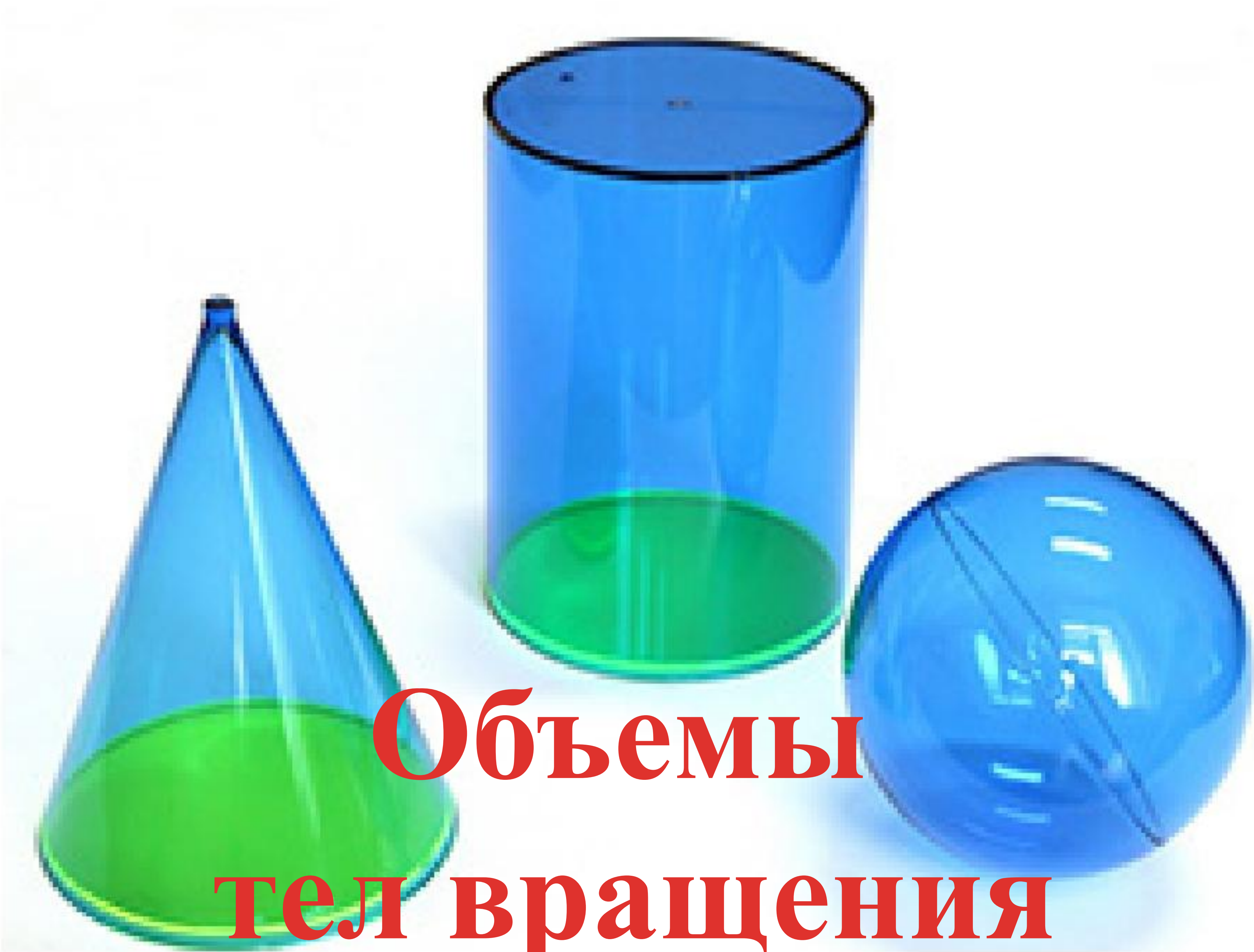
Объемы
тел вращения



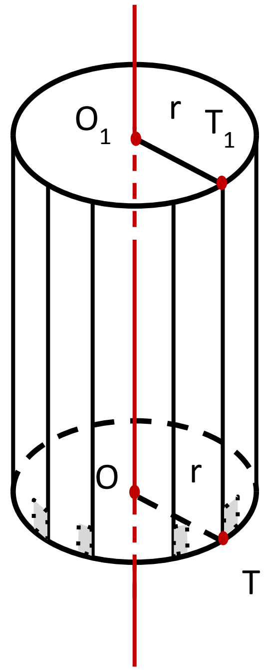
Что называется *цилиндром, осью цилиндра, высотой цилиндра, радиусом цилиндра*?

Цилиндр — тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами O(r), O_1(r)

Ось цилиндра — прямая OO_1

Высота цилиндра — длина образующей

Радиус цилиндра — радиус основания



Теорема

Объём цилиндра равен произведению **площади основания** на **высоту**

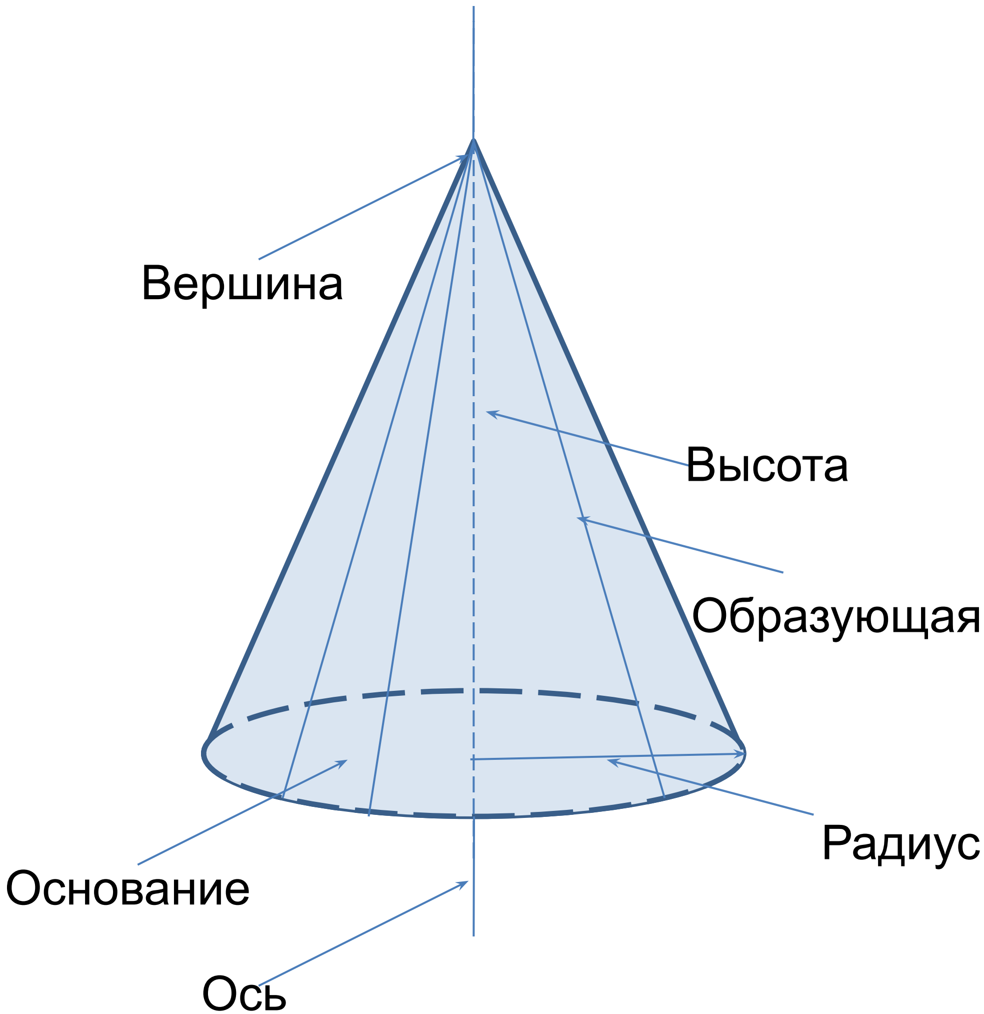
$$V = S_{осн.} \cdot h$$

Теорема

Объём цилиндра равен произведению **площади основания** на **высоту**

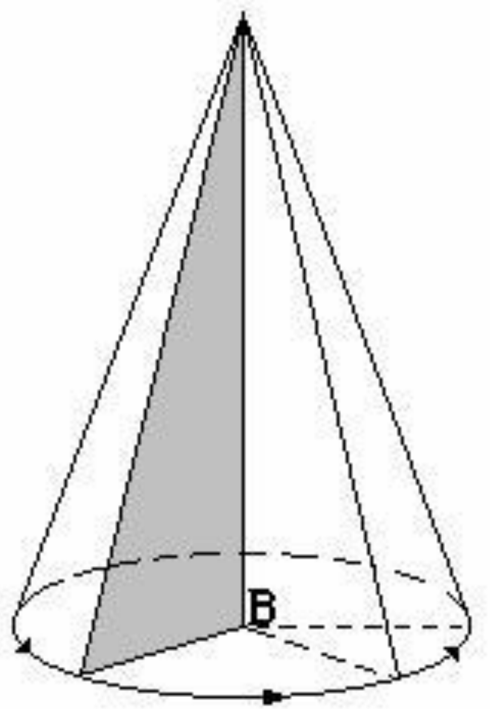
$$\boxed{V = \pi r^2 h}$$

КОНУС



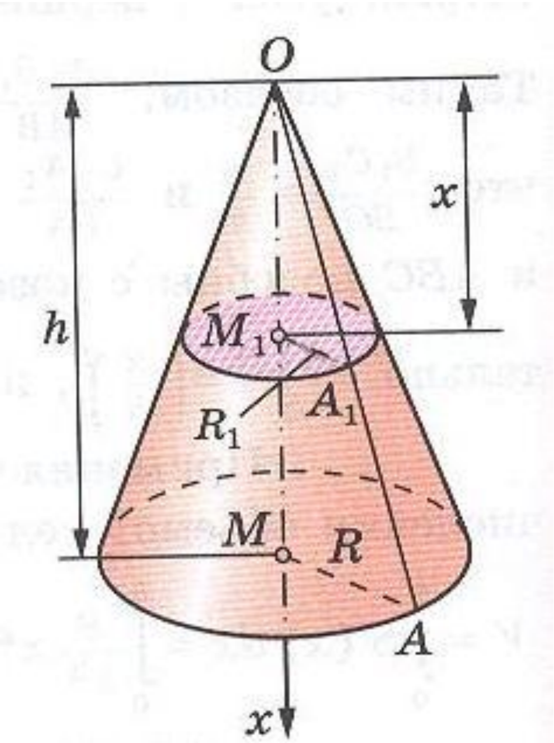
- **Конус** – это тело, которое состоит из круга – основания конуса, точки не лежащей в плоскости этого круга – вершины конуса, и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания.

Конус – тело вращения...



Конус можно получить путем вращения **прямоугольного треугольника** вокруг одного из его катетов.

ОБЪЕМ КОНУСА

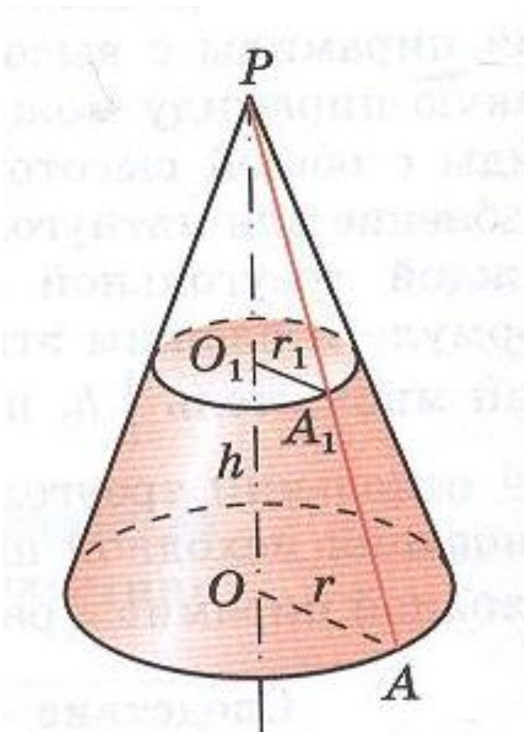


Теорема:

Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

$$V = \frac{1}{3} Sh.$$

Объём усеченного конуса



Следствие:

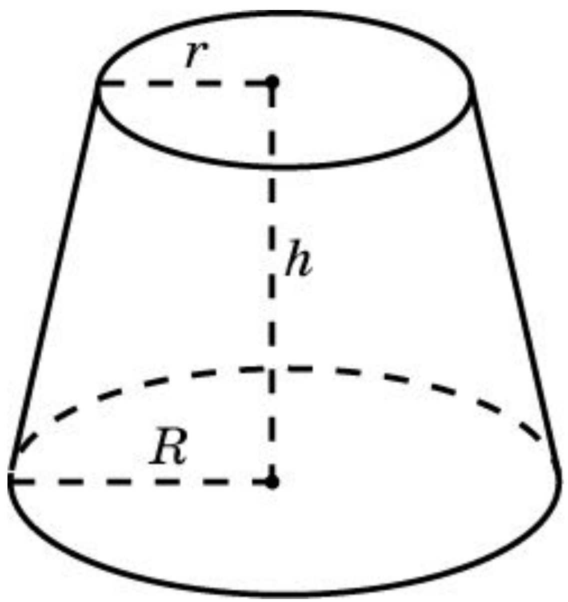
Объем усеченного конуса, высота которого равна h, а площадь оснований S и S_1, вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} h \left(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1} \right).$$

ОБЪЕМ УСЕЧЕННОГО КОНУСА

Объем усеченного конуса, основания которого – круги радиусов *R* и *r*, а высота равна *h*, выражается формулой

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R \cdot r + r^2).$$

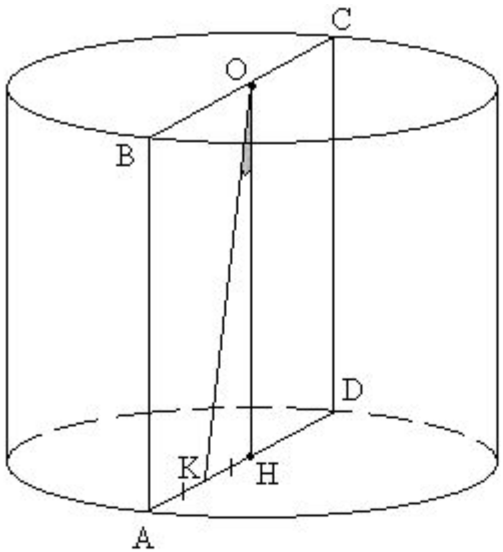


Решение задач

Задача 1.

Отрезок, соединяющий центр верхнего основания цилиндра с серединой радиуса нижнего основания, равен 12см. и образует с осью угол в 30 градусов.

Найти: площадь осевого сечения, объём цилиндра и площадь полной поверхности.



Решение:

Рассмотрим треугольник **ОКН**- прямоугольный с острым углом 30 градусов. Как известно, если в прям. треугольнике один острый угол равен 30 градусов, то катет, лежащий напротив этого угла, равен половине гипотенузы, а другой катет в корень из 3 больше этого катета.

Для нашего случая **КН = 6**; **ОН = 6 корней из 3**.

КН - это половина радиуса основания. То есть радиус равен 12.

Рассмотрим прямоугольник **ABCD**, он является осевым сечением цилиндра и в нем одна сторона - диаметр основания и равен **и его площ**

$$S = ab = 24 \cdot 6\sqrt{3} = 144\sqrt{3}$$

Решение:

Теперь найдем **объём цилиндра** и **площадь полной поверхности**:

$$V = SH = \pi R^2 H = \pi \cdot 12^2 \cdot 6\sqrt{3} = 864\sqrt{3}\pi$$

$$S_{бок} = PH = 2\pi RH = 2\pi \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3} = 144\sqrt{3}\pi$$

$$S_{осн} = \pi R^2 = \pi \cdot 12^2 = 144\pi$$

$$S_{пов} = S_{бок} + 2S_{осн} = 144\sqrt{3}\pi + 2 \cdot 144\pi$$

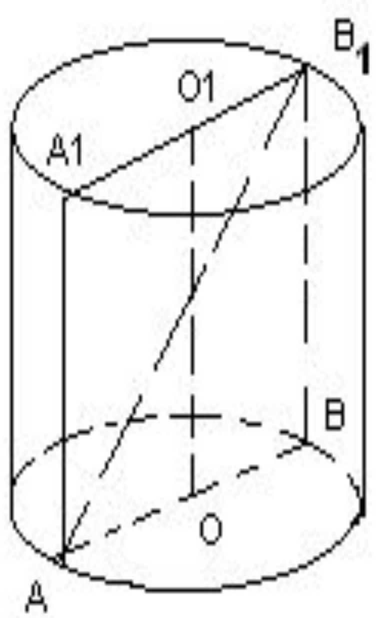
$$S_{пов} = 144\pi(\sqrt{3} + 2)$$

Задача 2.

Осевое сечение цилиндра прямоугольник со сторонами 8 и 12 дм.

***Найти объём цилиндра и площадь боковой поверхности*, если его высота равна большей стороне осевого сечения.**

Решение:



Раз осевое сечение прямоугольник AA1B1B, значит цилиндр прямой круговой. Высота OO1= 12, а диаметр основания AB=8. Радиус - половина диаметра, поэтому равен AO=4.

Найдем площадь основания:

$\mathbf{S = pr^2 = 16\pi}$

Найдем объем:

V=1/3SH=1/3*16 **π** *12=64 **π**

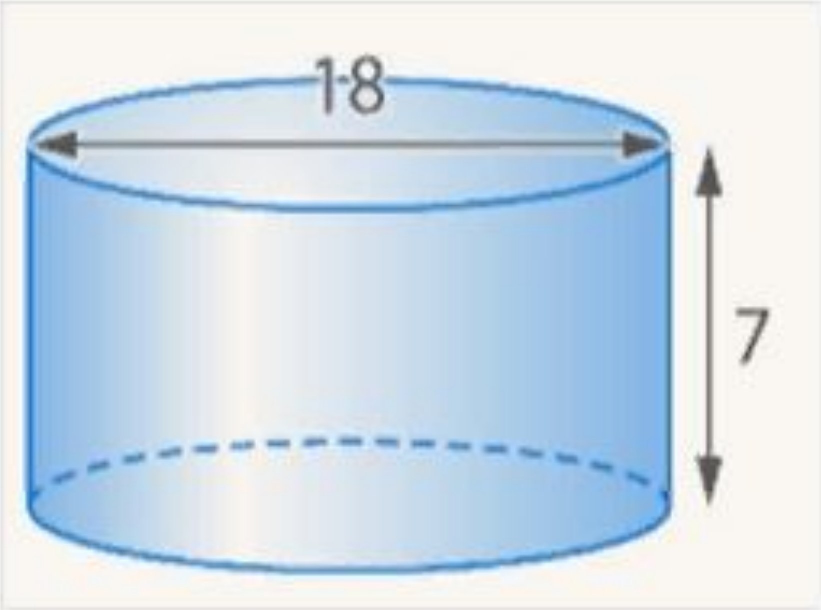
Найдем площадь боковой поверхности:

$\mathbf{S_{бок}=P*H}$, где P - периметр основания: P = 2 **π** r

$S_{бок}$=2 **π** r*H=96 **π**

Задача 3.

Какое количество нефти в тоннах вмещает цилиндрическая цистерна диаметром 18 м и высотой 7 м (см. рис. 9), если плотность нефти равна $0{,}85\ \frac{г}{см^3}$? Округлите π до 3,14, а сам ответ – до тонн.



Решение:

Нам нужно найти массу. Из курса физики $m = \rho V$. Значит, нужно найти объем. По условию, $h = 7$ и $d = 18$, тогда $r = \frac{1}{2} \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9$.

Имеем: $V_{\text{цистерны}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = 81\pi \cdot 7 = 567\pi\ \text{м}^3$.

Теперь переведем плотность из $\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ в более удобные единицы $\frac{\text{т}}{\text{м}^3}$, т. к. объем цистерны мы получили в м^3:

$0{,}85\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = \frac{0{,}85 \cdot 1000000}{1000000}\ \frac{\text{т}}{\text{м}^3} = 0{,}85\ \frac{\text{т}}{\text{м}^3}$.

Тогда $m_{\text{нефти}} = 567\pi \cdot 0{,}85 = 481{,}95\pi$ т.

Подставляя $\pi \approx 3{,}14$, получаем: $m_{\text{нефти}} \approx 1513{,}323$ т ≈ 1513 т.

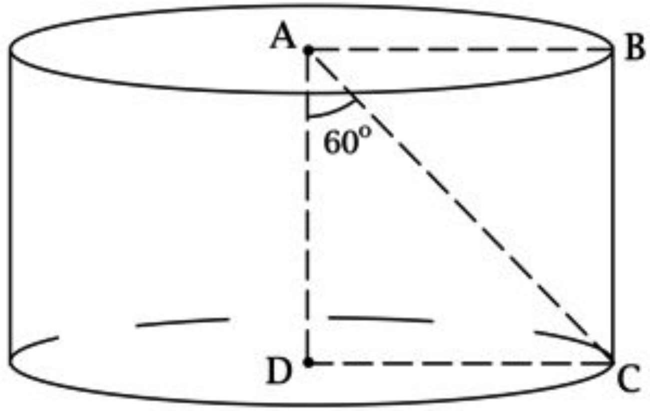
Ответ: 1513 т.

Задача 4.

AD – ось цилиндра, BC – его образующая, $S_{ABCD} = \dfrac{16\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi^2}}$, $\angle CAD = 60^\circ$.

Найдите объём цилиндра.

Решение:



Так как AD и BC – высоты цилиндра, то $ABCD$ – прямоугольник, тогда

$$S_{ABCD} = AD \cdot DC = H \cdot R = \frac{16\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi^2}}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник ADC:

Т.к. $\angle DAC = 60^\circ$, то

$$AD = \operatorname{tg} \angle ACD \cdot DC = \operatorname{tg} 30^\circ \cdot R = \frac{R}{\sqrt{3}},$$ т.е. $H = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$ или $R = \sqrt{3}H$.

Решение:

Подставляя выражение для R в S_{ABCD}, получим: $$H^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{16\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi^2}},$$

откуда $H = \dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$, тогда $R = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}$.

$$V_{\text{цил}} = \pi R^2 H = \pi \cdot \frac{16 \cdot 3}{\sqrt[3]{\pi^2}} \cdot \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}} = 192.$$

Ответ: 192

Задача 5.

Образующая конуса равна 60 см, высота 30 см.

Найдите Vконуса.

Решение:

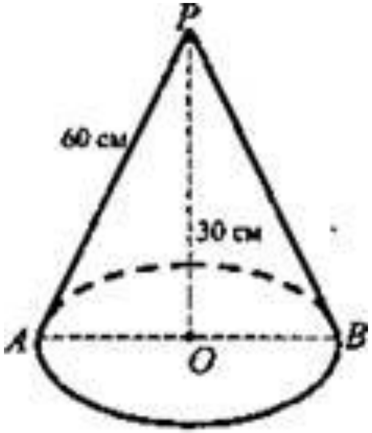


Рис. 4

Из ΔAOP ($\angle O = 90°$): Так как $PO = 1/2AP$, то

$$\angle A = 30°, \quad R = AO = 60 \cdot \cos 30° = 60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$30\sqrt{3}\ (\text{см}), \quad V = \frac{1}{3}\pi \cdot (30\sqrt{3})^2 \cdot 30 = 27000\pi\ (\text{см}^3).$$

Ответ: V = 27000π см3.

Задача 6.

Образующая конуса, равна 12 см, наклонена к плоскости основания под углом 30°.

Найдите объем конуса.

Решение:

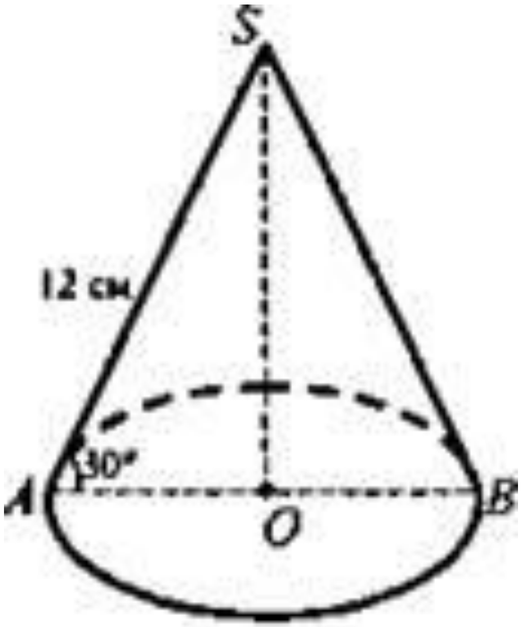


Рис. 5

$$V = \frac{1}{3}\pi AO^2 \cdot SO.$$

Из ΔASO (∠O = 90°):

$$H = SO = \frac{1}{2}AC = 6 \text{ см.} \quad R = AO = 12 \cdot \cos 30° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 6\sqrt{3} \text{ (см).}$$

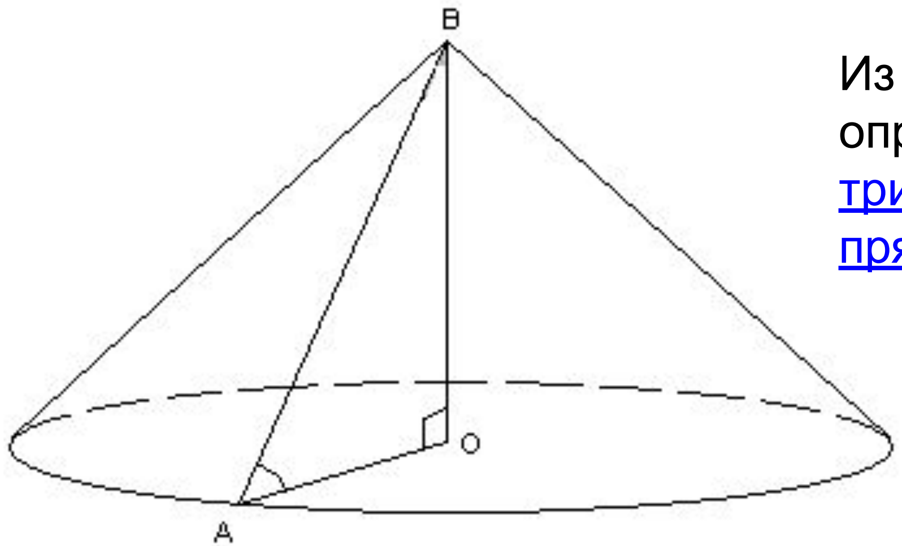
$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot (6\sqrt{3})2 \cdot 6 = 216\pi \text{ (см}^3\text{).}$$

Ответ: V= 216π см3

Задача 7.

Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 30 градусов, радиус основания равен 3 дм. ***Найти объём конуса и площадь боковой поверхности*.**

Решение:



Из прямоугольного треугольника АВО определим АВ и ВО, используя тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике:

$$AB = \frac{AO}{\cos 30^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$$

$$BO = AO \cdot tg30^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Определим площадь основания:

$S = \pi r^2 = 9\pi$

Определим объем конуса и площадь боковой поверхности:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot \sqrt{3} = 3\pi\sqrt{3}$$

$$S_{бок} = \pi r l = \pi \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\pi$$

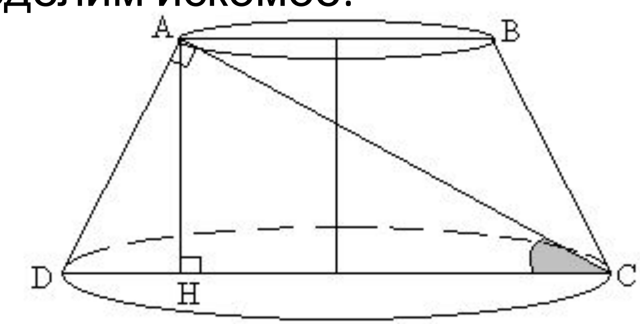
Задача 8.

Высота усеченного конуса равна 2 корня из 3 см. Диагональ осевого сечения конуса образует с плоскостью основания угол 30 градусов и перпендикулярна образующей. ***Найти: площадь осевого сечения, объём усеченного конуса и площадь полной поверхности.***

Решение:

Рассмотрим треугольник **ACD**: в нем один из острых углов равен 30 градусов, т.е. катет противолежащий этому углу в два раза меньше гипотенузы.

Теперь рассмотрим треугольник **AHD** - подобный треугольнику **ACD**: катет противолежащий углу в 30 градусов в корень из 3 раз меньше другого катета. В данном случает второй катет равен 2 корня из 3, значит катет, противолежащий углу в 30 градусов, равен 2, а гипотенуза в два раза больше этого катета: AD = 2DH = 4. Зная AD в треугольнике **ACD**, находим: DC = 2AD = 8. AB = DC - 2DH = 8 - 4 = 4. Зная эти значения определим искомое:



$$S_{сеч} = \frac{a+b}{2}h = \frac{8+4}{2}\cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

$$S_1 = 4\pi \quad S_2 = 16\pi$$

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot(4\pi + 16\pi + \sqrt{4\pi \cdot 16\pi}) = \frac{56}{3}\sqrt{3}\pi$$

$$S_{бок} = \pi l(R_1 + R_2) = 4\pi(2+4) = 24\pi$$

$$S_{пол} = S_{бок} + S_1 + S_2 = 44\pi$$

Задача 9. (№702)

Высота конуса равна 5 см. На расстоянии 2 см от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объем исходного конуса, если объем меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен 24 см^3.

Решение:

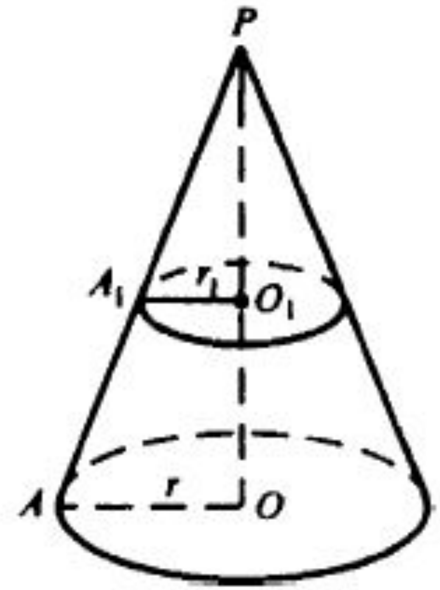
$PO=5$ см, $PO_1=2$ см; PO — высота конуса.

$\Delta PO_1A_1 \sim \Delta POA$, $O_1A_1=r_1$,

Тогда: $\dfrac{PO_1}{A_1O_1}=\dfrac{PO}{OA}$, $\dfrac{2}{r_1}=\dfrac{5}{OA}=\dfrac{5}{r}$.

$V_1=\dfrac{1}{3}\pi r_1^2\,PO_1=24$, $\dfrac{1}{3}\pi r_1^2\cdot 2=24$, $r_1^2=\dfrac{36}{\pi}$,

$r_1=\dfrac{6}{\sqrt{\pi}}$ см. $\dfrac{2}{\frac{6}{\sqrt{\pi}}}=\dfrac{5}{r}$, откуда $r=\dfrac{6\cdot 5}{\sqrt{\pi}\cdot 2}=\dfrac{15}{\sqrt{\pi}}$ см.



$$V=\frac{1}{3}\pi r^2\,PO=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{225}{\pi}\cdot 5=75\cdot 5=375\text{ см}^3.$$

Задача 10. (№708)

Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 м и 6 м, а образующая равна 5 м. Найдите объем усеченного конуса.

Решение:

Дано: усеченный конус, r = O1C = 3 м, OB = R = 6 м, CB = 5 м (рис. 1).
Найти: Vус.п.

$$V = \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 + r^2 + Rr).$$

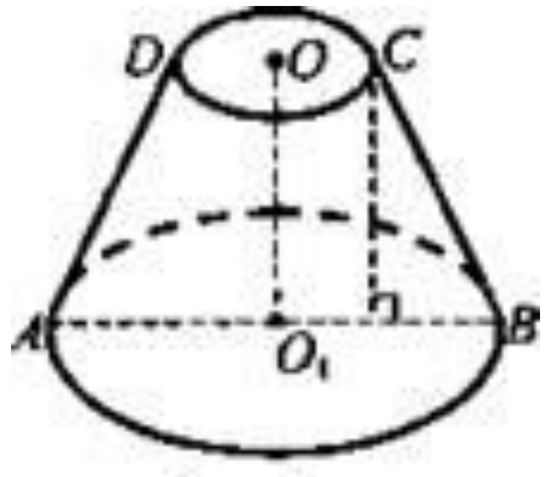


Рис. 1

Проведем CC1 ⊥ AB, O1C = OC1 = 3 м, C1B = 6 - 3 = 3 (м). Из ΔCBC1 (∠C1 = 90°) по теореме Пифагора

$CB^2 = CC_1^2 + C_1B^2,$ отсюда $CB^2 - C_1B^2,$ $CC_1^2 = 5^2 - 3^2,$ $CC_1 2 = 16,$ $CC_1 = 4.$

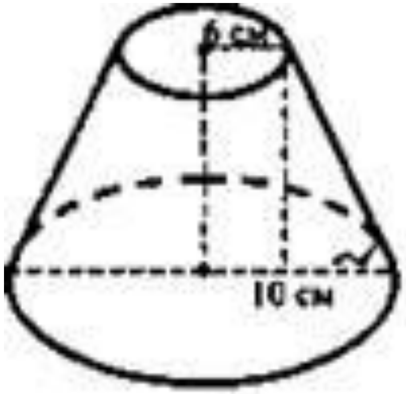
$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4(6^2 + 3^2 + 6 \cdot 3) = 84\pi\ (м^3).$$

Задача 11.

Радиус оснований усеченного конуса 6 см и 10 см. Образующая наклонена к плоскости большего основания под углом 60°.

Найдите: Vусеченного конуса.

Решение:



Дано: α = 60°, R = 10 см, r = 6 см.
Найти: Vус.к..

$$V=\frac{1}{3}\pi H\left(R^2+r^2+Rr\right).\ l=8\text{ см},$$

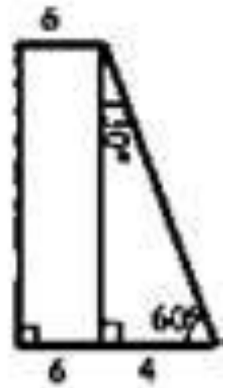


Рис. 6

$$H=8\cdot\sin 60^\circ=8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\ (\text{см}).\ V=\frac{1}{3}\pi\cdot 4\sqrt{3}\left(10^2+6^2+10\cdot 6\right)=\frac{784\sqrt{3}\pi}{3}\ (\text{см}^3).$$

Ответ: $V=\dfrac{784\sqrt{3}\pi}{3}\text{ см}^3.$

Задача 12.

Образующая конуса 8 см, а угол при вершине осевого сечения 60°.

***Найдите объем конуса*.**

Решение:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H.\ R=4\text{ см}.$$

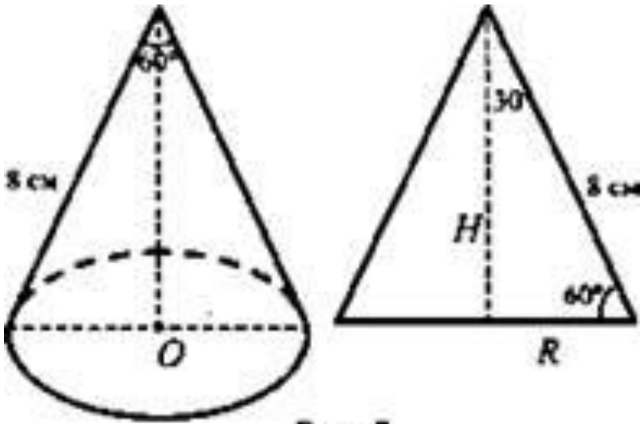


Рис. 7

$$H=8\cdot\sin 60^\circ=8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\text{ (см)}.$$

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot 4^2\cdot 4\sqrt{3}=\frac{64\sqrt{3}\pi}{3}\text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: $V=\dfrac{64\sqrt{3}\pi}{3}$ см^3.

Задача 13.

***Найдите объем усеченного конуса*, если его осевое сечение трапеция с основаниями 8 см, 6 см и высотой 3 см .**

Решение:

$$V = \frac{1}{3}\pi H\,(R^2 + r^2 + Rr).$$

$R = 4$ см, $r = 3$ см. $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3\,(4^2 + 3^2 + 4 \cdot 3) = 37\pi$ (см^3).

Ответ: V = 37π см3.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:

- **Написать опорный конспект.**
- **Выучить все формулировки теорем и формулы!**
- **Разобрать решенные задачи**
- **Подготовиться у контрольной работе по теме «Объемы поверхностей геометрических тел»**

УСПЕХОВ!