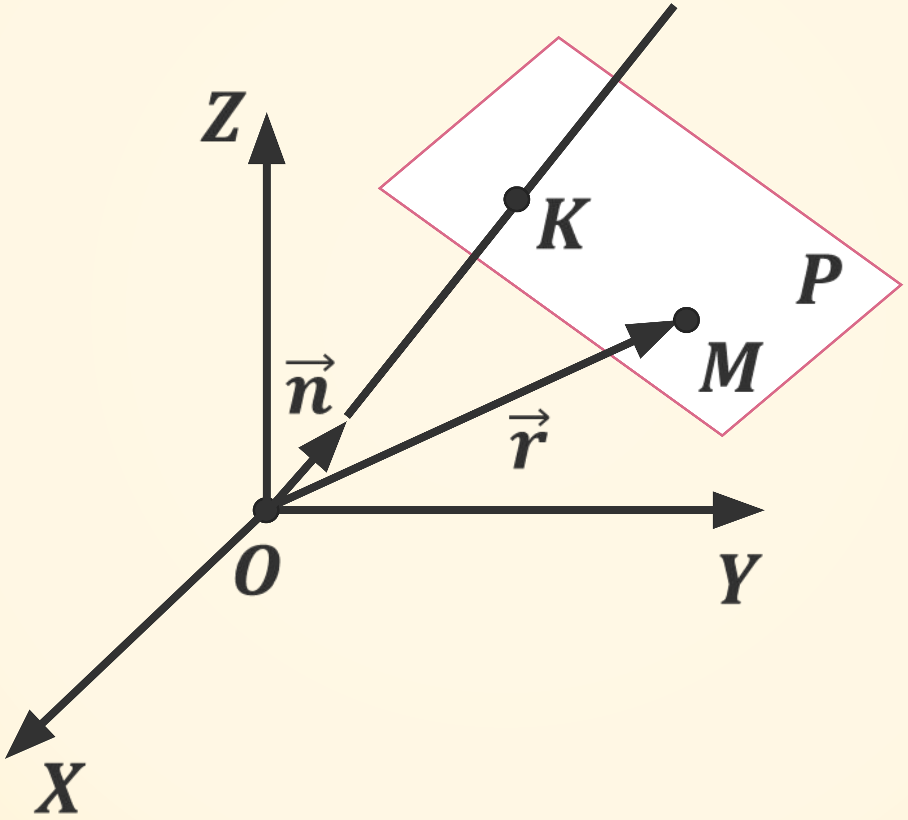
Лекция №11

Плоскость

Нормальное уравнение плоскости

В декартовой системе координат XYZ рассмотрим плоскость P.



Через начало координат $\boldsymbol{O}$ проведена прямая (нормаль) перпендикулярная плоскости $\boldsymbol{P}$ ($\boldsymbol{K}$ – точка пересечения с плоскостью $\boldsymbol{P}$). Пусть $\vec{\boldsymbol{n}}$ - единичный вектор нормали $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ – углы наклона этого вектора к осям координат, $\boldsymbol{p}$ – расстояние плоскости $\boldsymbol{P}$ от начала координат, т.е. $|\boldsymbol{OK}| = \boldsymbol{p}, \vec{\boldsymbol{n}} = (\cos\boldsymbol{\alpha}, \cos\boldsymbol{\beta}, \cos\boldsymbol{\gamma})$.

Пусть $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ произвольная точка на плоскости $\boldsymbol{P}$. Тогда радиус-вектор точки $\boldsymbol{M}$ $\vec{\boldsymbol{r}}$ имеет следующие координаты:

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = (\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z}).$$

- Равенство $\boldsymbol{pr_{\vec{n}}\vec{r} = p}$ выполняется для всех точек, лежащих на плоскости $\boldsymbol{P}$ и только для них.

Уравнение плоскости $\boldsymbol{P}$ имеет вид:

$$(\vec{\boldsymbol{r}}, \vec{\boldsymbol{n}}) = \boldsymbol{p} \quad (1)$$

Это уравнение называется <u>*уравнением плоскости в векторной форме*</u>.

Уравнение (1) в координатной форме:

$$\boldsymbol{x\cos\alpha + y\sin\beta + z\cos\gamma - p = 0} \quad (2)$$

Уравнение (2) называется <u>*нормальным уравнением плоскости в координатной форме*</u>.

Общее уравнение плоскости

- Рассмотрим произвольное уравнение первой степени относительно x, y, z:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3)$$

докажем, что это уравнение некоторой плоскости.

Обозначим, через $\vec{N}$ вектор с координатами A, B, C.

$$\vec{N} = (A; B; C).$$

Пусть $\vec{r} = (x, y, z)$ радиус вектор точки $M(x; y; z)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (3).

Уравнение (3) можно записать в виде:

$$(\vec{N}, \vec{r}) + D = 0.$$

- Умножим все члены этого уравнения на множитель $\boldsymbol{\lambda}$.

$$\left(\boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{N}},\vec{\boldsymbol{r}}\right)+\boldsymbol{\lambda D}=\mathbf{0}.$$

Выберем $\boldsymbol{\lambda}$ так, чтобы длина вектора $\boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{N}}=\vec{\boldsymbol{n}}$ была равна 1.

$$\text{Тогда } \boldsymbol{\lambda}=\pm\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{(\vec{\boldsymbol{N}},\vec{\boldsymbol{N}})}}.$$

Обозначим $\boldsymbol{\lambda D}=-\boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{p}>\mathbf{0}$.

Тогда уравнение примет вид:

$$(\vec{\boldsymbol{n}},\vec{\boldsymbol{r}})-\boldsymbol{p}=\mathbf{0}$$

уравнение плоскости, имеющей нормальный вектор $\vec{\boldsymbol{n}}$ и находящейся от начала координат на расстоянии $\boldsymbol{p}$.

Следовательно, $\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}$ есть уравнение плоскости.

Для приведения этого уравнения к нормальному виду достаточно умножить обе части уравнения на множитель λ (нормирующий множитель).

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}.$$

выбрав перед корнем знак, противоположным знаку числа $\boldsymbol{D}$.

Уравнение

$$\boldsymbol{(\vec{N},\vec{r}) + D = 0}$$

называется *общим уравнением плоскости в векторной форме*.

- Вектор $\vec{\boldsymbol{N}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ – перпендикулярен плоскости

$$\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}.$$

Уравнение

$$\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}$$

называется <u>*общим уравнением плоскости*</u>.

<u>Пример.</u> Привести уравнение плоскости $\boldsymbol{3x + 2y + 5z + 1 = 0}$ к нормальному виду.

Исследование общего уравнения плоскости

▪

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$\vec{N} = (A, B, C)$, направляющие косинусы $\vec{N}$

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\beta = \frac{B}{|\vec{N}|},\ \cos\gamma = \frac{C}{|\vec{N}|}$$

1) $D = 0$. Уравнение $Ax + By + Cz = 0$ – это уравнение плоскости проходящей через начало координат.

2) $C = 0$. Уравнение $Ax + By + D = 0$ $\cos\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}$;

Следовательно плоскость параллельна оси OZ.

Аналогично $\boldsymbol{Ax + Cz + D = 0}$ параллельна оси $\boldsymbol{OY}$.

$\boldsymbol{By + Cz + D = 0}$ - параллельна оси $\boldsymbol{OX}$.

3) $\boldsymbol{C = 0, D = 0}$.

Уравнение $\boldsymbol{Ax + By = 0}$ - уравнение плоскости, проходящей через ось $\boldsymbol{OZ}$.

Аналогично $\boldsymbol{Ax + Cz = 0}$ - уравнение плоскости, проходящей через ось $\boldsymbol{OY}$.

$\boldsymbol{By + Cz = 0}$ - уравнение плоскости, проходящей через ось $\boldsymbol{OX}$.

4) $\boldsymbol{B = 0, C = 0}$.

Уравнение примет вид:

$$\boldsymbol{Ax + D = 0,}$$

уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости $\boldsymbol{YOZ}$.

$\boldsymbol{By + D = 0}$ - уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости $\boldsymbol{XOZ}$.

- $Cz + D = 0$ - уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости XOY.

5) $B = 0, C = 0, D = 0, A \neq 0$.

$Ax = 0$ – это уравнение координатной плоскости YOZ.

Аналогично,

$y = 0$ – уравнение координатной плоскости XOZ.

$z = 0$ – уравнение координатной плоскости XOY.

Связка плоскостей

- <u>***Определение.***</u> Совокупность плоскостей, проходящих через фиксированную точку $\boldsymbol{M_0}$ называется <u>***связкой плоскостей***</u> с центром $\boldsymbol{M_0}$.

Уравнение вида:

$$\left(\overrightarrow{\boldsymbol{N}}, (\vec{\boldsymbol{r}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r_0}})\right) = \boldsymbol{0},$$

называется уравнением связки плоскостей с центром в точке $\boldsymbol{M_0}$ с радиус вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{r_0}}$.

В координатной форме:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}) + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_0}) = \boldsymbol{0}.$$

▪

Задача 1. Составить уравнение плоскости проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(1; 2; -1)$, $B(2; 2; 3)$, $C(1; 0; -2)$.

Задача 2. Найти уравнение плоскости, отсекающей на координатных осях отрезки, величины a, b и c соответственно.