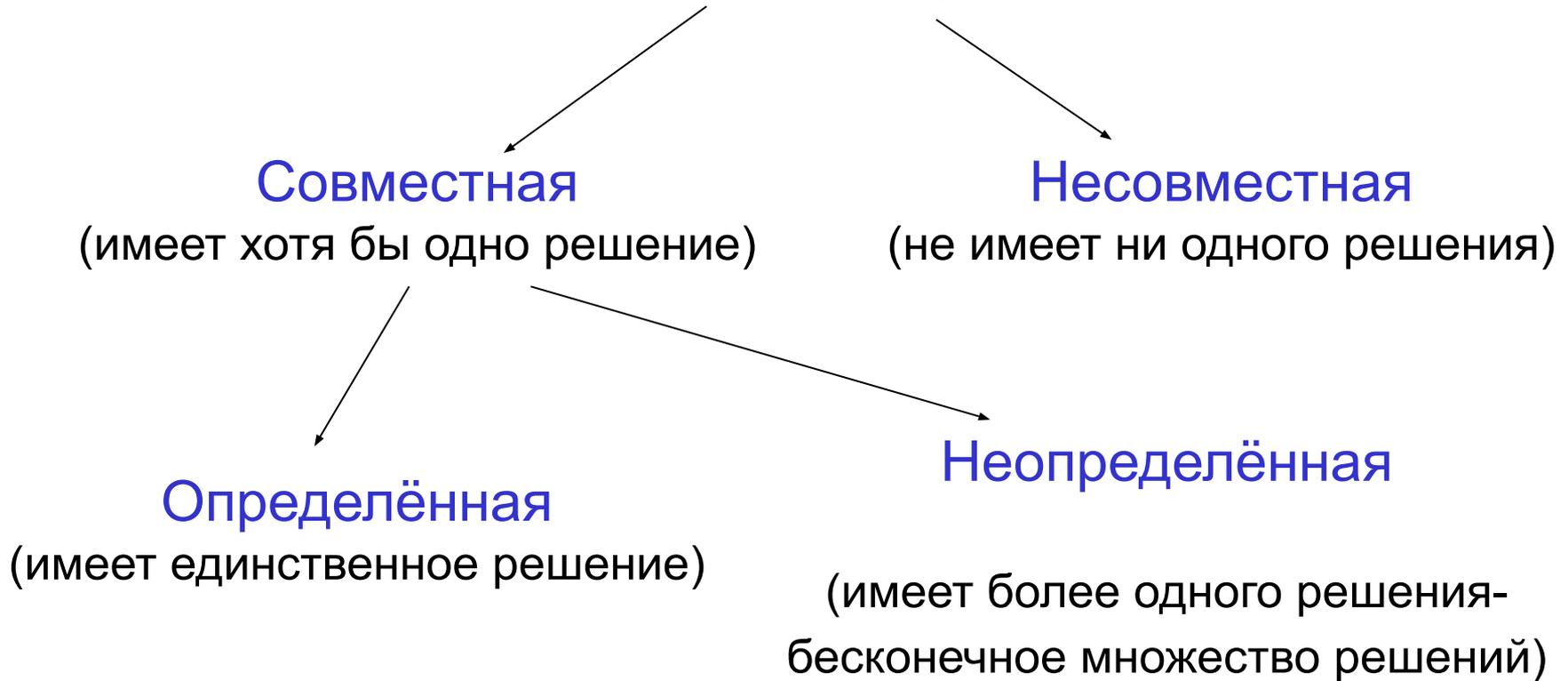


Системы линейных уравнений. Метод Гаусса

- **Решением системы (*)** называется такой набор чисел (c_1, c_2, \dots, c_n) , что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных (c_1 вместо x_1 , ..., c_n вместо x_n) каждое из уравнений системы обращается в тождество.

Система линейных уравнений



В случае неопределённой системы каждое её решение называется **частным решением** системы. Совокупность всех частных решений называется **общим решением**.

- Если $b_1=b_2=\dots=b_m=0$, то система называется **однородной**; в противном случае она называется **неоднородной**.
- Две системы называются **эквивалентными** или **равносильными**, если любое решение одной из них является также решением другой, т.е. если они имеют одно и то же множество решений.
(любые две несовместные системы считаются эквивалентными)

- Элементарными преобразованиями линейной системы называются следующие преобразования:
 - перестановка уравнений системы;
 - умножение или деление коэффициентов и свободных членов на одно и то же число, отличное от нуля;
 - сложение и вычитание уравнений;
 - исключение из системы тех уравнений, в которых все коэффициенты и свободные члены равны нулю.

- Систему (*) можно записать в матричной форме:
 $AX=B,$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ матрица коэффициентов}$$

системы;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxtimes \\ x_n \end{pmatrix} \text{ матрица-столбец (вектор-столбец) неизвестных}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \boxtimes \\ b_m \end{pmatrix} \text{ матрица-столбец (вектор-столбец) свободных членов}$$

- Расширенной матрицей системы (*) называется матрица

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$



Исследование системы линейных уравнений.

- Теорема Кронекера-Капелли.

Система линейных уравнений (*) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B)$$

Исследовать систему линейных уравнений означает определить, совместна она или нет, а для совместной системы- выяснить, является ли она определенной или нет.

- 1) Если $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|B)$, то система несовместна.
- 2) Если $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = n$ (где n - число неизвестных), то система совместна и определённа (имеет единственное решение).
- 3) Если $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) < n$ (где n - число неизвестных), то система совместна и неопределённа (имеет бесконечное множество решений).

Правила решения произвольной системы линейных уравнений.

- ✓ Найти ранги основной и расширенной матриц системы. Если $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|B)$, то система несовместна.
- ✓ Если $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = r$, то система совместна. Найти какой-либо базисный минор порядка r . Взять r уравнений, из элементов которых составлен базисный минор. Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют **базисными** или **главными**, а остальные $n-r$ неизвестных называют **свободными**.

- ✓ Выразить базисные (главные) неизвестные через свободные.
- ✓ Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения базисных (главных) неизвестных. Таким образом находим частные решения исходной системы уравнений.

3. Метод Гаусса

(метод последовательного исключения неизвестных)

Систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей (к ступенчатому виду).

Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок.

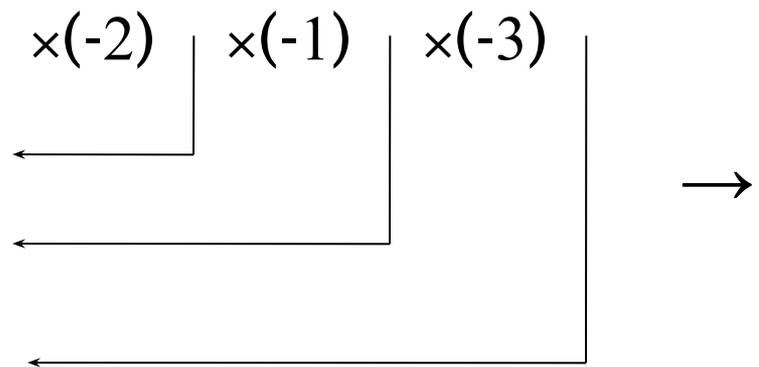
1. Исследовать систему линейных уравнений. Если она совместна, то найти её общее и одно частное решение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Прямой ход

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$



$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -12 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ :(-4) \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \times 3 \\ + \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \times 2 \\ :(-1) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 12 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{A} \\ \text{A|B} \end{array}$$

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 4 = n$$

система совместна и имеет
единственное решение

обратный ход

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_3 - 2x_4 = -5 \\ 3x_4 = 12 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} x_4 = 4 \\ x_3 = 2x_4 - 5 \\ x_2 = x_3 - x_4 + 3 \\ x_1 = -x_2 + x_3 - x_4 + 4 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} x_4 = 4 \\ x_3 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 1 \end{array} \right.$$

Ответ: (1; 2; 3; 4)

2. Исследовать систему линейных уравнений. Если она совместна, то найти её общее и одно частное решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-6)} \\ \xrightarrow{\times 7} \\ \xrightarrow{\times 3} \end{array}$$

→

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} + \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 < (n=4)$$

система совместна и
имеет бесконечное
множество решений

базисный минор порядка $r=2$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -15 \end{vmatrix} \neq 0$

базисные переменные: x_1, x_2

свободные переменные $n - r = 2$: x_3, x_4 .

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 15x_2 + 15x_3 + 19x_4 = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 1 \\ 15x_2 = -15x_3 - 19x_4 + 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 1 \\ x_2 = -x_3 - \frac{19}{15}x_4 + 1 \end{cases}$$

$$x_1 = -2 \cdot \left(-x_3 - \frac{19}{15}x_4 + 1 \right) - 2x_3 - 3x_4 + 1$$

$$x_1 = 2x_3 + \frac{38}{15}x_4 - 2 - 2x_3 - 3x_4 + 1$$

$$x_1 = -\frac{7}{15}x_4 - 1$$

$$\left(\underbrace{-1 - \frac{7}{15}x_4}_{x_1}; \quad \underbrace{1 - x_3 - \frac{19}{15}x_4}_{x_2}; \quad x_3; \quad x_4 \right) \quad \text{общее решение}$$

пусть $x_3 = 0; \quad x_4 = 0$

тогда частное решение $(-1; \quad 1; \quad 0; \quad 0)$

Делаем проверку и записываем ответ:

Ответ:

общее решение: $\left(-1 - \frac{7}{15}x_4; \quad 1 - x_3 - \frac{19}{15}x_4; \quad x_3; \quad x_4 \right)$

частное решение: $(-1; \quad 1; \quad 0; \quad 0)$

3. Исследовать систему линейных уравнений. Если она совместна, то найти её общее и одно частное решение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times(-1) \\ \times 2 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times(-2) \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array} \right)$$

$$\text{rang}(A)=2; \quad \text{rang}(A|B)=3$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{A|B}$

$\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|B) \Rightarrow$ система несовместна

Ответ: система несовместна

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_2 - 2x_3 = 4 \\ \underline{0x_3 = -13} \end{array} \right.$$

- Если $b_1=b_2=\dots=b_m=0$, то система называется **однородной**.

Однородная система линейных уравнений.

Пусть дана система m линейных однородных уравнений с n неизвестными x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

- Однородная система всегда совместна, так как существует тривиальное решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$
- Однородная система имеет бесконечное множество решений, тогда и только тогда, когда $\text{rang}(A) < n$

1. Решить систему линейных уравнений :

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\
 \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times(-2) \\ \times(-3) \\ + \end{array} \rightarrow
 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & -8 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 7 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times(-3) \\ \times 3 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & -12 & 24 \\ 0 & 0 & 22 & -34 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ :12 \\ :2 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & -17 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \times 11 \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & | & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -8 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 4 = (n=4) \Rightarrow$$

система совместна и определённа, то есть имеет единственное решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ \quad 2x_2 + 5x_3 - 8x_4 = 0 \\ \quad \quad -x_3 + 2x_4 = 0 \\ \quad \quad \quad 5x_4 = 0 \end{array} \right.$$

 \Rightarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Ответ: $(0, 0, 0, 0)$

2. Решить систему линейных уравнений :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times(-2) \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} :3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang}(A)=\text{rang}(A|B)=2 < (n=3)$$

система совместна и
имеет бесконечное
множество решений

базисный минор порядка $r=2$: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

базисные переменные: x_1, x_2

свободные переменные $n - r = 1$: x_3

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$x_1 = x_3 - x_3 = 0$$

Тогда общее решение системы: $(0, x_3, x_3)$

Пусть $x_3 = 1$, тогда частное решение: $(0; 1; 1)$

Делаем проверку и получаем ответ:

Ответ: общее решение: $(0; x_3; x_3)$

частное решение: $(0; 1; 1)$