l_{21} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} \\ l_{31} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} \cdot 1 & l_{11} \cdot u_{12} & l_{11} \cdot u_{13} \\ l_{21} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} \\ l_{31} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} \cdot 1 & l_{11} \cdot u_{12} & l_{11} \cdot u_{13} \\ l_{21} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} \\ l_{31} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$l_{i1} = a_{i1}, l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, i \geq j \geq 1$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}, u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right), (1 < i < j).$$

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

Пример.

Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = 15 \end{cases}$$

Решение:
$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} \cdot 1 & l_{11} \cdot u_{12} & l_{11} \cdot u_{13} \\ l_{21} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} \\ l_{31} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

Решение:

$$\begin{pmatrix} l_{11} \cdot 1 & l_{11} \cdot u_{12} & l_{11} \cdot u_{13} \\ l_{21} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} \\ l_{31} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

Решение:

$$\begin{pmatrix} l_{11} \cdot 1 & l_{11} \cdot u_{12} & l_{11} \cdot u_{13} \\ l_{21} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} \\ l_{31} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1/3 & 0 \\ 2 & -1/3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

Решение:
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1/3 & 0 \\ 2 & -1/3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1/3 & 0 \\ 2 & -1/3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1/3 & 0 \\ 2 & -1/3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.2

**ИТЕРАЦИОННЫЕ
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
СЛАУ**

2.2.1 МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Дано: $AX = B$,

где A - матрица с ненулевыми диагональными коэффициентами.

Решение:

1. Приведем систему к виду $X = A_1X + B_1$. (*)
2. Строим последовательные приближения:

$$X^{(0)} = B_1,$$

$$X^{(1)} = A_1X^{(0)} + B_1,$$

$$X^{(2)} = A_1X^{(1)} + B_1,$$

...

$$X^{(k+1)} = A_1X^{(k)} + B_1.$$

$$X = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)}$$

2.2.1 МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Пример.

Решить систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 &= 8, \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 &= 9, \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 &= 20 \end{aligned} \right\}$$

Решение:

Приведем систему к виду (*):

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3, \\ x_2 &= 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3, \\ x_3 &= 5 - 0,01x_1 + 0,02x_2. \end{aligned} \right\}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.2.1 МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Решение:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Строим последовательные приближения:

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix} \cdot X^{(0)} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,92 \\ 3,19 \\ 5,04 \end{pmatrix},$$

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix} \cdot X^{(1)} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,9094 \\ 3,1944 \\ 5,0446 \end{pmatrix},$$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix} \cdot X^{(2)} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,90923 \\ 3,19495 \\ 5,04485 \end{pmatrix},$$

2.2.1 МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

$$\Delta^{(k)} = X^{(k)} - X^{(k-1)}, (k = 1, 2 \dots)$$

Если требуется точность m верных десятичных знаков,
то:

- 1) вычисления ведем с $m+1$ десятичными знаками,
- 2) последовательные приближения вычисляем до $\Delta^{(k)} = 0$,
- 3) результат округляем до m верных знаков.

2.2.1 МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

$$\Delta^{(k)} = X^{(k)} - X^{(k-1)}, (k = 1, 2 \dots)$$

Если требуется точность m верных десятичных знаков,
то:

- 1) вычисления ведем с $m+1$ десятичными знаками,
- 2) последовательные приближения вычисляем до $\Delta^{(k)} = 0$,
- 3) результат округляем до m верных знаков.

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1,92 \\ 3,19 \\ 5,04 \end{pmatrix}, \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1,9094 \\ 3,1944 \\ 5,0446 \end{pmatrix}, \quad X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1,90923 \\ 3,19495 \\ 5,04485 \end{pmatrix},$$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1,90923 \\ 3,19495 \\ 5,04485 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1,91 \\ 3,19 \\ 5,04 \end{pmatrix}$$



2.2.1 МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

- ⦿ Процесс хорошо сходится , если элементы матрицы A_1 малы по абсолютной величине.
- ⦿ Начальное приближение может быть выбрано произвольно.

2.2.1 МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.2.1 МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

- Процесс хорошо сходится , если элементы матрицы A_1 малы по абсолютной величине.
- Начальное приближение может быть выбрано произвольно.

Теорема (достаточное условие сходимости)

Если для приведенной системы (*) выполнено по меньшей мере одно из условий:

или

$$\sum_{i=1}^n |a_{1ij}| < 1, (i = 1, 2, \dots, n)$$
$$\sum_{j=1}^n |a_{1ij}| < 1, (j = 1, 2, \dots, n),$$

то процесс итерации сходится к единственному решению этой системы, независимо от выбора начального приближения.

2.2.1 МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Теорема.

Процесс итерации для приведенной СЛАУ сходится к единственному ее решению, если

$$\|A_1\| < 1$$

$$\|\alpha\|_m = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1;$$

$$\|\alpha\|_l = \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1;$$

$$\|\alpha\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2} < 1.$$

2.2.1 МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Следствие.

Процесс итерации для приведенной СЛАУ сходится к единственному ее решению, если в

2.2.2 МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

Дано: $X = A_1 X + B_1$.

$$\begin{cases} x_1 = a_{111}x_1 + a_{112}x_2 + a_{113}x_3 + b_1 \\ x_2 = a_{121}x_1 + a_{122}x_2 + a_{123}x_3 + b_2 \\ x_3 = a_{131}x_1 + a_{132}x_2 + a_{133}x_3 + b_3 \end{cases}$$

Решение:

1. Выбираем начальное приближение

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = b_1 \\ x_2^{(0)} = b_2 \\ x_3^{(0)} = b_3 \end{cases}$$

2. Строим последовательные приближения с учетом уже вычисленных:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = a_{111}x_1^{(0)} + a_{112}x_2^{(0)} + a_{113}x_3^{(0)} + b_1 \\ x_2^{(1)} = a_{121}x_1^{(1)} + a_{122}x_2^{(0)} + a_{123}x_3^{(0)} + b_2 \\ x_3^{(1)} = a_{131}x_1^{(1)} + a_{132}x_2^{(1)} + a_{133}x_3^{(0)} + b_3 \end{cases}$$

...

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = a_{111}x_1^{(k-1)} + a_{112}x_2^{(k-1)} + a_{113}x_3^{(k-1)} + b_1 \\ x_2^{(k)} = a_{121}x_1^{(k)} + a_{122}x_2^{(k-1)} + a_{123}x_3^{(k-1)} + b_2 \\ x_3^{(k)} = a_{131}x_1^{(k)} + a_{132}x_2^{(k)} + a_{133}x_3^{(k-1)} + b_3 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

2.2.2 МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

Пример:

$$\left. \begin{array}{l} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{array} \right\} \begin{cases} x_1 = -0,1x_2 - 0,1x_3 + 1,2 \\ x_2 = -0,2x_1 - 0,1x_3 + 1,3 \\ x_3 = -0,2x_1 - 0,2x_2 + 1,4 \end{cases}$$

Решение:

1. Выбираем начальное приближение

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = 1,2 \\ x_2^{(0)} = 0 \\ x_3^{(0)} = 0 \end{cases}$$

2. Строим последовательные приближения:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0,1 \cdot 0 - 0,1 \cdot 0 + 1,2 = 1,2 \\ x_2^{(1)} = -0,2 \cdot 1,2 - 0,1 \cdot 0 + 1,3 = 1,06 \\ x_3^{(1)} = -0,2 \cdot 1,2 - 0,2 \cdot 1,06 + 1,4 = 0,948 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -0,1 \cdot 1,06 - 0,1 \cdot 0,948 + 1,2 = 0,9992 \\ x_2^{(2)} = -0,2 \cdot 0,9992 - 0,1 \cdot 0,948 + 1,3 = 1,00536 \\ x_3^{(2)} = -0,2 \cdot 0,9992 - 0,2 \cdot 1,00536 + 1,4 = 0,999098 \end{cases}$$

и т.д.

2.2.2 МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

$$\left. \begin{aligned} 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 14. \end{aligned} \right\}$$

Нахождение корней линейной системы методом Зейделя

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1,2000	0,0000	0,0000
1	1,2000	1,0600	0,9480
2	0,9992	1,0054	0,9991
3	0,9996	1,0001	1,0001
4	1,0000	1,0000	1,0000
5	1,0000	1,0000	1,0000

Точные значения корней: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$.