Системы линейных уравнений. Метод Гаусса

- Системой m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется система вида

(*)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} - коэффициенты системы, $i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$

b_i - свободные члены.

- Решением системы (*) называется такой набор чисел (c_1, c_2,…, c_n), что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных (c_1 вместо x_1, …, c_n вместо x_n) каждое из уравнений системы обращается в тождество.

Система линейных уравнений

Совместная
(имеет хотя бы одно решение)

Несовместная
(не имеет ни одного решения)

Определённая
(имеет единственное решение)

Неопределённая

(имеет более одного решения-
бесконечное множество решений)

В случае неопределённой системы каждое её решение называется частным решением системы. Совокупность всех частных решений называется общим решением.

- Если $b_1=b_2=\ldots=b_m=0$, то система называется однородной; в противном случае она называется неоднородной.

- Две системы называются эквивалентными или равносильными, если любое решение одной из них является также решением другой, т.е. если они имеют одно и то же множество решений.

  (любые две несовместные системы считаются эквивалентными)

- Элементарными преобразованиями линейной системы называются следующие преобразования:

- перестановка уравнений системы;

- умножение или деление коэффициентов и свободных членов на одно и то же число, отличное от нуля;

- сложение и вычитание уравнений;

- исключение из системы тех уравнений, в которых все коэффициенты и свободные члены равны нулю.

- Систему (*) можно записать в матричной форме: AX=B,

где матрица коэффициентов системы;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

матрица-столбец (вектор-столбец) неизвестных

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

матрица-столбец (вектор-столбец) свободных членов

- Расширенной матрицей системы (*) называется матрица

$$\left(A\middle|B\right)=\left(\underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}}_{A}\middle|\underbrace{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{matrix}}_{B}\right)$$

Исследование системы линейных уравнений.

- Теорема Кронекера-Капелли.

  Система линейных уравнений (*) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:

$$rang(A) = rang(A|B)$$

Исследовать систему линейных уравнений означает определить, совместна она или нет, а для совместной системы- выяснить, является ли она определенной или нет.

1) Если rang(A)≠rang(A|B), то система несовместна.

2) Если rang(A)=rang(A|B)=n (где n- число неизвестных), то система совместна и определённа (имеет единственное решение).

3) Если rang(A)=rang(A|B)<n (где n- число неизвестных), то система совместна и неопределённа (имеет бесконечное множество решений).

Правила решения произвольной системы линейных уравнений.

- ✔ Найти ранги основной и расширенной матриц системы. Если rang(A)≠rang(A|B), то система несовместна.

- ✔ Если rang(A)=rang(A|B)=*r*, то система совместна. Найти какой-либо базисный минор порядка *r*. Взять *r* уравнений, из элементов которых составлен базисный минор. Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют базисными или главными, а остальные *n*-*r* неизвестных называют свободными.

- ✔ Выразить базисные (главные) неизвестные через свободные.

- ✔ Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения базисных (главных) неизвестных. Таким образом находим частные решения исходной системы уравнений.

3. Метод Гаусса

(метод последовательного исключения неизвестных)

Систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей (к ступенчатому виду).

Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок.

1. Исследовать систему линейных уравнений. Если она совместна, то найти её общее и одно частное решение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Прямой ход

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \times(-2) \quad \times(-1) \quad \times(-3) \quad \rightarrow$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\
0 & -3 & 5 & -4 & -7 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\
0 & -4 & 4 & -4 & -12
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ :(-4)
\end{array}
\rightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\
0 & -3 & 5 & -4 & -7
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \times 3 \\ + \\ \\
\end{array}
$$

$$
\rightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\
0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\
0 & 0 & 2 & -1 & 2
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \times 2 \quad :(-1) \\ \\
\end{array}
\rightarrow
\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 12
\end{array}\right)}_{A \,|\, B}
$$

$$
\mathrm{rang}(A)=\mathrm{rang}(A|B)=4=n
$$

система совместна и имеет единственное решение обратный ход

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ \qquad x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ \qquad\qquad x_3 - 2x_4 = -5 \\ \qquad\qquad\qquad 3x_4 = 12 \end{cases} \uparrow$$

$$\begin{cases} x_4 = 4 \\ x_3 = 2x_4 - 5 \\ x_2 = x_3 - x_4 + 3 \\ x_1 = -x_2 + x_3 - x_4 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 4 \\ x_3 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Ответ: (1; 2; 3; 4)

2. Исследовать систему линейных уравнений. Если она совместна, то найти её общее и одно частное решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12 \end{array}\right) \quad \times(-6) \quad \times 7 \quad \times 3 \qquad \rightarrow$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \end{array}\right) + \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

rang(A)=rang(A|B)=2<($n=4$)

система совместна и имеет бесконечное множество решений

базисный минор порядка r =2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -15 \end{vmatrix} \neq 0$

базисные переменные: $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$

свободные переменные $\boldsymbol{n - r} = 2$: $\boldsymbol{x_3}$, $\boldsymbol{x_4}$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 15x_2 + 15x_3 + 19x_4 = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 1 \\ 15x_2 = -15x_3 - 19x_4 + 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 1 \\ x_2 = -x_3 - \dfrac{19}{15}x_4 + 1 \end{cases}$$

$$x_1 = -2 \cdot \left(-x_3 - \frac{19}{15} x_4 + 1 \right) - 2x_3 - 3x_4 + 1$$

$$x_1 = 2x_3 + \frac{38}{15} x_4 - 2 - 2x_3 - 3x_4 + 1$$

$$x_1 = -\frac{7}{15} x_4 - 1$$

$$\left(\underbrace{-1 - \frac{7}{15} x_4}_{x_1}; \quad \underbrace{1 - x_3 - \frac{19}{15} x_4}_{x_2}; \quad x_3; \quad x_4 \right)$$ общее решение

пусть $x_3 = 0; \quad x_4 = 0$

тогда частное решение $(-1; \quad 1; \quad 0; \quad 0)$

Делаем проверку и записываем ответ:

Ответ:

общее решение: $$\left(-1-\frac{7}{15}x_4; \quad 1-x_3-\frac{19}{15}x_4; \quad x_3; \quad x_4\right)$$

частное решение: $(-1; \quad 1; \quad 0; \quad 0)$

3. Исследовать систему линейных уравнений. Если она совместна, то найти её общее и одно частное решение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-1) \quad \times 2 \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(-2) \\ \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\hphantom{1 \quad 1 \quad -1}}_{A} \qquad \underbrace{\hphantom{1 \quad 1 \quad -1 \quad -4}}_{A|B}$$

rang(A)=2; rang(A|B)=3

rang(A)≠rang(A|B) ⇒ система несовместна

Ответ: система несовместна

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_2 - 2x_3 = 4 \\ 0x_3 = -13 \end{cases}$$

- Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, то система называется однородной.

Однородная система линейных уравнений.

Пусть дана система m линейных однородных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

- Однородная система всегда совместна, так как существует тривиальное решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$

- Однородная система имеет бесконечное множество решений, тогда и только тогда, когда $rang(A) < n$

1. Решить систему линейных уравнений :

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу и приведём её к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 5 & -4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & -4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times(-2) \quad\quad \times(-3) \\ \\ + \\ \\ \end{array} \to$$

$$
\rightarrow \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & -8 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 7 & -10 \end{pmatrix}\end{array}
\begin{array}{l} \\ \times(-3) \quad \times 3 \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow
$$

$$
\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & -12 & 24 \\ 0 & 0 & 22 & -34 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ :12 \\ :2 \end{array}
\rightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & -17 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \times 11 \\ \\ \end{array}
$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix.}}_{A}\left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right)}_{A|B}$$

rang(A)=rang(A|B)=4=(n=4) $\Rightarrow$
система совместна и определённа, то есть имеет единственное решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_2 + 5x_3 - 8x_4 = 0 \\ -x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Ответ: $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$

2. Решить систему линейных уравнений :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times(\text{-}2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} :3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

rang(A)=rang(A|B)=2<($n=3$)

система совместна и имеет бесконечное множество решений

базисный минор порядка r =2: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

базисные переменные: $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$

свободные переменные n - r = 1: $\boldsymbol{x_3}$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad\quad x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 \\ \qquad x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$x_1 = x_3 - x_3 = 0$$

Тогда общее решение системы: $(0, x_3, x_3)$

Пусть $x_3 = 1$, тогда частное решение: (0; 1; 1)

Делаем проверку и получаем ответ:

Ответ: общее решение: $(0; x_3; x_3)$

частное решение: (0; 1; 1)