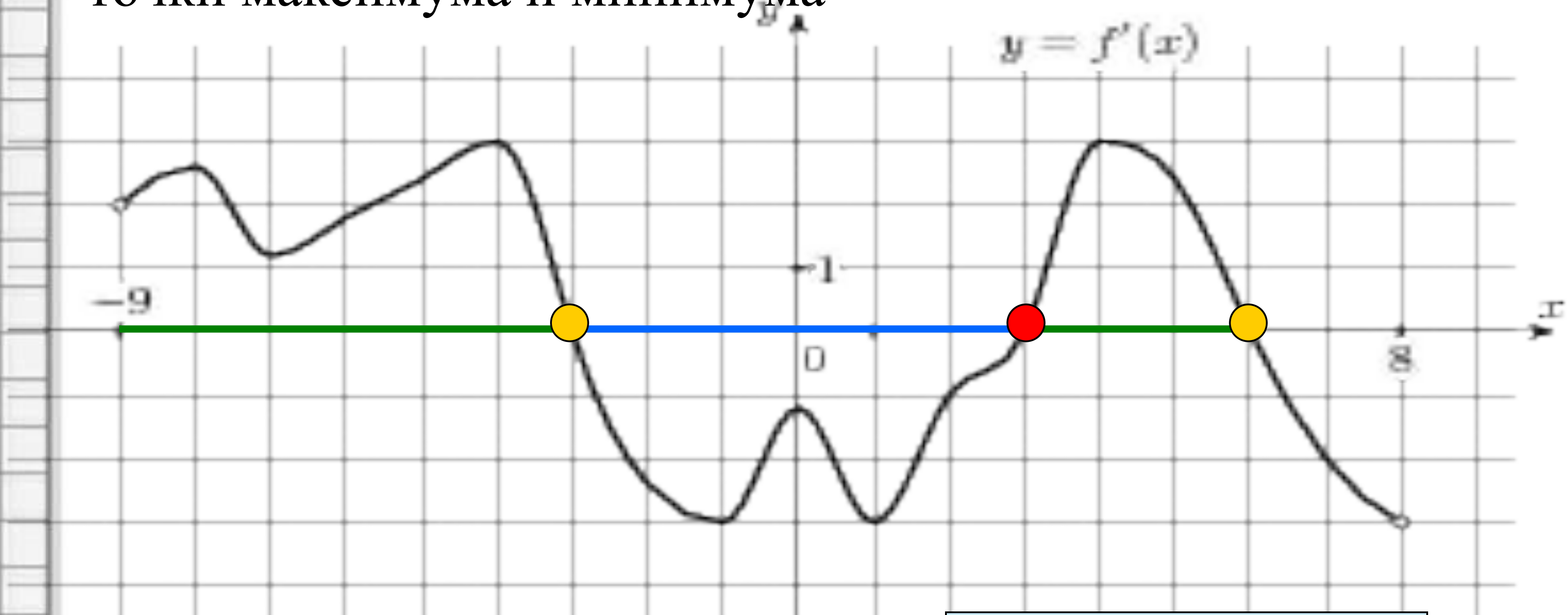
Экстремум функции с единственной критической точкой.

По графику производной функции определите, на каких промежутках функция возрастает, на каких убывает. Укажите точки максимума и минимума



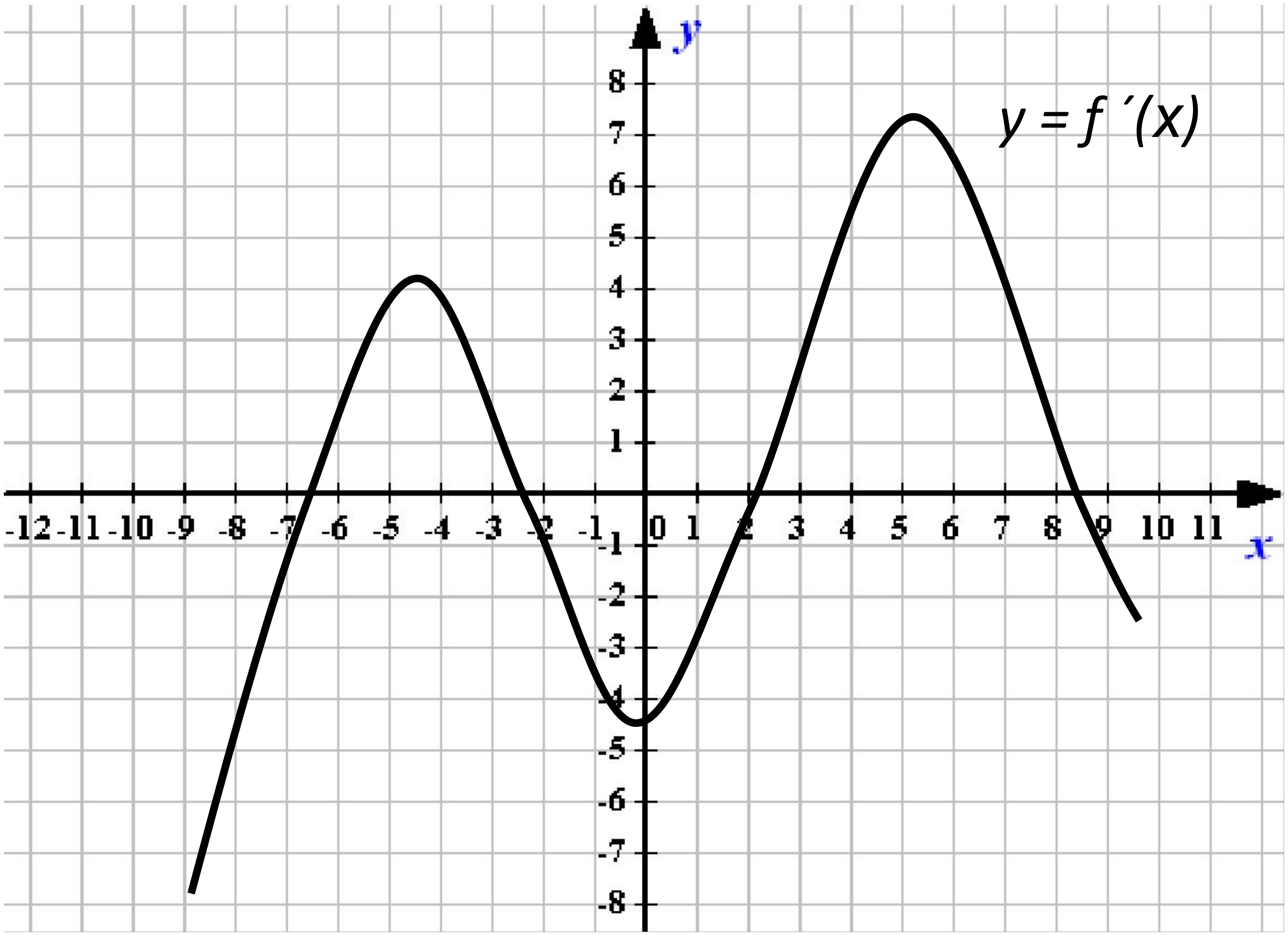
Возрастает:

Убывает:

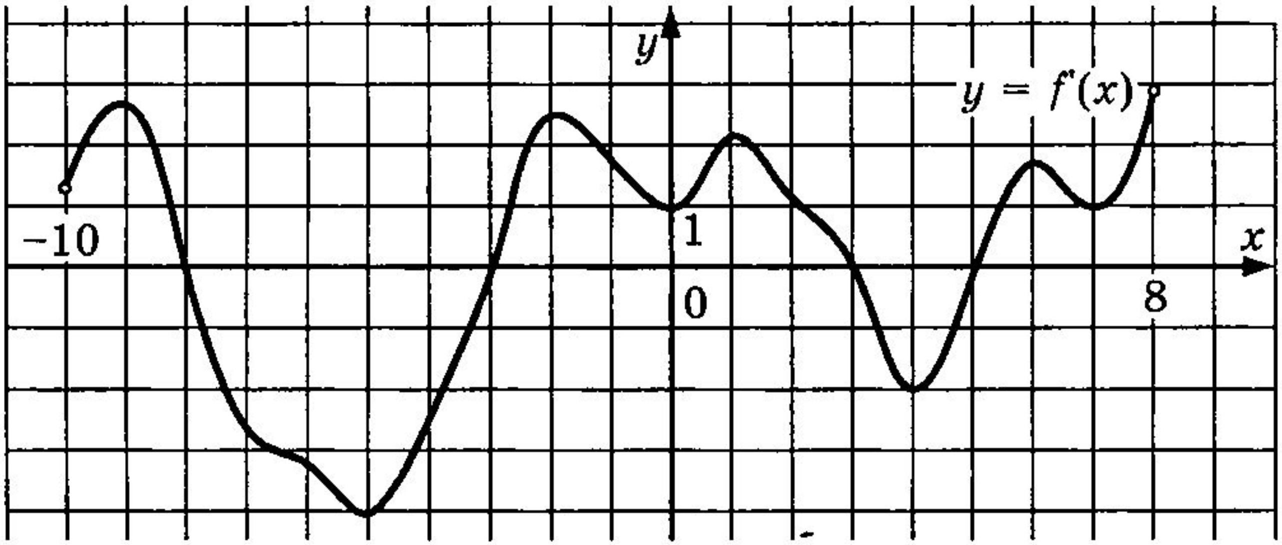
Максимум:

Минимум;

По графику производной функции определите, на каких промежутках функция возрастает, на каких убывает.

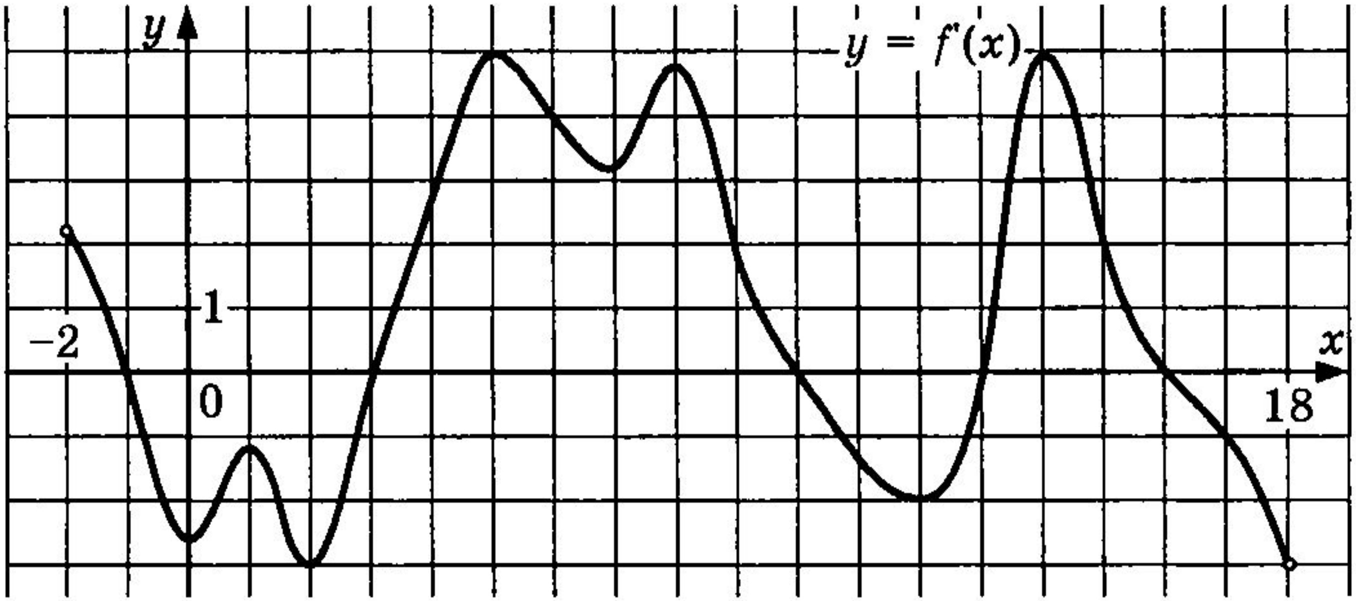


1742. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10;\ 8)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-9;\ 7]$.



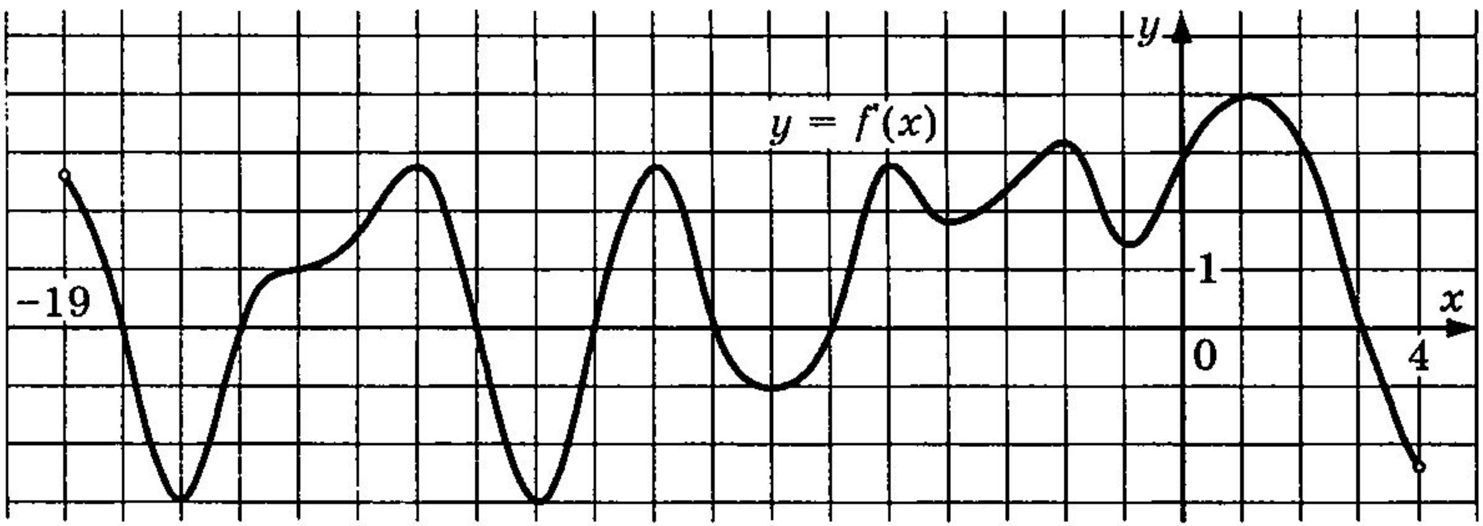
Ответ: 4

1741. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2;\ 18)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[0;\ 15]$.



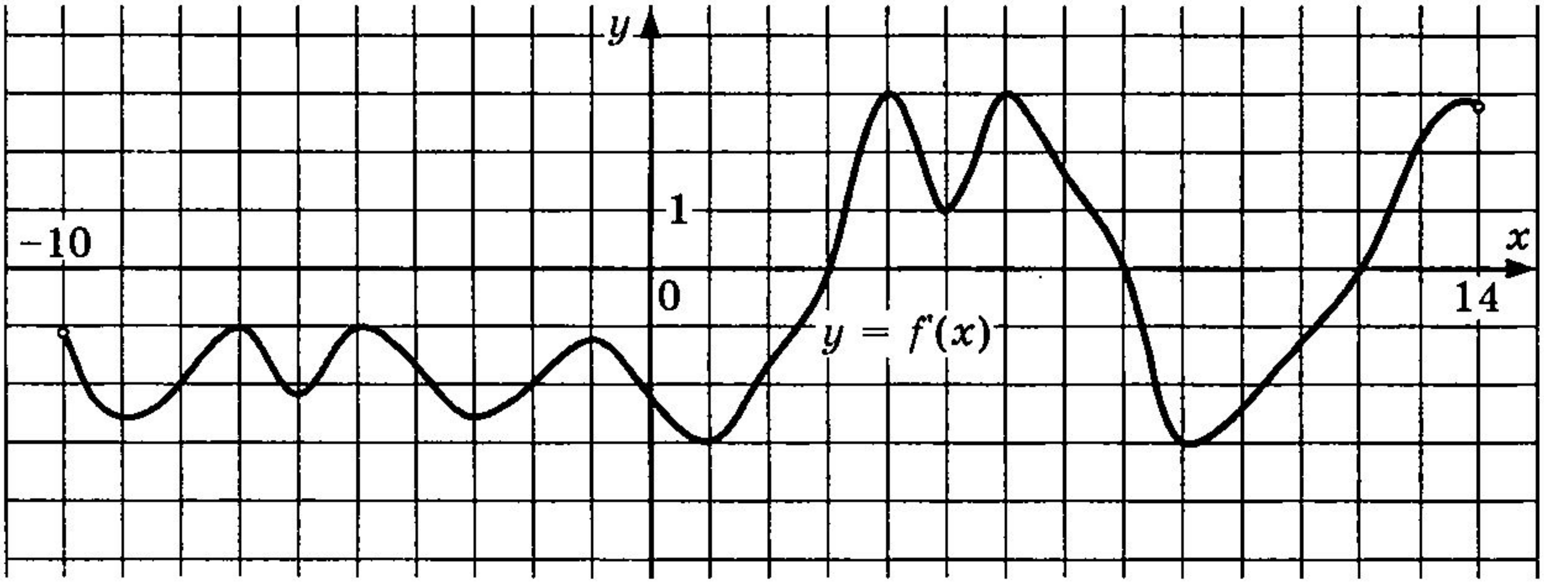
Ответ: 2

1745. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-19; 4)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-17; -1]$.



Ответ: 3

1744. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10;\ 14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-8;\ 11]$.



Ответ: 1

Пусть на промежутке I с концами a и b определена функция f(x). Требуется найти ее локальные экстремумы на промежутке I.

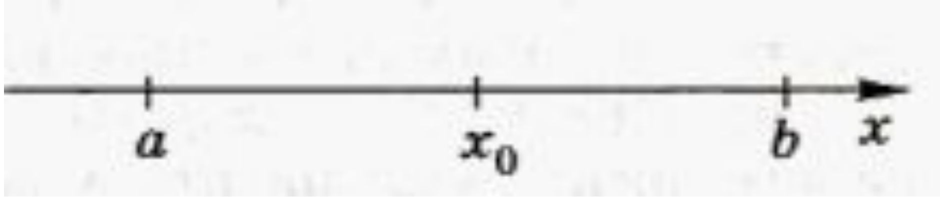
Внутреннюю точку x_0 промежутка I, т. е. точку, принадлежащую интервалу (a; b), называют *критической точкой* функции f(x), если производная f'(x) в этой точке равна нулю или не существует. С другой стороны, если в точке $x_0 \in (a; b)$ функция достигает экстремума, то производная в этой точке равна нулю или не существует, т. е. точка x_0 критическая.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I вместе со своей производной $f'(x)$. Рассмотрим случай, когда внутри промежутка I нет критических точек. Тогда производная $f'(x)$ на интервале (а; Ь) должна иметь один и тот же знак, так как если бы в двух разных точках x_1 и x_2 интервала (а; Ь) производная $f'(x)$ имела бы разные знаки, то вследствие ее непрерывности между точками x_1 и x_2 нашлась бы точка с, в которой $f'(c) = 0$, что невозможно, так как на интервале (а; Ь) нет критических точек.

Но если производная на всем интервале сохраняет один и тот же знак, то функция $f(x)$ возрастает на промежутке I, если

$f'(x) > 0$, или убывает на промежутке I , если $f'(x) < 0$, т.е. функция $f(x)$ строго монотонна на промежутке I.

Пусть теперь на промежутке I с концами a и b функция f(x) непрерывна вместе со своей производной f '(x) и на интервале (a; b) имеется единственная ее критическая точка x_0 . В этом случае промежуток I делится на два промежутка — один с концами a и x_0 , другой с концами x_0 и b .

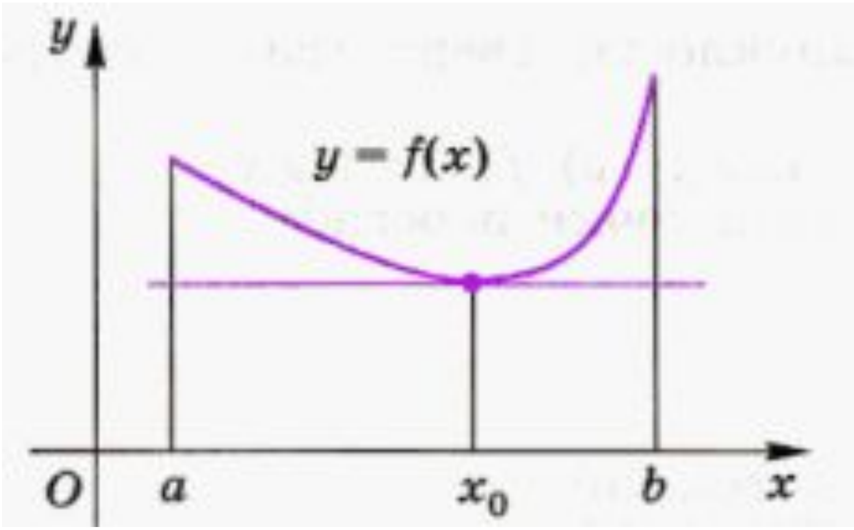


Внутри этих промежутков критических точек нет. Поскольку точка x_0 — критическая, то в ней производная равна нулю.

Это возможно только в четырех случаях

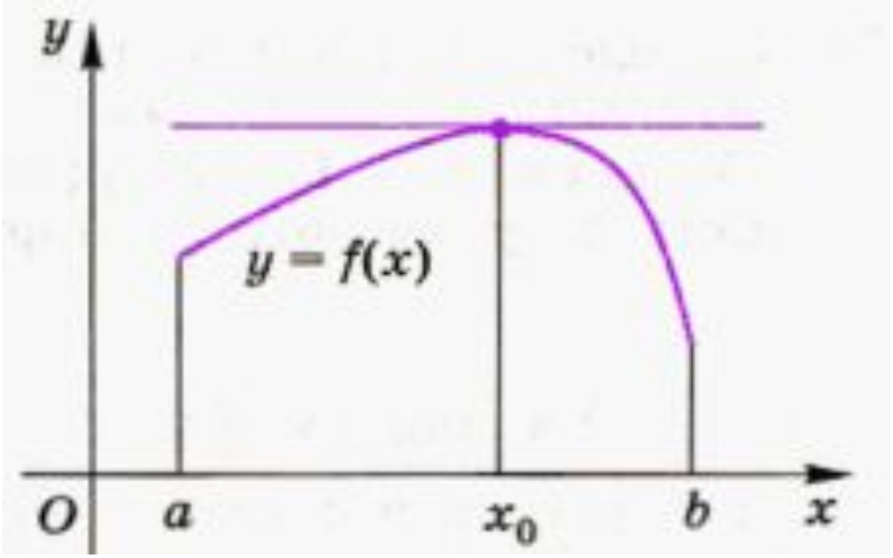
Случай 1

На рисунке изображен график функции f (x), имеющий единственную критическую точку x_0 на промежутке с концами a и b и в этой точке достигается минимум на промежутке с концами a и b. При этом $f'(x) < 0$ слева от точки x_0, т. е. на интервале $(a; x_0)$, и $f'(x) > 0$ справа от точки x_0, т. е. на интервале $(x_0; b)$.



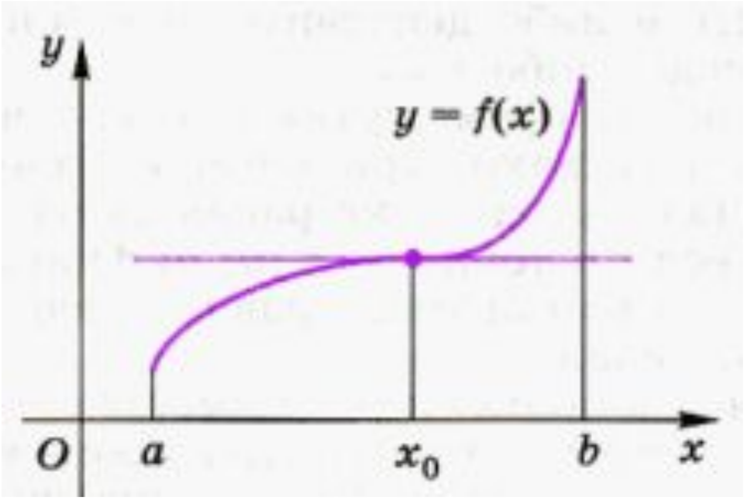
Случай 2

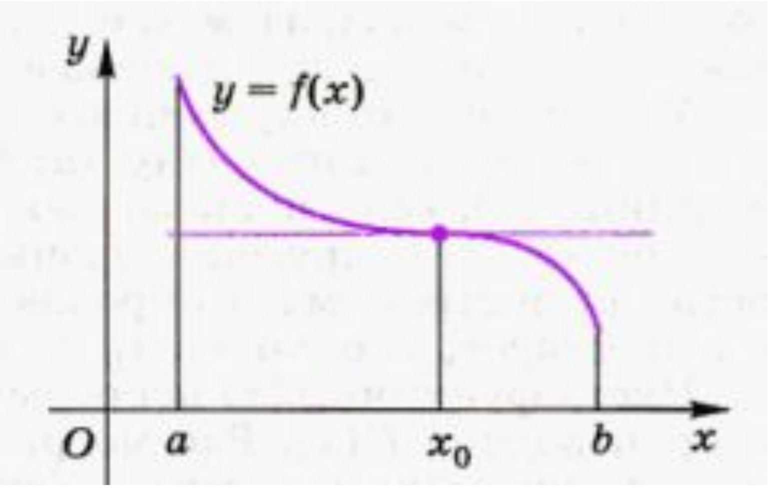
На рисунке изображен график функции f (x), которая в точке x_0 достигает максимума на всём промежутке с концами a и b, при этом $f'(x) > 0$ слева от точки x_0 и $f'(x) < 0$ справа от неё.



Случаи 3 и 4.

На рисунках изображены графики функций, у которых в точке x_0 нет ни максимума, ни минимума





Утверждение 1

Пусть на промежутке I с концами a и b функция f(x) непрерывна вместе со своей производной f '(x) и x_0 - единственная точка на интервале (a; b), в которой f '(x)=0. Тогда если на интервале (a; b) найдутся точки x_1 и x_2, такие, что $x_1 < x_0 < x_2$ и:

а) $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) < 0$, то в точке x_0 функция f(x) достигает своего максимума на промежутке I ;

б) $f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) > 0$, то в точке x_0 функция f(x) достигает своего минимума на промежутке I.

Этот экстремум единственный.

ПРИМЕР 1. Найдем максимум функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$ — на интервале $(-\infty; 0)$.

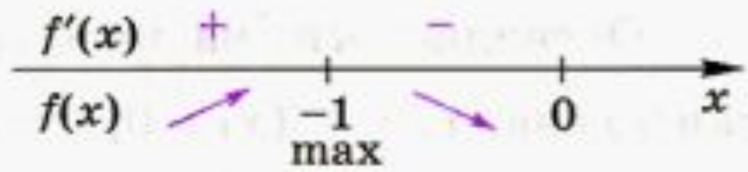


Рис. 125

Функция f определена для всех x из этого интервала. Найдем первую производную функции f:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

На интервале $(-\infty; 0)$ функция f имеет единственную критическую точку $x = -1$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль. В этой точке производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «−» (рис. 125), следовательно, в точке $x = -1$ функция имеет максимум на интервале $(-\infty; 0)$.

Таким образом, $\max\limits_{(-\infty;\,0)} f(x) = f(-1) = -2.$

Утверждение 2

Пусть на промежутке I с концами a и b функция f(x) непрерывна со своей своими первой и второй производными и x_0 - единственная точка на интервале (a; b), в которой $f'(x)=0$. Тогда:

а) если $f''(x_0) > 0$, то точка x_0 есть точка минимума функции $f(x)$ на промежутке I;

б) если $f''(x_0) < 0$, то точка x_0 есть точка максимума функции $f(x)$ на промежутке I.

ПРИМЕР 2. Найдем минимум функции $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$ на интервале $(0; +\infty)$.

Функция $f(x)$ определена для всех $x > 0$. Вычислим первую производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = 8x - \frac{1}{x^2} = \frac{8x^3 - 1}{x^2}.$$

На интервале $(0; +\infty)$ функция f имеет единственную критическую точку $x = \frac{1}{2}$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль. Вычислим вторую производную функции f:

$$f''(x) = 8 + \frac{2}{x^3}.$$

Очевидно, что на интервале $(0; +\infty)$ вторая производная положительна, т. е. $f''(x) > 0$, следовательно, $x = \frac{1}{2}$ — точка минимума.

Таким образом, $\min\limits_{(0;\, +\infty)} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 3.$

Если же в критической точке производная не существует, то справедливо **утверждение 3**

Пусть на промежутке I с концами a и b функция f (x) непрерывна, а ее производная f '(x) существует, непрерывна и отлична от нуля во всех точках интервала (a;b), кроме точки x_0, в которой производная не существует. Тогда если на интервале (a; b) найдутся точки x_1 и x_2, такие, что $x_1 < x_0 < x_2$ и:

а) если $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) < 0$ то в точке x_0 функция f(x) достигает своего максимума на промежутке I;

б) если $f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) > 0$ то в точке x_0 функция f(x) достигает своего минимума на промежутке I.

Этот экстремум единственный.