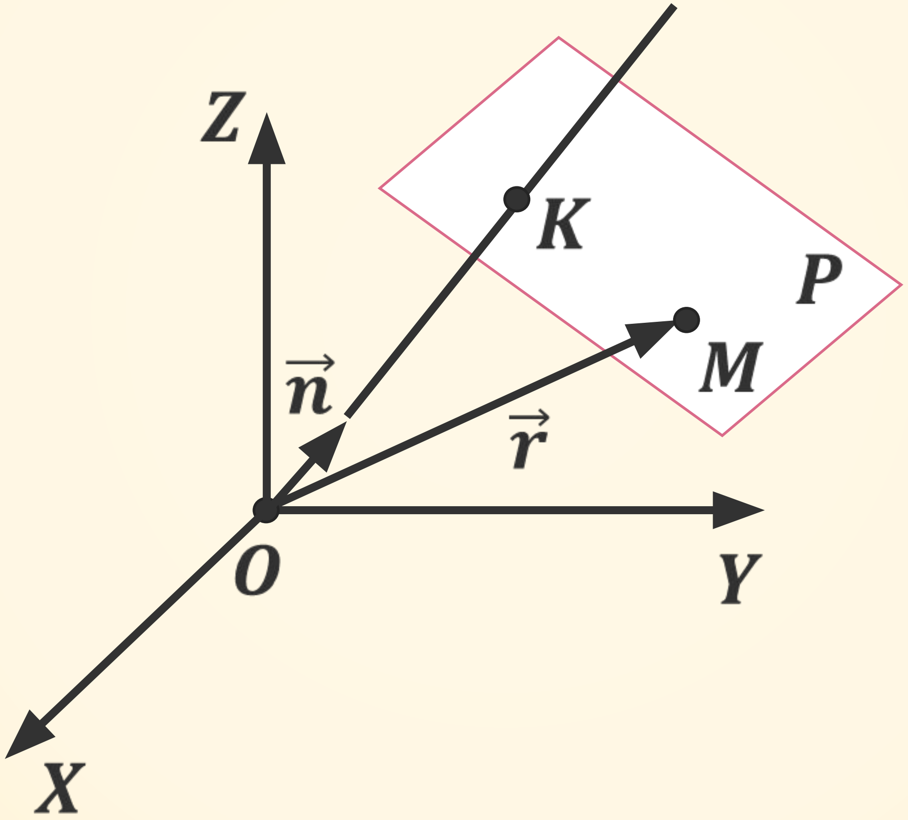
Лекция №11

Плоскость

Нормальное уравнение плоскости

В декартовой системе координат XYZ рассмотрим плоскость P.



Через начало координат $\boldsymbol{O}$ проведена прямая (нормаль) перпендикулярная плоскости $\boldsymbol{P}$ ($\boldsymbol{K}$ – точка пересечения с плоскостью $\boldsymbol{P}$). Пусть $\vec{\boldsymbol{n}}$ - единичный вектор нормали $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ – углы наклона этого вектора к осям координат, $\boldsymbol{p}$ – расстояние плоскости $\boldsymbol{P}$ от начала координат, т.е. $|\boldsymbol{OK}| = \boldsymbol{p}, \vec{\boldsymbol{n}} = (\cos\boldsymbol{\alpha}, \cos\boldsymbol{\beta}, \cos\boldsymbol{\gamma})$.

Пусть $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ произвольная точка на плоскости $\boldsymbol{P}$. Тогда радиус-вектор точки $\boldsymbol{M}$ $\vec{\boldsymbol{r}}$ имеет следующие координаты:

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = (\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z}).$$

Равенство $\boldsymbol{pr_{\vec{n}}\vec{r} = p}$ выполняется для всех точек, лежащих на плоскости $\boldsymbol{P}$ и только для них.

Уравнение плоскости $\boldsymbol{P}$ имеет вид:

$$(\vec{\boldsymbol{r}}, \vec{\boldsymbol{n}}) = \boldsymbol{p} \quad (1)$$

Это уравнение называется *уравнением плоскости в векторной форме*.

Уравнение (1) в координатной форме:

$$\boldsymbol{x\cos\alpha + y\sin\beta + z\cos\gamma - p = 0} \quad (2)$$

Уравнение (2) называется *нормальным уравнением плоскости в координатной форме*.

Общее уравнение плоскости

- Рассмотрим произвольное уравнение первой степени относительно $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$:

$$\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{By} + \boldsymbol{Cz} + \boldsymbol{D} = \mathbf{0} \quad (3)$$

докажем, что это уравнение некоторой плоскости.

Обозначим, через $\overrightarrow{\boldsymbol{N}}$ вектор с координатами $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{N}} = (\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B}; \boldsymbol{C}).$$

Пусть $\vec{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ радиус вектор точки $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z})$, координаты которой удовлетворяют уравнению (3).

Уравнение (3) можно записать в виде:

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{N}}, \vec{\boldsymbol{r}}) + \boldsymbol{D} = \mathbf{0}.$$

- Умножим все члены этого уравнения на множитель $\boldsymbol{\lambda}$.

$$(\boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{N}}, \vec{\boldsymbol{r}}) + \boldsymbol{\lambda D} = \mathbf{0}.$$

Выберем $\boldsymbol{\lambda}$ так, чтобы длина вектора $\boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{N}} = \vec{\boldsymbol{n}}$ была равна 1.

$$\text{Тогда } \boldsymbol{\lambda} = \pm\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{(\vec{\boldsymbol{N}}, \vec{\boldsymbol{N}})}}.$$

Обозначим $\boldsymbol{\lambda D} = -\boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{p} > \mathbf{0}$.

Тогда уравнение примет вид:

$$(\vec{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{r}}) - \boldsymbol{p} = \mathbf{0}$$

уравнение плоскости, имеющей нормальный вектор $\vec{\boldsymbol{n}}$ и находящейся от начала координат на расстоянии $\boldsymbol{p}$.

Следовательно, $\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}$ есть уравнение плоскости.

Для приведения этого уравнения к нормальному виду достаточно умножить обе части уравнения на множитель λ (нормирующий множитель).

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}.$$

выбрав перед корнем знак, противоположным знаку числа D.

Уравнение

$$\boldsymbol{(\vec{N}, \vec{r}) + D = 0}$$

называется *общим уравнением плоскости в векторной форме*.

- Вектор $\vec{N} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ – перпендикулярен плоскости

$$\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}.$$

Уравнение

$$\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}$$

называется *<u>общим уравнением плоскости</u>*.

Пример. Привести уравнение плоскости $\boldsymbol{3x + 2y + 5z + 1 = 0}$ к нормальному виду.

Исследование общего уравнения плоскости

▪

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$\vec{N} = (A, B, C)$, направляющие косинусы $\vec{N}$

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\beta = \frac{B}{|\vec{N}|},\ \cos\gamma = \frac{C}{|\vec{N}|}$$

1) *D = 0.* Уравнение $Ax + By + Cz = 0$ – это уравнение плоскости проходящей через начало координат.

2) *C = 0.* Уравнение $Ax + By + D = 0$ $\cos\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}$;

Следовательно плоскость параллельна оси ***OZ.***

Аналогично $\boldsymbol{Ax + Cz + D = 0}$ параллельна оси $\boldsymbol{OY}$.

$\boldsymbol{By + Cz + D = 0}$ - параллельна оси $\boldsymbol{OX}$.

3) C = 0, D = 0.

Уравнение $\boldsymbol{Ax + By = 0}$ - уравнение плоскости, проходящей через ось $\boldsymbol{OZ}$.

Аналогично $\boldsymbol{Ax + Cz = 0}$ - уравнение плоскости, проходящей через ось $\boldsymbol{OY}$.

$\boldsymbol{By + Cz = 0}$ - уравнение плоскости, проходящей через ось $\boldsymbol{OX}$.

4) B = 0, C = 0.

Уравнение примет вид:

$$\boldsymbol{Ax + D = 0,}$$

уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости $\boldsymbol{YOZ}$.

$\boldsymbol{By + D = 0}$ - уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости $\boldsymbol{XOZ}$.

- $Cz + D = 0$ - уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости XOY.

5) $B = 0, C = 0, D = 0, A \neq 0$.

$Ax = 0$ – это уравнение координатной плоскости YOZ.

Аналогично,

$y = 0$ – уравнение координатной плоскости XOZ.

$z = 0$ – уравнение координатной плоскости XOY.

Связка плоскостей

- ***Определение.*** Совокупность плоскостей, проходящих через фиксированную точку $\boldsymbol{M_0}$ называется ***связкой плоскостей*** с центром $\boldsymbol{M_0}$.

Уравнение вида:

$$\left(\vec{\boldsymbol{N}}, (\vec{\boldsymbol{r}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r_0}})\right) = \mathbf{0},$$

называется уравнением связки плоскостей с центром в точке $\boldsymbol{M_0}$ с радиус вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{r_0}}$.

В координатной форме:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}) + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_0}) = \mathbf{0}.$$

Задача 1. Составить уравнение плоскости проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(1; 2; -1)$, $B(2; 2; 3)$, $C(1; 0; -2)$.

Задача 2. Найти уравнение плоскости, отсекающей на координатных осях отрезки, величины a, b и c соответственно.