РАЗДЕЛ 2. РЕШЕНИЕ СЛАУ

СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

m – уравнений,n – неизвестных

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Обозначения:

$\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ – неизвестные;

a_{ij} – коэффициенты при неизвестных (любые действительные числа);

b_i – свободные члены (любые действительные числа).

СЛАУ В МАТРИЧНОМ ВИДЕ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Система линейных уравнений может быть представлена в виде матричного уравнения $AX=B$, где

A – матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных;

B – матрица-столбец свободных членов;

X – матрица-столбец неизвестных $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР ЗАДАЧ, РЕШЕНИЕ КОТОРЫХ СВОДИТСЯ К РЕШЕНИЮ СЛАУ

Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Сведения о расходе сырья для каждого вида продукции и запасе сырья каждого типа представлены в таблице. Требуется определить план выпуска каждого вида продукции при условии использования всего имеющегося в запасе сырья.

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, ед./изд.			Запас сырья, ед.
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
C_1	6	4	5	2400
C_2	4	3	1	1450
C_3	5	2	3	1550

Решение.

Обозначим через *x, y, z* план выпуска соответственно первого, второго и третьего вида продукции.. Используя данные таблицы запишем систему:

$$\begin{cases} 6x + 4y + 5z = 2400, \\ 4x + 3y + z = 1450, \\ 5x + 2y + 3z = 1550. \end{cases}$$

Методы решения СЛАУ

- **Прямые (точные)**
  - метод Крамера,
  - метод Гаусса,
  - метод обратной матрицы,
  - метод квадратных коней,

  …
- **Итерационные**
  - метод простой итерации,
  - метод Зейделя,

  …

2.1
ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

2.1.1 МЕТОД ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Дано: $AX = B$ $, detA \neq 0$

Решение:

$$AX = B,$$

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B,$$

$$\text{т. к. } A^{-1} \cdot A = E, \text{ то получим } E \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$\text{т. к. } E \cdot X = X, \text{ то получим}$$

2.1.1 МЕТОД ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

- Если $m=n$ и $\det A \neq 0$, то система имеет единственное решение.

- Вычисление обратной матрицы для $n>4$ требует много времени.

2.1.1 МЕТОД ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Пример.

Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = 15 \end{cases}$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$det A = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix},$$

2.1.1 МЕТОД ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Решение:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$det\mathrm{A} = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad \mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + \left(\frac{4}{5}\right) \cdot 0 + (-\frac{1}{5}) \cdot 15 \\ 2 \cdot 5 + \left(\frac{12}{5}\right) \cdot 0 + (-\frac{3}{5}) \cdot 15 \\ 0 \cdot 5 + \left(\frac{1}{5}\right) \cdot 0 + (\frac{1}{5}) \cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.1.2 МЕТОД КРАМЕРА

Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных называется матрицей системы, а ее определитель – определителем системы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad |A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Если в определителе системы заменить поочередно столбцы коэффициентов при $\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_n}$ на столбец свободных членов, то получим $\boldsymbol{n}$ определителей (для $\boldsymbol{n}$ неизвестных).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \cdots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

Если определитель матрицы системы не равен нулю, система имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$\boldsymbol{x_1} = \Delta_1/\Delta$, $\boldsymbol{x_2} = \Delta_2/\Delta$, ..., $\boldsymbol{x_n} = \Delta_n/\Delta$.

2.1.2 МЕТОД КРАМЕРА

Пример.

Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = 15 \end{cases}$

Решение:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

2.1.2 МЕТОД КРАМЕРА

Решение: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

$$det\mathrm{A} = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 15 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 15 + 5 = 10,$$

2.1.2 МЕТОД КРАМЕРА

Решение: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

$$det\mathrm{A} = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 15 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 15 + 5 = 10,$$

$$\Delta_{\mathrm{y}} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 15 & 4 \end{vmatrix} = 10 - 45 + 40 = 5,$$

2.1.2 МЕТОД КРАМЕРА

Решение: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

$$det\mathrm{A} = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 15 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 15 + 5 = 10,$$

$$\Delta_{\mathrm{y}} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 15 & 4 \end{vmatrix} = 10 - 45 + 40 = 5, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 15 \end{vmatrix} = 15,$$

2.1.2 МЕТОД КРАМЕРА

Решение: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

$$detA = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 15 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 15 + 5 = 10,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 15 & 4 \end{vmatrix} = 10 - 45 + 40 = 5, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 15 \end{vmatrix} = 15,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2,$$

2.1.2 МЕТОД КРАМЕРА

Решение: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

$$det A = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 15 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 15 + 5 = 10,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 15 & 4 \end{vmatrix} = 10 - 45 + 40 = 5, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 15 \end{vmatrix} = 15,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1,$$

2.1.2 МЕТОД КРАМЕРА

Решение: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

$$det A = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 15 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 15 + 5 = 10,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 15 & 4 \end{vmatrix} = 10 - 45 + 40 = 5, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 15 \end{vmatrix} = 15,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3.$$

2.1.2 МЕТОД КРАМЕРА

Решение: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

$$detA = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 15 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 15 + 5 = 10,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 15 & 4 \end{vmatrix} = 10 - 45 + 40 = 5, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 15 \end{vmatrix} = 15,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3.$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

2.1.2 МЕТОД КРАМЕРА

Пример:

- $\det A \neq 0$,

- при больших n вычисление определителей трудоемко.

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

- алгоритм последовательного исключения неизвестных.

Прямой ход: $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right),$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

- алгоритм последовательного исключения неизвестных.

Прямой ход:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right),$$

$$a_{11} \neq 0, \mathrm{I} \cdot \left(\frac{1}{a_{11}}\right): \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right),$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

- алгоритм последовательного исключения неизвестных.

Прямой ход:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right),$$

$$a_{11} \neq 0, \mathrm{I} \cdot (\frac{1}{a_{11}}): \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right),$$

$$II - I \cdot a_{21}, II - I \cdot a_{31}: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{array}\right),$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

- алгоритм последовательного исключения неизвестных.

Прямой ход: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | a_{34} \end{pmatrix},$

$$a_{11} \neq 0, \mathrm{I} \cdot (\frac{1}{a_{11}}): \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & | b_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | a_{34} \end{pmatrix},$$

$$II - I \cdot a_{21}, III - I \cdot a_{31}: \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & | b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & | b_{24} \\ 0 & b_{32} & {}_{3} & | b_{34} \end{pmatrix},$$

...

$$\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & | b_{14} \\ 0 & 1 & c_{23} & | c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & | d_{34} \end{pmatrix}$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Пример.

Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = 15 \end{cases}$

Решение: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right)$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right)$$

$$3 \neq 0, \mathrm{I} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right)$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Решение:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right)$$

$$3 \neq 0, \mathrm{I} \cdot \left(\frac{1}{3}\right): \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{II} - \mathrm{I} \cdot (-2), \mathrm{III} - \mathrm{I} \cdot \ 2: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & 1 & 10/3 \\ 0 & -1/3 & 4 & 35/3 \end{array}\right)$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right)$$

$$3 \neq 0, \mathrm{I} \cdot \left(\frac{1}{3}\right): \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{II} - \mathrm{I} \cdot (-2), \mathrm{III} - \mathrm{I} \cdot 2: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & 1 & 10/3 \\ 0 & -1/3 & 4 & 35/3 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{II} \cdot (3): \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & -1/3 & 4 & 35/3 \end{array}\right)$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right)$$

$$3 \neq 0, \mathrm{I} \cdot \left(\frac{1}{3}\right): \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{II} - \mathrm{I} \cdot (-2), \mathrm{III} - \mathrm{I} \cdot 2: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & 1 & 10/3 \\ 0 & -1/3 & 4 & 35/3 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{II} \cdot (3): \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & -1/3 & 4 & 35/3 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{III} - \mathrm{II} \cdot (-1/3): \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 5/3 \end{array}\right)$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Решение:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right)$$

$$3 \neq 0, \mathrm{I} \cdot \left(\frac{1}{3}\right): \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{II} - \mathrm{I} \cdot (-2), \mathrm{III} - \mathrm{I} \cdot 2: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & 1 & 10/3 \\ 0 & -1/3 & 4 & 35/3 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{II} \cdot (3): \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & -1/3 & 4 & 35/3 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{III} - \mathrm{II} \cdot (-1/3): \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 5/3 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{III} \cdot \left(\frac{1}{5}\right): \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

- алгоритм последовательного исключения неизвестных.

Обратный ход:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & d_{34} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 1 \cdot x + b_{12} \cdot y + b_{13} \cdot z = b_{14} \\ 1 \cdot y + c_{23} = c_{24} \\ 1 \cdot z = d_{34} \end{cases}$$

$$z = d_{34},$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{c}_{24} - \mathrm{c}_{23} \cdot \mathrm{z},$$

$$\mathrm{x} = \mathrm{b}_{14} - \mathrm{b}_{13} \cdot \mathrm{z} - \mathrm{b}_{12} \cdot \mathrm{y}$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \\ \\ z = 3 \end{cases}$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \\ 1 \cdot y = 10 - 3 \cdot z = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 1 \cdot x = \left(\frac{5}{3}\right) - 0 \cdot z + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot y = 2 \\ 1 \cdot y = 10 - 3 \cdot z = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

2.1.3 МЕТОД ГАУССА

Необходимое и достаточное условие применимости: ведущие элементы ≠0

2.1.4 МЕТОД ГЛАВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

За ведущий элемент выбирается наибольший по модулю и не принадлежащий столбцу свободных членов элемент в каждой строке.

Метод Гаусса – частный случай метода главных элементов.

$$M=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1q} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2q} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{iq} & \dots & a_{in} & a_{i,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pj} & \dots & \boxed{a_{pq}} & \dots & a_{pn} & a_{p,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nq} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

2.1.4 МЕТОД ГЛАВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Применим, если $\det A \neq 0$

2.1.5 МЕТОД КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

Дано: $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$,

где A – симметричная, т. е. $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}$.

Решение:

Представим матрицу A в виде произведения

$$\mathrm{A} = \mathrm{T}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{T}, \text{где}$$

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{T}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

2.1.5 МЕТОД КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

Дано: $AX = B$,

где A – симметричная, т. е. $A^T = A$.

Решение:

Представим матрицу A в виде произведения

$$A = T^T \cdot T, \text{ где}$$

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix}, \qquad T^T = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ t_{1n} & t_{2n} & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

Тогда $T^T \cdot TX = B$,

$$2)\ T^T У = B.$$

$$1)\ TX = У,$$

2.1.5 МЕТОД КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathrm{T}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{T}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{T}$$

2.1.5 МЕТОД КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \quad T^T = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A = T^T \cdot T$$

$$\left.\begin{aligned} & t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}} \qquad (j > 1), \\ & t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2} \qquad (1 < i \leqslant n), \\ & t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{ii}} \qquad (i < j), \\ & t_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i > j. \end{aligned}\right\}$$

2.1.5 МЕТОД КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

Пример.

Решить систему уравнений:

Решение:

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

Дано: $AX = B$, где A – квадратная матрица.

Решение:

Представим матрицу A в виде произведения

$$A = L \cdot U,$$

$$\text{где } L = \underbrace{\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}}_{\text{нижняя треугольная матрица}}, U = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{верхняя треугольная матрица с единичной диагональю}}.$$

2.1.6 Метод LU-разложения (схема Халецкого)

Дано: $AX = B$, где A – квадратная матрица.

Решение:

Представим матрицу A в виде произведения

$$A = L \cdot U,$$

$$\text{где } L = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

нижняя треугольная матрица

верхняя треугольная матрица с единичной диагональю

Тогда

$$LU \cdot X = B,$$

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

Дано: $AX = B$, где A – квадратная матрица.

Решение:

Представим матрицу A в виде произведения

$$A = L \cdot U,$$

$$\text{где } L = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

нижняя треугольная матрица

верхняя треугольная матрица с единичной диагональю

Тогда

$$LU \cdot X = B,$$

$$1)\ LY = B,$$

$$2)\ UX = Y.$$

2.1.6 Метод LU-разложения (схема Халецкого)

$$A = L \cdot U,$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

$$A = L \cdot U,$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2.1.6 Метод LU-разложения (схема Халецкого)

$$A = L \cdot U,$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} \cdot 1 & l_{11} \cdot u_{12} & l_{11} \cdot u_{13} \\ l_{21} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} \\ l_{31} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

$$A = L \cdot U,$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} \cdot 1 & l_{11} \cdot u_{12} & l_{11} \cdot u_{13} \\ l_{21} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} \\ l_{31} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

$$A = L \cdot U,$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} \cdot 1 & l_{11} \cdot u_{12} & l_{11} \cdot u_{13} \\ l_{21} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} \\ l_{31} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} \cdot 1 & l_{11} \cdot u_{12} & l_{11} \cdot u_{13} \\ l_{21} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} \\ l_{31} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

$$\begin{pmatrix} l_{11}\cdot 1 & l_{11}\cdot u_{12} & l_{11}\cdot u_{13} \\ l_{21}\cdot 1 & l_{21}\cdot u_{12}+l_{22}\cdot 1 & l_{21}\cdot u_{13}+l_{22}\cdot u_{23} \\ l_{31}\cdot 1 & l_{31}\cdot u_{12}+l_{32}\cdot 1 & l_{31}\cdot u_{13}+l_{32}\cdot u_{23}+l_{33}\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11}\cdot 1 & l_{11}\cdot u_{12} & l_{11}\cdot u_{13} \\ l_{21}\cdot 1 & l_{21}\cdot u_{12}+l_{22}\cdot 1 & l_{21}\cdot u_{13}+l_{22}\cdot u_{23} \\ l_{31}\cdot 1 & l_{31}\cdot u_{12}+l_{32}\cdot 1 & l_{31}\cdot u_{13}+l_{32}\cdot u_{23}+l_{33}\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11}\cdot 1 & l_{11}\cdot u_{12} & l_{11}\cdot u_{13} \\ l_{21}\cdot 1 & l_{21}\cdot u_{12}+l_{22}\cdot 1 & l_{21}\cdot u_{13}+l_{22}\cdot u_{23} \\ l_{31}\cdot 1 & l_{31}\cdot u_{12}+l_{32}\cdot 1 & l_{31}\cdot u_{13}+l_{32}\cdot u_{23}+l_{33}\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$l_{i1} = a_{i1}, l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}, i \geq j \geq 1$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}, u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}\right), (1 < i < j).$$

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

Пример.

Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = 15 \end{cases}$$

Решение:
$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} \cdot 1 & l_{11} \cdot u_{12} & l_{11} \cdot u_{13} \\ l_{21} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot 1 & l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} \\ l_{31} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot 1 & l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

Решение:

$$\begin{pmatrix} l_{11}\cdot 1 & l_{11}\cdot u_{12} & l_{11}\cdot u_{13} \\ l_{21}\cdot 1 & l_{21}\cdot u_{12}+l_{22}\cdot 1 & l_{21}\cdot u_{13}+l_{22}\cdot u_{23} \\ l_{31}\cdot 1 & l_{31}\cdot u_{12}+l_{32}\cdot 1 & l_{31}\cdot u_{13}+l_{32}\cdot u_{23}+l_{33}\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

2.1.6 МЕТОД LU-РАЗЛОЖЕНИЯ (СХЕМА ХАЛЕЦКОГО)

Решение:

$$\begin{pmatrix} l_{11}\cdot 1 & l_{11}\cdot u_{12} & l_{11}\cdot u_{13} \\ l_{21}\cdot 1 & l_{21}\cdot u_{12}+l_{22}\cdot 1 & l_{21}\cdot u_{13}+l_{22}\cdot u_{23} \\ l_{31}\cdot 1 & l_{31}\cdot u_{12}+l_{32}\cdot 1 & l_{31}\cdot u_{13}+l_{32}\cdot u_{23}+l_{33}\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1/3 & 0 \\ 2 & -1/3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

2.1.6 Метод LU-разложения (схема Халецкого)

Решение: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1/3 & 0 \\ 2 & -1/3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1/3 & 0 \\ 2 & -1/3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1/3 & 0 \\ 2 & -1/3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.2 ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

2.2.1 МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Дано: $AX = B,$

где A –матрица с ненулевыми диагональными коэффициентами.

Решение:

1. Приведем систему к виду $X = A_1X + B_1.$ (*)
2. Строим последовательные приближения:

$$X^{(0)} = B_1,$$

$$X^{(1)} = A_1X^{(0)} + B_1,$$

$$X^{(2)} = A_1X^{(1)} + B_1,$$

…

$$X^{(k+1)} = A_1X^{(k)} + B_1.$$

$$\boxed{X = \lim_{k\to\infty} X^{(k)}}$$

2.2.1 МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Пример.

Решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 &= 8, \\ 0{,}09x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 &= 9, \\ 0{,}04x_1 - 0{,}08x_2 + 4x_3 &= 20 \end{aligned}\right\}$$

Решение:

Приведем систему к виду (*):

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2 - 0{,}06x_2 + 0{,}02x_3, \\ x_2 &= 3 - 0{,}03x_1 + 0{,}05x_3, \\ x_3 &= 5 - 0{,}01x_1 + 0{,}02x_2. \end{aligned}\right\}$$

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{X} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.2.1 МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Решение:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Строим последовательные приближения:

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{pmatrix} \cdot X^{(0)} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}92 \\ 3{,}19 \\ 5{,}04 \end{pmatrix},$$

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{pmatrix} \cdot X^{(1)} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}9094 \\ 3{,}1944 \\ 5{,}0446 \end{pmatrix},$$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{pmatrix} \cdot X^{(2)} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}90923 \\ 3{,}19495 \\ 5{,}04485 \end{pmatrix},$$

2.2.1 МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

$$\Delta^{(k)} = \mathrm{X}^{(k)} - \mathrm{X}^{(k-1)}, (k = 1,2 \dots)$$

Если требуется точность m верных десятичных знаков, то:

1) вычисления ведем с m+1 десятичными знаками,
2) последовательные приближения вычисляем до $\Delta^{(k)} = 0$,
3) результат округляем до m верных знаков.

2.2.1 МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

$$\Delta^{(k)} = X^{(k)} - X^{(k-1)}, (k = 1,2 \dots)$$

Если требуется точность m верных десятичных знаков, то:

1) вычисления ведем с m+1 десятичными знаками,
2) последовательные приближения вычисляем до $\Delta^{(k)} = 0$,
3) результат округляем до m верных знаков.

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1,92 \\ 3,19 \\ 5,04 \end{pmatrix}, \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1,9094 \\ 3,1944 \\ 5,0446 \end{pmatrix}, \quad X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1,90923 \\ 3,19495 \\ 5,04485 \end{pmatrix},$$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1,90923 \\ 3,19495 \\ 5,04485 \end{pmatrix} \quad \boxed{X = \begin{pmatrix} 1,91 \\ 3,19 \\ 5,04 \end{pmatrix}}$$

2.2.1 МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

- Процесс хорошо сходится , если элементы матрицы A_1 малы по абсолютной величине.
- Начальное приближение может быть выбрано произвольно.

2.2.1 МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.2.1 МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

- Процесс хорошо сходится , если элементы матрицы A_1 малы по абсолютной величине.
- Начальное приближение может быть выбрано произвольно.

Теорема **(достаточное условие сходимости)**

Если для приведенной системы (*) выполнено

по меньшей мере одно из условий:

$$\sum_{i=1}^{n} \left|a_{1_{ij}}\right| < 1, (i = 1,2, \dots , n)$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} \left|a_{1_{ij}}\right| < 1, (j = 1,2, \dots , n),$$

то процесс итерации сходится к единственному решению

этой системы, независимо от выбора начального приближения.

2.2.1 МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Теорема.
Процесс итерации для приведенной СЛАУ сходится к единственному ее решению, если

$$\|A_1\| < 1$$

$$\|\alpha\|_m = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1;$$

$$\|\alpha\|_l = \max_j \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1;$$

$$\|\alpha\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2} < 1.$$

2.2.1 МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Следствие.
Процесс итерации для приведенной СЛАУ сходится к единственному ее решению, если в

2.2.2 МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

Дано: $X = A_1X + B_1.$ $\begin{cases} x_1 = a_{1_{11}}x_1 + a_{1_{12}}x_2 + a_{1_{13}}x_3 + b_1 \\ x_2 = a_{1_{21}}x_1 + a_{1_{22}}x_2 + a_{1_{23}}x_3 + b_2 \\ x_3 = a_{1_{31}}x_1 + a_{1_{32}}x_2 + a_{1_{33}}x_3 + b_3 \end{cases}$

Решение:

1. Выбираем начальное приближение $\begin{cases} x_1^{(0)} = b_1 \\ x_2^{(0)} = b_2 \\ x_3^{(0)} = b_3 \end{cases}$

2. Строим последовательные приближения с учетом уже вычисленных:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = a_{1_{11}}x_1^{(0)} + a_{1_{12}}x_2^{(0)} + a_{1_{13}}x_3^{(0)} + b_1 \\ x_2^{(1)} = a_{1_{21}}x_1^{(1)} + a_{1_{22}}x_2^{(0)} + a_{1_{23}}x_3^{(0)} + b_2 \\ x_3^{(1)} = a_{1_{31}}x_1^{(1)} + a_{1_{32}}x_2^{(1)} + a_{1_{33}}x_3^{(0)} + b_3 \end{cases}$$

$\ldots$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = a_{1_{11}}x_1^{(k-1)} + a_{1_{12}}x_2^{(k-1)} + a_{1_{13}}x_3^{(k-1)} + b_1 \\ x_2^{(k)} = a_{1_{21}}x_1^{(k)} + a_{1_{22}}x_2^{(k-1)} + a_{1_{23}}x_3^{(k-1)} + b_2 \\ x_3^{(k)} = a_{1_{31}}x_1^{(k)} + a_{1_{32}}x_2^{(k)} + a_{1_{33}}x_3^{(k-1)} + b_3 \end{cases} \qquad (k = 1,2,..,n)$$

2.2.2 МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

Пример:

$$\left.\begin{aligned} 10x_1 + x_2 \quad + x_3 \quad &= 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 \quad &= 13, \\ 2x_1 + 2x_2 \quad + 10x_3 &= 14. \end{aligned}\right\} \begin{cases} x_1 = -0{,}1x_2 - 0{,}1x_3 + 1{,}2 \\ x_2 = -0{,}2x_1 - 0{,}1x_3 + 1{,}3 \\ x_3 = -0{,}2x_1 - 0{,}2x_2 + 1{,}4 \end{cases}$$

Решение:

1. Выбираем начальное приближение $\begin{cases} x_1^{(0)} = 1{,}2 \\ x_2^{(0)} = 0 \\ x_3^{(0)} = 0 \end{cases}$

2. Строим последовательные приближения:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0{,}1 \cdot 0 - 0{,}1 \cdot 0 + 1{,}2 = 1{,}2 \\ x_2^{(1)} = -0{,}2 \cdot 1{,}2 - 0{,}1 \cdot 0 + 1{,}3 = 1{,}06 \\ x_3^{(1)} = -0{,}2 \cdot 1{,}2 - 0{,}2 \cdot 1{,}06 + 1{,}4 = 0{,}948 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -0{,}1 \cdot 1{,}06 - 0{,}1 \cdot 0{,}948 + 1{,}2 = 0{,}9992 \\ x_2^{(2)} = -0{,}2 \cdot 0{,}9992 - 0{,}1 \cdot 0{,}948 + 1{,}3 = 1{,}00536 \\ x_3^{(2)} = -0{,}2 \cdot 0{,}9992 - 0{,}2 \cdot 1{,}00536 + 1{,}4 = 0{,}999098 \end{cases}$$

и т.д.

2.2.2 МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

$$\left.\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 14. \end{aligned}\right\}$$

Нахождение корней линейной системы методом Зейделя

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1,2000	0,0000	0,0000
1	1,2000	1,0600	0,9480
2	0,9992	1,0054	0,9991
3	0,9996	1,0001	1,0001
4	1,0000	1,0000	1,0000
5	1,0000	1,0000	1,0000

Точные значения корней: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$.