



**Объемы  
тел вращения**

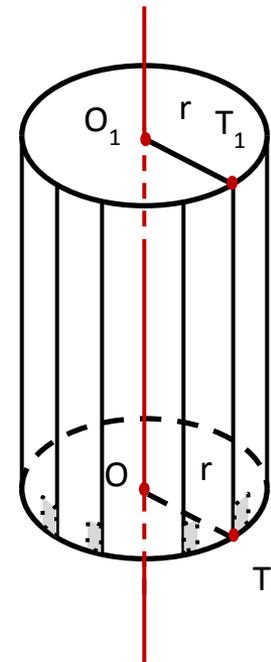
Что называется *цилиндром*, *осью цилиндра*, *высотой цилиндра*, *радиусом цилиндра*?

**Цилиндр** — тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами  $O(r)$ ,  $O_1(r)$

**Ось цилиндра** — прямая  $OO_1$

**Высота цилиндра** — длина образующей

**Радиус цилиндра** — радиус основания





## Теорема

**Объём цилиндра** равен произведению **площади основания** на **высоту**

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$$

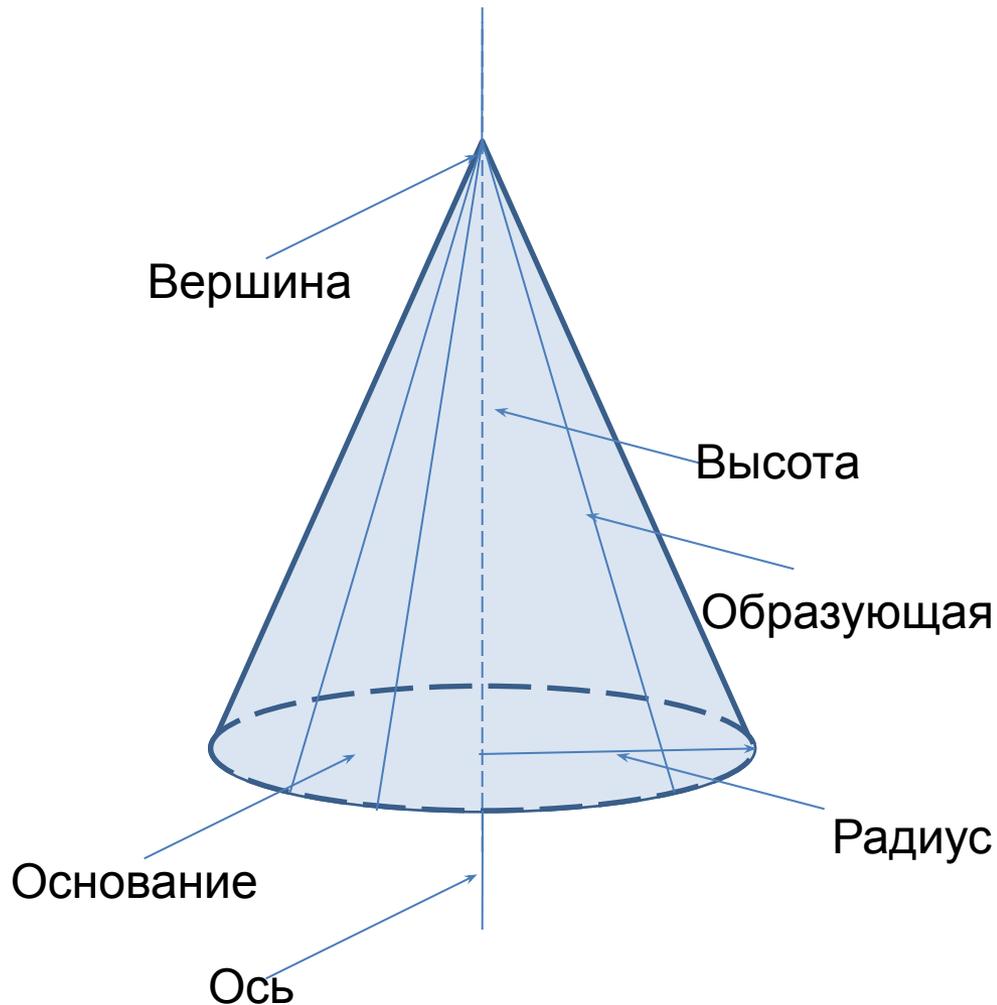


## Теорема

**Объём цилиндра** равен произведению **площади основания** на **высоту**

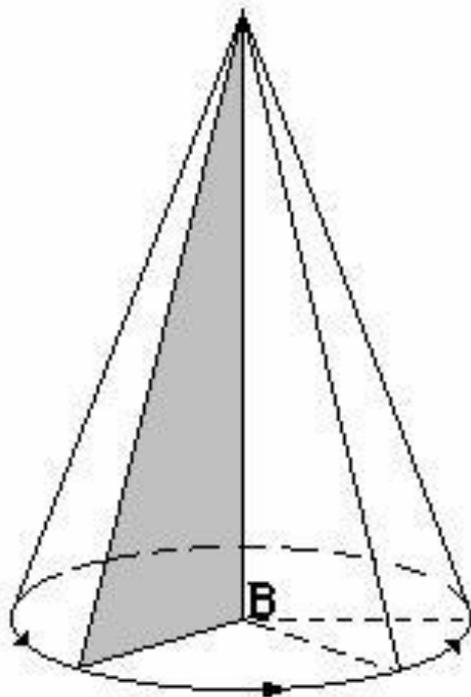
$$V = \pi r^2 h$$

# КОНУС



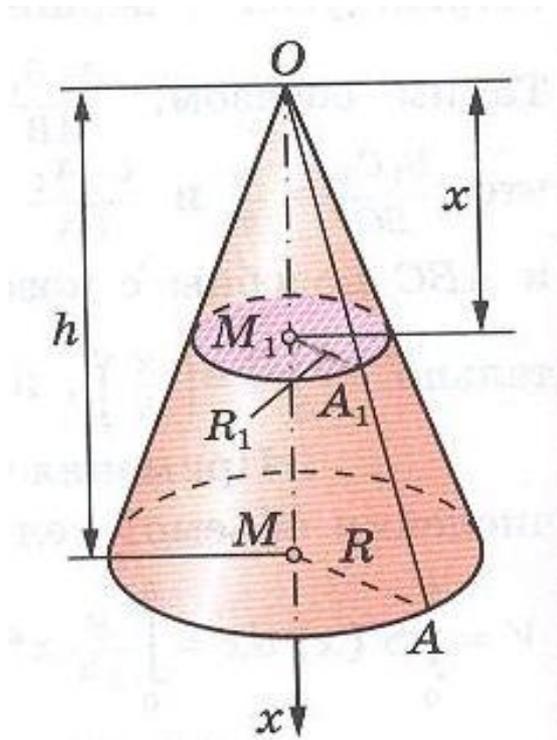
- **Конус** — это тело, которое состоит из круга — основания конуса, точки не лежащей в плоскости этого круга — вершины конуса, и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания.

# Конус – тело вращения...



Конус можно получить  
путем вращения  
**прямоугольного**  
**треугольника** вокруг  
одного из его катетов.

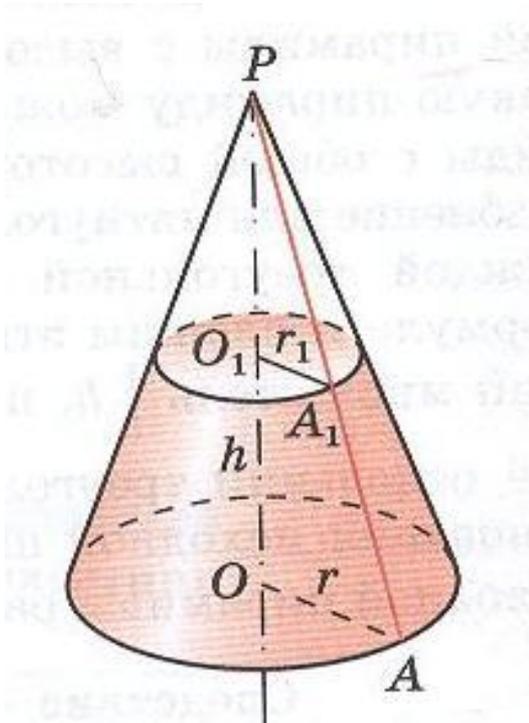
# ОБЪЕМ КОНУСА



**Теорема:**  
**Объем конуса** равен  
**одной**  
**трети** произведения  
**площади основания** на  
**высоту.**

$$V = \frac{1}{3} Sh.$$

# Объём усеченного конуса



**Следствие:**

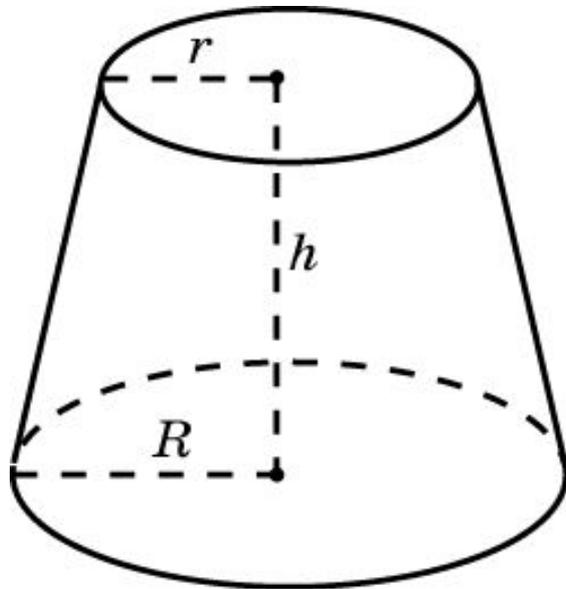
Объем усеченного конуса, высота которого равна  $h$ , а площадь оснований  $S$  и  $S_1$ , вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} h (S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}).$$

# ОБЪЕМ УСЕЧЕННОГО КОНУСА

Объем усеченного конуса, основания которого – круги радиусов  $R$  и  $r$ , а высота равна  $h$ , выражается формулой

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + R \cdot r + r^2).$$





# Решение задач

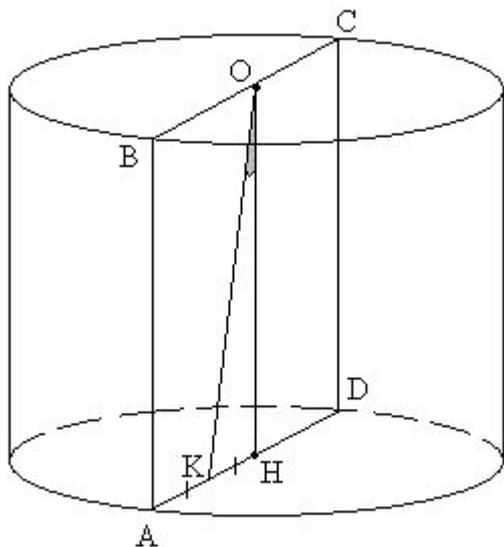


# Задача 1.

**Отрезок, соединяющий центр верхнего основания цилиндра с серединой радиуса нижнего основания, равен 12см. и образует с осью угол в 30 градусов.**

***Найти: площадь осевого сечения, объём цилиндра и площадь полной поверхности.***

# Решение:



Рассмотрим треугольник **ОКН**-прямоугольный с острым углом 30 градусов. Как известно, если в прям. треугольнике один острый угол равен 30 градусов, то катет, лежащий напротив этого угла, равен половине гипотенузы, а другой катет в корень из 3 больше этого катета.

Для нашего случая **КН = 6; ОН = 6 корней из 3.**

КН - это половина радиуса основания. То есть радиус равен 12.

Рассмотрим прямоугольник **ABCD**, он является осевым сечением цилиндра и в нем одна сторона - диаметр основания и равен

плош  $S = ab = 24 \cdot 6\sqrt{3} = 144\sqrt{3}$  его

# Решение:

Теперь найдем объём цилиндра и площадь полной поверхности:

$$V = SH = \pi R^2 H = \pi \cdot 12^2 \cdot 6\sqrt{3} = 864\sqrt{3}\pi$$

$$S_{\text{бок}} = PH = 2\pi RH = 2\pi \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3} = 144\sqrt{3}\pi$$

$$S_{\text{осн}} = \pi R^2 = \pi \cdot 12^2 = 144\pi$$

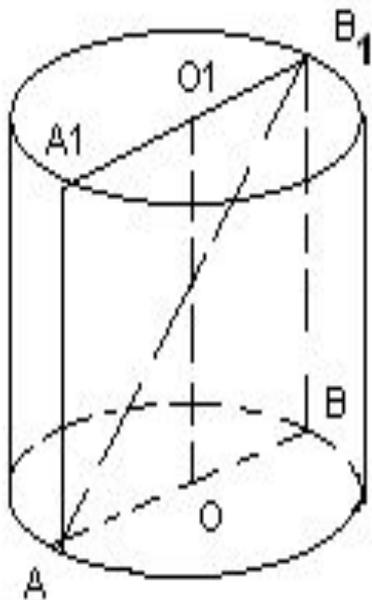
$$S_{\text{пов}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = 144\sqrt{3}\pi + 2 \cdot 144\pi$$

$$S_{\text{пов}} = 144\pi(\sqrt{3} + 2)$$

## Задача 2.

**Осевое сечение цилиндра  
прямоугольник со сторонами 8 и 12 дм.  
*Найти объём цилиндра и площадь  
боковой поверхности*, если его высота  
равна большей стороне осевого  
сечения.**

# Решение:



Раз осевое сечение прямоугольник  $AA_1B_1B$ , значит цилиндр прямой круговой. Высота  $OO_1 = 12$ , а диаметр основания  $AB = 8$ . Радиус - половина диаметра, поэтому равен  $AO = 4$ .

**Найдем площадь основания:**

$$S = \pi r^2 = 16\pi$$

**Найдем объем:**

$$V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3} * 16\pi * 12 = 64\pi$$

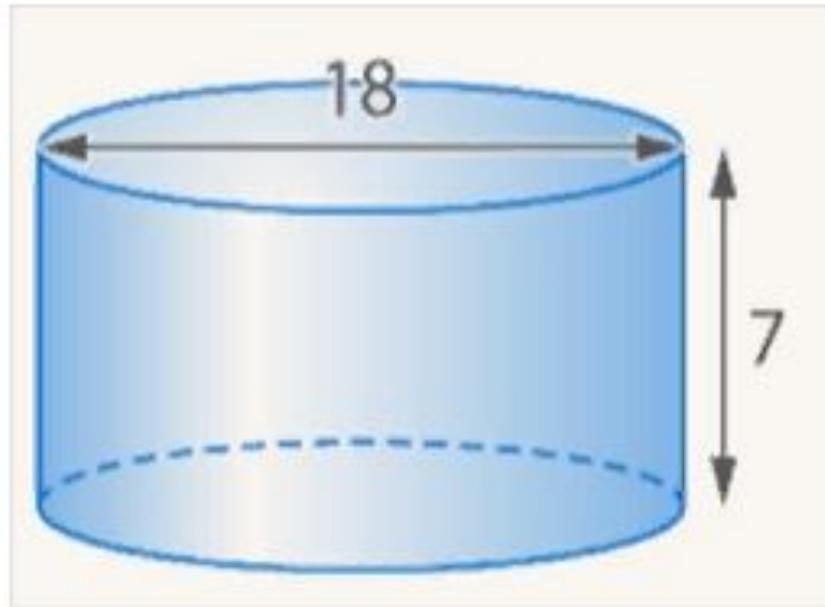
**Найдем площадь боковой поверхности:**

$$S_{\text{бок}} = P * H, \text{ где } P - \text{периметр основания: } P = 2\pi r$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r * H = 96\pi$$

## Задача 3.

Какое количество нефти в тоннах вмещает цилиндрическая цистерна диаметром 18 м и высотой 7 м (см. рис. 9), если плотность нефти равна  $0,85 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ ? Округлите  $\pi$  до 3,14, а сам ответ – до тонн.



# Решение:

Нам нужно найти массу. Из курса физики  $m = \rho V$ . Значит, нужно найти объем. По условию,  $h = 7$  и  $d = 18$ , тогда

$$r = \frac{1}{2} \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9.$$

$$\text{Имеем: } V_{\text{цистерны}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = 81\pi \cdot 7 = 567\pi \text{ м}^3.$$

Теперь переведем плотность из  $\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$  в более удобные единицы  $\frac{\text{т}}{\text{м}^3}$ , т. к. объем цистерны мы получили в  $\text{м}^3$ :

$$0,85 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = \frac{0,85 \cdot 1000000}{1000000} \frac{\text{т}}{\text{м}^3} = 0,85 \frac{\text{т}}{\text{м}^3}.$$

$$\text{Тогда } m_{\text{нефти}} = 567\pi \cdot 0,85 = 481,95\pi \text{ т}.$$

Подставляя  $\pi \approx 3,14$ , получаем:  $m_{\text{нефти}} \approx 1513,323 \text{ т} \approx 1513 \text{ т}$ .

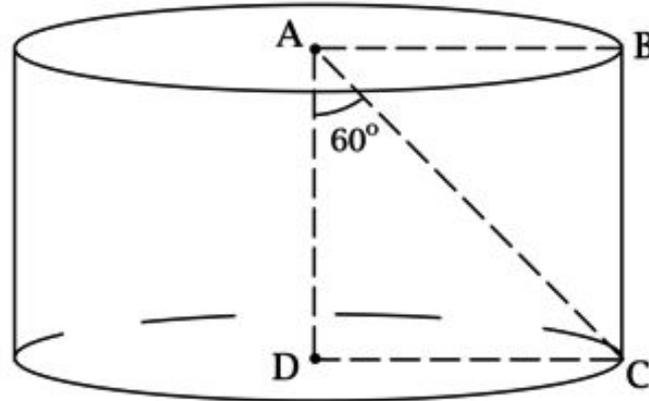
Ответ: 1513 т.

## Задача 4.

$AD$  – ось цилиндра,  $BC$  – его образующая,  $S_{ABCD} = \frac{16\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi^2}}$ ,  $\angle CAD = 60^\circ$ .

Найдите объём цилиндра.

# Решение:



Так как  $AD$  и  $BC$  – высоты цилиндра, то  $ABCD$  – прямоугольник, тогда

$$S_{ABCD} = AD \cdot DC = H \cdot R = \frac{16\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi^2}}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $ADC$ :

Т.к.  $\angle DAC = 60^\circ$ , то

$$AD = \operatorname{tg} \angle ACD \cdot DC = \operatorname{tg} 30^\circ \cdot R = \frac{R}{\sqrt{3}}, \quad \text{т.е. } H = \frac{R}{\sqrt{3}} \text{ или } R = \sqrt{3}H.$$

# Решение:

Подставляя выражение для  $R$  в  $S_{ABCD}$ , получим:

$$H^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{16\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi^2}},$$

откуда  $H = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ , тогда  $R = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}$ .

$$V_{\text{цил}} = \pi R^2 H = \pi \cdot \frac{16 \cdot 3}{\sqrt[3]{\pi^2}} \cdot \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}} = 192.$$

**Ответ: 192**

## Задача 5.

**Образующая конуса равна 60 см, высота 30 см.**

***Найдите  $V$  конуса.***

# Решение:

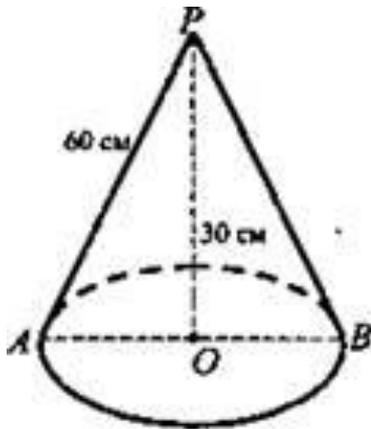


Рис. 4

Из  $\triangle AOP$  ( $\angle O = 90^\circ$ ): Так как  $PO = 1/2AP$ , то

$$\angle A = 30^\circ, \quad R = AO = 60 \cdot \cos 30^\circ = 60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$30\sqrt{3} \text{ (см)}, \quad V = \frac{1}{3} \pi \cdot (30\sqrt{3})^2 \cdot 30 = 27000\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

**Ответ:  $V = 27000\pi$  см<sup>3</sup>.**

## Задача 6.

**Образующая конуса, равна 12 см,  
наклонена к плоскости основания под  
углом  $30^\circ$ .**

*Найдите объем конуса.*

# Решение:

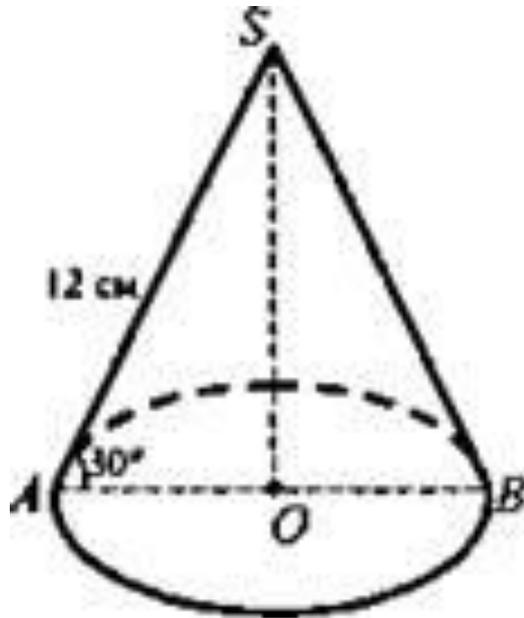


Рис. 5

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H.$$

Из  $\triangle ASO$  ( $\angle O = 90^\circ$ ):

$$H = SO = \frac{1}{2} AC = 6 \text{ см.} \quad R = AO = 12 \cdot \cos 30^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ (см).}$$

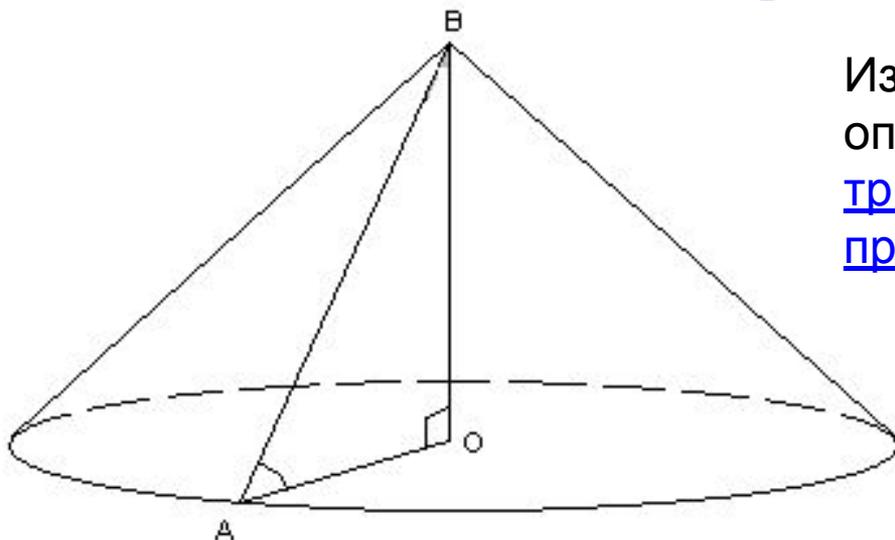
$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot (6\sqrt{3})^2 \cdot 6 = 216\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

**Ответ:  $V = 216\pi$  см<sup>3</sup>**

## Задача 7.

**Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 30 градусов, радиус основания равен 3 дм. *Найти объём конуса и площадь боковой поверхности.***

# Решение:



Из прямоугольного треугольника АВО определим АВ и ВО, используя тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике:

$$AB = \frac{AO}{\cos 30^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$$

$$BO = AO \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Определим площадь основания:

$$S = \pi r^2 = 9\pi$$

Определим объем конуса и площадь боковой поверхности:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot \sqrt{3} = 3\pi\sqrt{3}$$

$$S_{\text{бок}} = \pi r l = \pi \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\pi$$

## Задача 8.

**Высота усеченного конуса равна 2 корня из 3 см. Диагональ осевого сечения конуса образует с плоскостью основания угол 30 градусов и перпендикулярна образующей.**

***Найти: площадь осевого сечения, объём усеченного конуса и площадь полной поверхности.***

# Решение:

Рассмотрим треугольник **ACD**: в нем один из острых углов равен 30 градусов, т.е. катет противолежащий этому углу в два раза меньше гипотенузы.

Теперь рассмотрим треугольник **AHD** - подобный треугольнику **ACD**: катет противолежащий углу в 30 градусов в корень из 3 раз меньше другого катета. В данном случае второй катет равен 2 корня из 3, значит катет, противолежащий углу в 30 градусов, равен 2, а гипотенуза в два раза больше этого катета:  $AD = 2DH = 4$ . Зная  $AD$  в треугольнике **ACD**, находим:  $DC = 2AD = 8$ .  $AB = DC - 2DH = 8 - 4 = 4$ . Зная эти значения определим искомое:

$$S_{\text{сек}} = \frac{a+b}{2} h = \frac{8+4}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

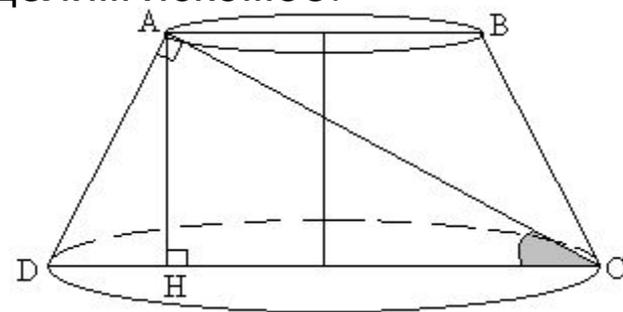
$$S_1 = 4\pi \quad S_2 = 16\pi$$

$$V = \frac{1}{3} h (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot (4\pi + 16\pi + \sqrt{4\pi \cdot 16\pi}) = \frac{56}{3} \sqrt{3}\pi$$

$$S_{\text{бок}} = \pi R_1 (R_1 + R_2) = 4\pi(2+4) = 24\pi$$

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + S_1 + S_2 = 44\pi$$



## Задача 9. (№702)

Высота конуса равна 5 см. На расстоянии 2 см от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объем исходного конуса, если объем меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен  $24 \text{ см}^3$ .

# Решение:

$PO=5$  см,  $PO_1=2$  см;  $PO$  — высота конуса.

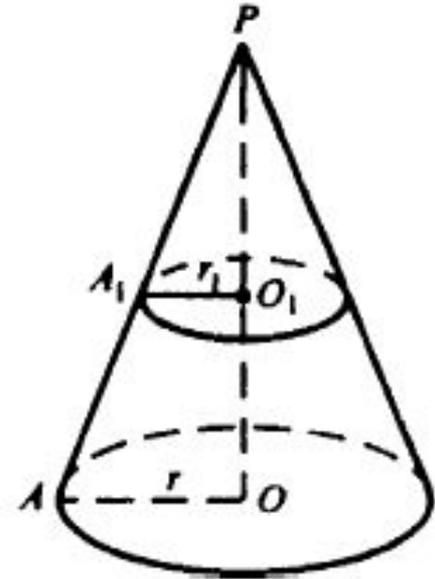
$\triangle PO_1A_1 \sim \triangle POA$ ,  $O_1A_1=r_1$ ,

Тогда:  $\frac{PO_1}{A_1O_1} = \frac{PO}{OA}$ ,  $\frac{2}{r_1} = \frac{5}{r} = \frac{5}{r}$ .

$V_1 = \frac{1}{3} \pi r_1^2 PO_1 = 24$ ,  $\frac{1}{3} \pi r_1^2 \cdot 2 = 24$ ,  $r_1^2 = \frac{36}{\pi}$ ,

$r_1 = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$  см.  $\frac{2}{\frac{6}{\sqrt{\pi}}} = \frac{5}{r}$ , откуда  $r = \frac{6 \cdot 5}{\sqrt{\pi} \cdot 2} = \frac{15}{\sqrt{\pi}}$  см.

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 PO = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{225}{\pi} \cdot 5 = 75 \cdot 5 = 375$  см<sup>3</sup>.



## Задача 10. (№708)

Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 м и 6 м, а образующая равна 5 м. Найдите объем усеченного конуса.

# Решение:

**Дано:** усеченный конус,  $r = O_1C = 3$  м,  $OB = R = 6$  м,  $CB = 5$  м (рис. 1).

**Найти:**  $V_{\text{ус.п.}}$

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr).$$

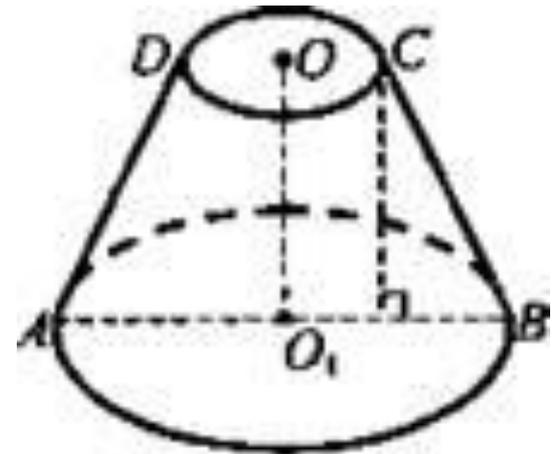


Рис. 1

Проведем  $CC_1 \perp AB$ ,  $O_1C = OC_1 = 3$  м,  $C_1B = 6 - 3 = 3$  (м). Из  $\triangle CBC_1$  ( $\angle C_1 = 90^\circ$ ) по теореме Пифагора

$$CB^2 = CC_1^2 + C_1B^2, \quad \text{отсюда} \quad CB^2 - C_1B^2 = CC_1^2, \quad 5^2 - 3^2 = CC_1^2, \quad 16 = CC_1^2, \quad CC_1 = 4.$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 4(6^2 + 3^2 + 6 \cdot 3) = 84\pi \text{ (м}^3\text{)}.$$

## Задача 11.

**Радиус оснований усеченного конуса 6 см и 10 см. Образующая наклонена к плоскости большего основания под углом  $60^\circ$ .**

***Найдите:  $V$  усеченного конуса.***

# Решение:

Дано:  $\alpha = 60^\circ$ ,  $R = 10$  см,  $r = 6$  см.

Найти:  $V_{\text{ус.к.}}$ .

$$V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + Rr). \quad l = 8 \text{ см,}$$

$$H = 8 \cdot \sin 60^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}. \quad V = \frac{1}{3} \pi \cdot 4\sqrt{3} (10^2 + 6^2 + 10 \cdot 6) = \frac{784\sqrt{3}\pi}{3} \text{ (см}^3\text{)}.$$

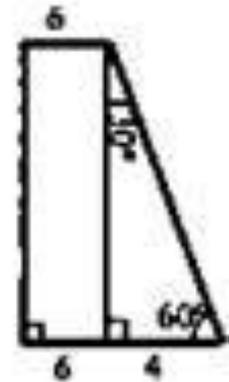
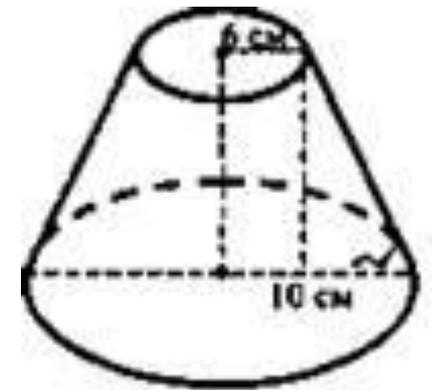


Рис. 6

Ответ  $V = \frac{784\sqrt{3}\pi}{3} \text{ см}^3.$   
:

## Задача 12.

**Образующая конуса 8 см, а угол при вершине осевого сечения  $60^\circ$ .**

***Найдите объем конуса.***

# Решение:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H. \quad R = 4 \text{ см.}$$

$$H = 8 \cdot \sin 60^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (см).}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{3} = \frac{64\sqrt{3}\pi}{3} \text{ (см}^3\text{).}$$

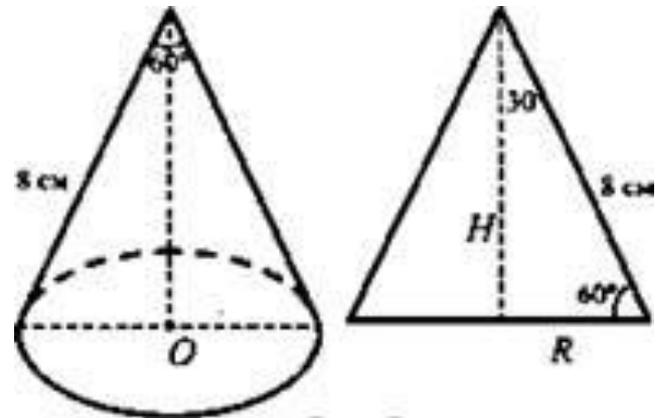


Рис. 7

Отве

т:

$$V = \frac{64\sqrt{3}\pi}{3} \text{ см}^3.$$

## Задача 13.

*Найдите объем усеченного конуса*, если его осевое сечение трапеция с основаниями 8 см, 6 см и высотой 3 см .

## Решение:

$$V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + Rr).$$

$$R = 4 \text{ см}, r = 3 \text{ см}. V = \frac{1}{3} \pi \cdot 3 (4^2 + 3^2 + 4 \cdot 3) = 37\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

**Ответ:  $V = 37\pi$   
см<sup>3</sup>.**

# ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:

- Написать опорный конспект.
- Выучить все формулировки теорем и формулы!
- Разобрать решенные задачи
- Подготовиться у контрольной работе по теме «**Объемы поверхностей геометрических тел**»

# YCHENKARI!

