

# Производные процентные расчеты. Кривые доходности.

## Средние процентные ставки

Пусть за периоды  $n_1, n_2, \dots, n_k$  начисляются простые проценты по ставкам  $i_1, i_2, \dots, i_k$ .

Приравниваем множители наращения:

$$1 + N\bar{i} = 1 + \sum_t n_t i_t$$

Откуда получаем:

$$\bar{i} = \frac{\sum n_t i_t}{N}$$

Средняя учетная ставка:

$$\bar{d} = \frac{\sum n_t d_t}{N}$$

## Средние процентные ставки

Если усредняются сложные переменные во времени ставки сложных процентов.

Приравняем множители наращения:

$$(1 + \bar{i})^N = (1 + i_1)^{n_2} (1 + i_2)^{n_2}$$

Откуда получим:

$$\bar{i} = \sqrt[N]{(1 + i_1)^{n_2} (1 + i_2)^{n_2} \dots} - 1$$

## Средние процентные ставки

Усреднение ставок, применяемых в нескольких однородных операциях, которые различаются суммами ссуд и процентными ставками.

Если применяются простые ставки и **сроки одинаковы**:

$$\sum P_t(1 + n\bar{i}) = \sum P_t(1 + ni_t)$$

Средняя ставка:

$$\bar{i} = \frac{\sum P_t i_t}{\sum P_t}$$

## Средние процентные ставки

Усреднение сложных ставок для однородных ссудных операций.

Пусть **сроки** операций **одинаковы** ( $n$ ). Из равенства соответствующих множителей наращения следует:

$$\bar{i} = \sqrt[n]{\frac{\sum P_t (1 + i_t)^n}{\sum P_t}} - 1$$

# Эквивалентность процентных ставок

Эквивалентные ставки – ставки, которые приводят к одинаковым финансовым результатам;

ставки, замена которых друг на друга не изменяет финансовых отношений (обязательств) сторон в рамках одной операции.

Формулы эквивалентности ставок во всех случаях получим исходя из равенства взятых попарно множителей наращенения.

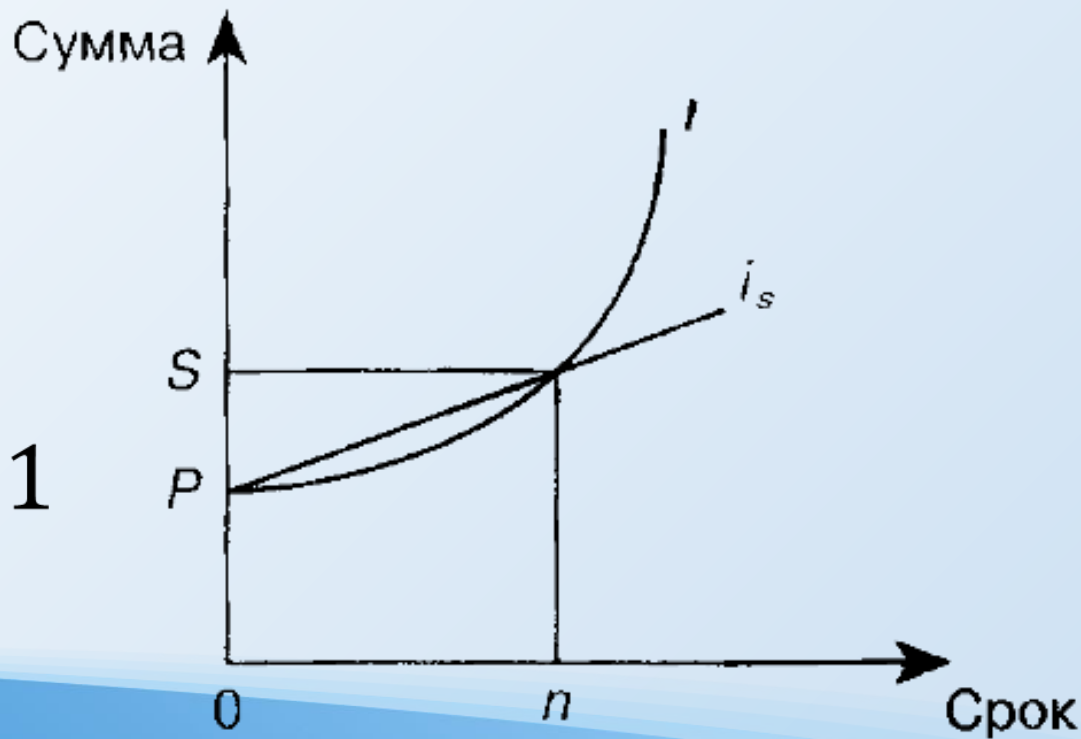
# Эквивалентность простой и сложной процентных ставок

Равенство множителей наращенения:

$$(1 + ni_s) = (1 + i)^n$$

$$i_s = \frac{(1+i)^n - 1}{n}$$

$$i = \sqrt[n]{1 + ni_s} - 1$$



## Эквивалентность простых процентных ставок

Если временные базы одинаковы:

$$i_s = \frac{d_s}{1 - nd_s}$$

$$d_s = \frac{i_s}{1 + ni_s}$$

где  $n$  – срок в годах;

$i_s$  – ставка простых процентов;

$d_s$  – простая учетная ставка.



## Эквивалентность простых процентных ставок

Пусть срок ссуды измеряется в днях ( $n = t/K$ ):

○ временные базы одинаковы и равны 360 дням:

$$i_s = \frac{360d_s}{360 - td_s}$$

$$d_s = \frac{360i_s}{360 + ti_s}$$

○ база начисления – 360 дней, учетная база – 360 дней:

$$i_s = \frac{365d_s}{360 - td_s}$$

$$d_s = \frac{360i_s}{365 + ti_s}$$

# Эквивалентность простых и сложных процентных ставок

Эквивалентность  $i_s$  и  $j$ :

$$i_s = \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{n}$$

$$j = m \left( \sqrt[mn]{1 + ni_s} - 1 \right)$$

# Эквивалентность простых и сложных процентных ставок

Эквивалентность  $d_s$  и  $i$ :

$$d_s = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{n}$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{1}{1 - nd_s}} - 1$$

# Эквивалентность простых и сложных процентных ставок

Эквивалентность  $d_s$  и  $j$ :

$$d_s = \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{n}$$

$$j = m \left( \sqrt[mn]{\frac{1}{1 - nd_s}} - 1 \right)$$

# Эквивалентность сложных процентных ставок

Эквивалентность  $i$  и  $j$ :

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$$
$$j = m\left(\sqrt[m]{1 + i} - 1\right)$$

Эквивалентность  $i$  и  $d$ :

$$i = \frac{d}{1 - d}$$
$$d = \frac{i}{1 + i}$$

## Эквивалентность сложных процентных ставок

Примем обозначение множителя дисконтирования  
(дисконтного множителя):

$$v = (1 + i)^{-1}$$

Тогда:

$$d = iv$$

$$v = 1 - d$$

$$i - d = id$$

# Эквивалентность сложных дискретных и непрерывных ставок

Эквивалентность  $\delta$  и  $i$ :

$$j = m(e^{\delta/m} - 1)$$

$$\delta = m \cdot \ln \left( 1 + \frac{j}{m} \right)$$

Эквивалентность  $\delta$  и  $d$ :

$$\delta = -\ln(1 - d)$$

$$d = 1 - e^{-\delta}$$

# Финансовая эквивалентность обязательств и конверсия платежей

Эквивалентными считаются такие платежи, которые, будучи «приведенными» к одному моменту времени (*focal date*), оказываются равными:

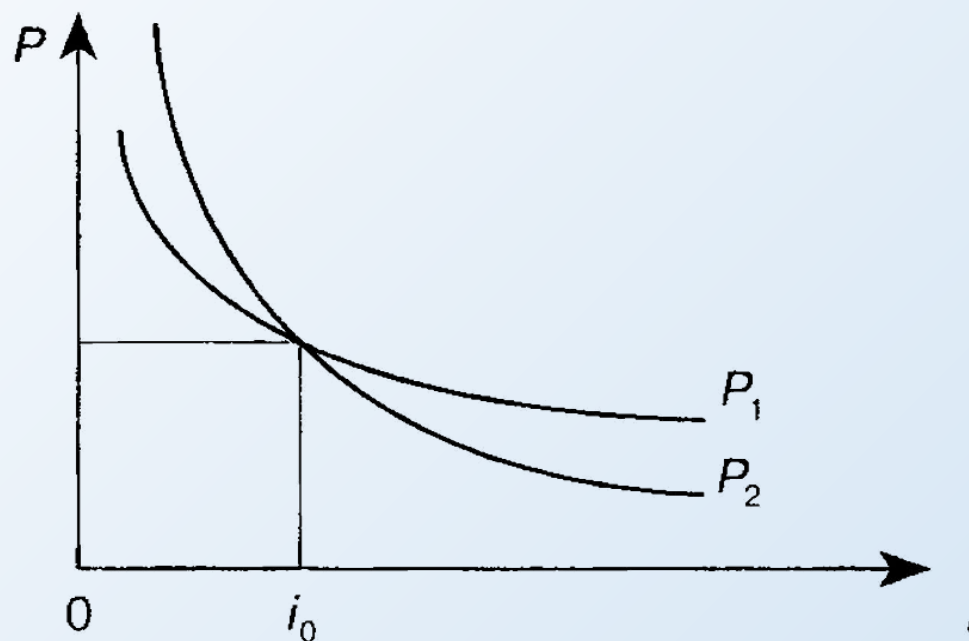
- путем дисконтирования суммы платежа (к более ранней дате)
- путем наращивания суммы платежа (к будущей дате)

Суммы  $S_1$  и  $S_2$ , выплачиваемые в разные моменты времени, считаются **эквивалентными**, если их современные (или наращенные) **величины**, рассчитанные по одной и той же процентной ставке и на один момент времени, **одинаковы**.



# Финансовая эквивалентность обязательств и конверсия платежей

Сравниваются два платежа  $S_1$  и  $S_2$  со сроками  $n_1$  и  $n_2$  причем  $S_1 < S_2$  и  $n_1 < n_2$ .



$i_0$  – критическая или барьерная ставка.

## Финансовая эквивалентность обязательств и конверсия платежей

Если  $i_0$  – критическая или барьерная ставка, на основе равенства

$$\frac{S_1}{1 + n_1 i_0} = \frac{S_2}{1 + n_2 i_0}$$

можно найти:

$$i_0 = \frac{S_1 - \frac{S_1}{S_2}}{\frac{S_1}{S_2} n_2 - n_1}$$

## Финансовая эквивалентность обязательств и конверсия платежей

Если дисконтирование производится по сложной ставке, то критическую ставку найдем из равенства

$$S_1(1 + i_0)^{-n_1} = S_2(1 + i_0)^{-n_2}$$

В итоге получим:

$$i_0 = \sqrt[n_2 - n_1]{\frac{S_2}{S_1}} - 1$$

## Консолидирование (объединение) задолженности

Принцип **финансовой эквивалентности** платежей применяется при различных изменениях условий выплат денежных сумм: их объединении, изменении сроков (досрочном погашении задолженности или, наоборот, пролонгировании срока) и т.п.

Общий метод – разработка **уравнения эквивалентности** (*equation of value*): сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо моменту времени, приравнивается к сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате.

## Консолидирование (объединение) задолженности

Исходные данные для задачи консолидации платежей:

Пусть платежи  $S_1, S_2, \dots, S_m$  со сроками  $n_1, n_2, \dots, n_m$  заменяются одним в сумме  $S_0$  и сроком  $n_0$ .

В этом случае возможны две постановки задачи:

- если задается срок  $n_0$ , то находится сумма  $S_0$ ;
- если задана сумма консолидированного платежа  $S_0$ , то определяется срок  $n_0$ .

## Определение размера консолидированного платежа

В общем случае, когда  $n_1 < n_2 < \dots < n_m$ .

Простые процентные ставки:

$$S_0 = \sum_j S_j (1 + t_j i) + \sum_k S_k (1 + t_k i)^{-1}$$

где  $S_j$  – размеры объединяемых платежей со сроками  $n_j < n_0$ ;

$S_k$  – размеры платежей со сроками  $n_k > n_0$ ;

$$t_j = n_0 - n_j, \quad t_k = n_k - n_0.$$

## Определение размера консолидированного платежа

В общем случае, когда  $n_1 < n_2 < \dots < n_m$ .

Сложные процентные ставки:

$$S_0 = \sum S_j (1 + i)^{t_j} + \sum_k S_k (1 + i)^{-t_k}$$

## Определение срока консолидированного платежа

Представим уравнение эквивалентности в виде равенства **современных стоимостей** платежей.

Простые процентные ставки:

$$S_0(1 + n_0 i)^{-1} = \sum_j S_j(1 + n_j i)^{-1}$$

Откуда получаем:

$$n_0 = \frac{1}{i} \left( \frac{S_0}{\sum S_j(1 + n_j i)^{-1}} - 1 \right)$$



## Определение срока консолидированного платежа

Уравнение эквивалентности для сложны ставок:

$$S_0(1 + i)^{-n_0} = \sum_j S_j(1 + i)^{-n_j}$$

Для упрощения примем

$$Q = \sum S_j(1 + i)^{-n_j}$$

После чего находим

$$n_0 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{Q}\right)}{\ln(1 + i)}$$

## Общая постановка задачи изменения условий контракта

Если приведение платежей осуществляется на некоторую начальную дату, то получим следующие уравнения эквивалентности в общем виде:

○ при использовании простых процентов:

$$\sum_j S_j(1 + n_j i) = \sum_k S_k(1 + n_k i);$$

○ при использовании сложных процентов:

$$\sum_j S_j v^{n_j} = \sum_k S_k v^{n_k}$$

где  $S_j$  и  $n_j$  – параметры заменяемых платежей;  
 $S_k$  и  $n_k$  – параметры заменяющих платежей.

## Налог на полученные проценты

В ряде случаев полученные проценты облагаются налогом, что, естественно, уменьшает реальную наращенную сумму и доходность депозитной операции.

При начислении налога на проценты возможны два варианта:

- 1) налог начисляется за весь срок сразу, т.е. на всю сумму процентов
- 2) налог начисляется последовательно по периодам, например в конце каждого года.

## Налог на полученные проценты

При начислении простых процентов за весь срок:

$$G = Pni g$$

$$S'' = S - (S - P)g = P[1 + n(1 - g)i]$$

где  $S''$  – наращенная сумма с учетом выплат налогов;  
 $g$  – ставка налога на проценты.

## Налог на полученные проценты

При начислении сложных процентов за весь срок:

$$G = (S - P)g = P[(1 + i)^n - 1]g$$

Наращенная сумма после выплаты налога составит

$$S'' = S - G = P[(1 - g)(1 + i)^n + g]$$

## Налог на полученные проценты

Васчитаем налог на проценты за  $t$ -й год:

$$G_t = (S_t - S_{t-1})g = P(1 + i)^{t-1} \cdot i \cdot g$$

За весь срок сумма налогов равна полученной выше величине:

$$\sum_t G_t = \sum_t P(1 + i)^{t-1} \cdot i \cdot g = P[(1 + i)^n - 1]g = G$$

# Инфляция

- Инфляцию необходимо учитывать в двух случаях:
- при расчете наращенной суммы денег
  - при измерении реальной эффективности (доходности) финансовой операции

Введем обозначения:

$S$  – наращенная сумма денег, измеренная по номиналу

$C$  – наращенная сумма с учетом ее обесценения

$J_p$  – индекс цен

$J_c$  – индекс, характеризующий изменение покупательной способности денег за период

# Инфляция

В общем виде очевидно, что:

$$C = S \cdot J_c$$

Индекс покупательной способности денег равен обратной величине индекса цен:

$$J_c = \frac{1}{J_p}$$

Указанные индексы, естественно, должны относиться к **одинаковым интервалам времени.**



# Инфляция

Под **темпом инфляции  $h$**  понимается относительный прирост цен за период; обычно он измеряется в процентах и определяется как:

$$h = 100 (J_p - 1)$$

$$J_p = \left( 1 + \frac{h}{100} \right)$$

# Инфляция

Индекс цен за несколько периодов равен **произведению** цепных индексов цен:

$$J_p = \prod_1^n \left( 1 + \frac{h_t}{100} \right)$$

Если  $h$  - постоянный ожидаемый (или прогнозируемый) темп инфляции за один период, то

$$J_p = \left( 1 + \frac{h}{100} \right)^n$$

# Инфляция

Если наращение производится по простой ставке, то наращенная сумма с учетом покупательной способности равна:

$$C = \frac{S}{J_p} = P \frac{1 + ni}{J_p} = P \frac{1 + ni}{\left(1 + \frac{h}{100}\right)^n}$$

Увеличение наращенной суммы с учетом ее инфляционного обесценения имеет место только тогда, когда  $1 + ni > J_p$ .

# Инфляция

Увеличенная сумма сложных процентов с учетом инфляционного обесценивания находится как:

$$C = \frac{S}{J_p} = P \frac{(1 + i)^n}{J_p} = P \left( \frac{1 + i}{1 + \frac{h}{100}} \right)^n$$

Если среднегодовой темп инфляции равен процентной ставке, то **роста реальной суммы не произойдет.**

Если  $h/100 > i$ , то наблюдается «**эрозия**» капитала.

Если  $h/100 < i$ , происходит **реальный рост, реальное накопление.**

# Инфляция

При простых процентах ставка, компенсирующая влияние инфляции, соответствует величине:

$$i' = \frac{J_p - 1}{n}$$

Ставку, превышающую **критическое значение**  $i'$  (при начислении сложных процентов  $i' = h$ ), называют **положительной ставкой процента**.

# Инфляция

**Брутто-ставка** («номинальная» ставка) – процентная ставка, скорректированная (увеличенная) на величину так называемой **инфляционной премии**.

По сложным процентам:

$$1 + r = (1 + i) \left( 1 + \frac{h}{100} \right)$$

$$r = i + \frac{h}{100} + i \frac{h}{100}$$

$$r = i + \frac{h}{100}$$

# Инфляция

Если  $r$  объявленная норма доходности (или брутто-ставка), то реальный показатель доходности в виде годовой процентной ставки  $i$ :

$$i = \frac{1 + r}{1 + \frac{h}{100}} - 1$$

Для простых процентов:

$$i = \frac{1}{n} \left( \frac{1 + nr}{J_p} - 1 \right)$$



## Кривые доходности

Для практика важно представить себе закономерность изменения величины доходности (или процентных ставок, используемых в однородных по содержанию операциях), в зависимости от некоторых факторов. Наиболее важным из них является риск невозврата вложенных средств.

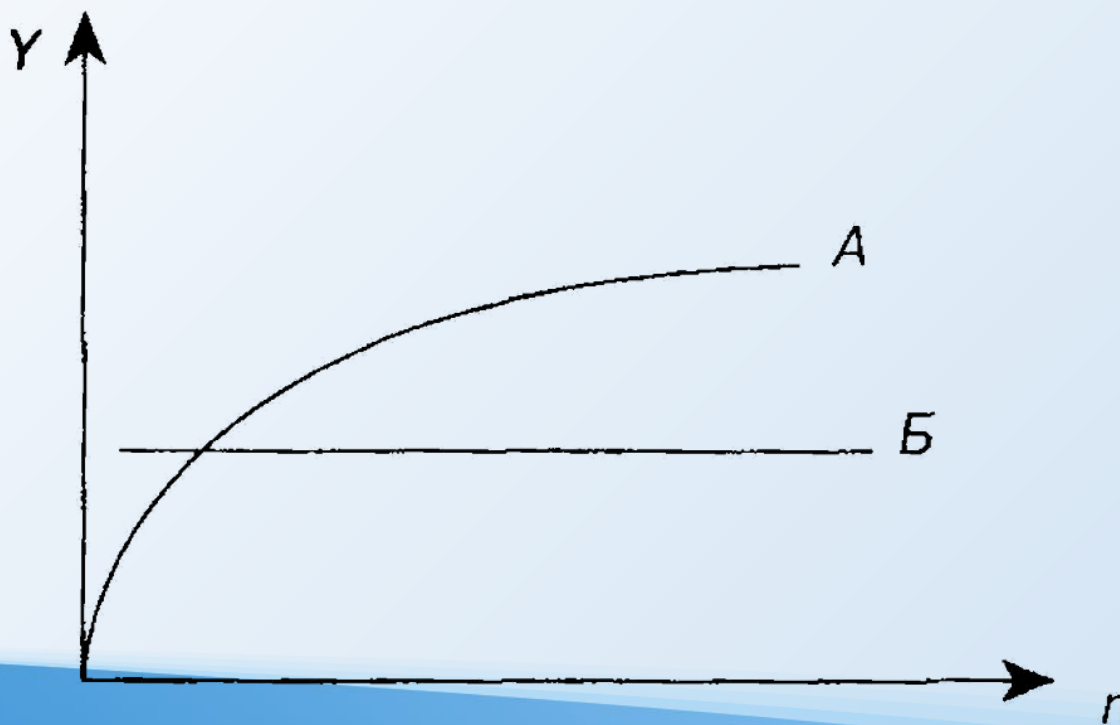
Подобный риск существенно зависит от срока ссуды.

Таким образом, зависимость «доходность – риск» приближенно можно охарактеризовать с помощью зависимости «доходность – срок».



## Кривые доходности

- графическая зависимость (кривая зависимости) доходности по однородным финансовым операциям от их сроков.



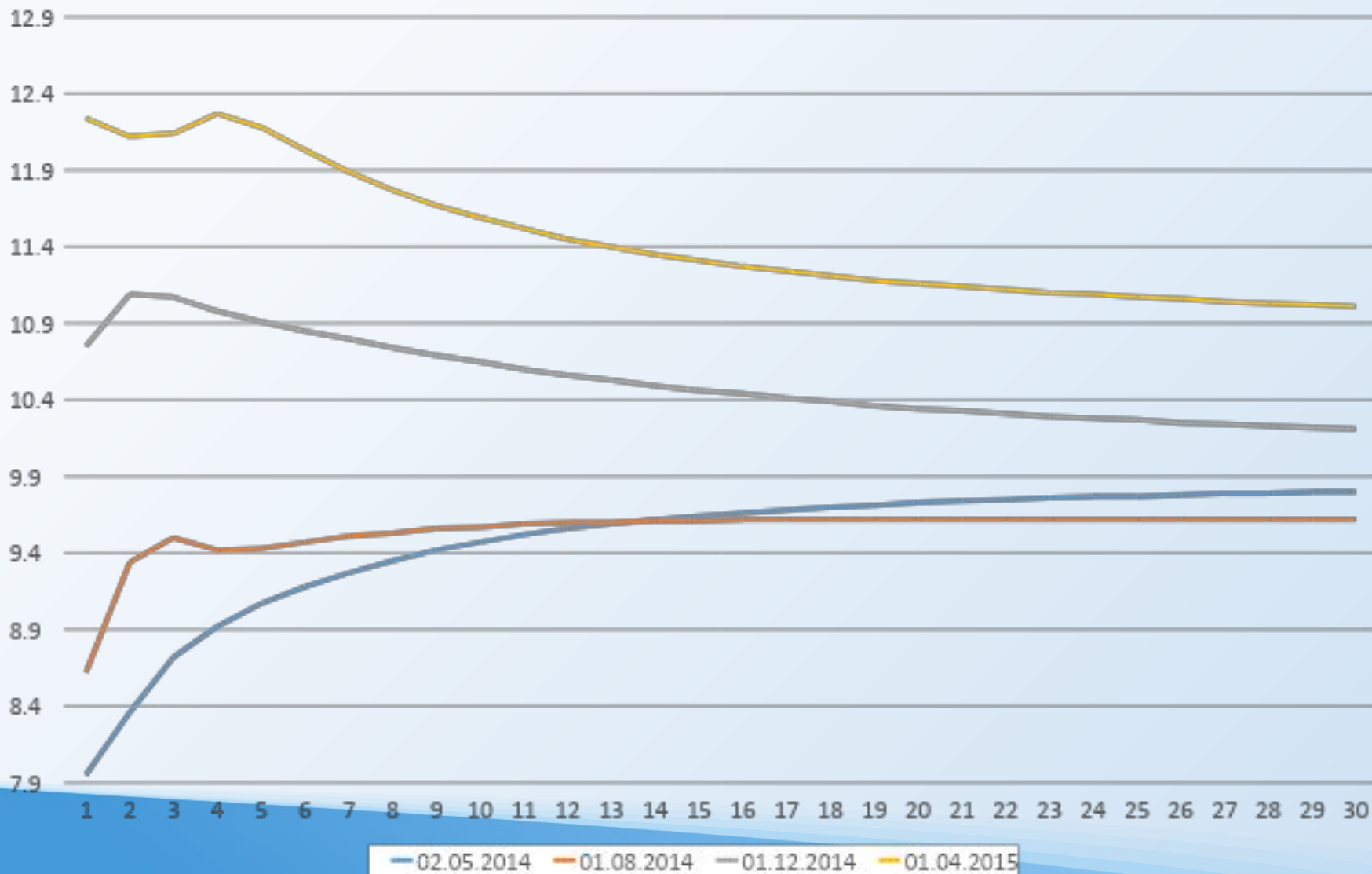
## Кривые доходности

Для нормальных экономических условий: доходность ( $Y$ ) растет по мере увеличения срока, но каждая следующая единица прироста срока дает все меньшее увеличение доходности – **положительная (нормальная) кривая доходности (positive, normal yield curve)**.

«**Отрицательные**» **кривые доходности** – уменьшение доходности финансового инструмента по мере роста срока.

«**Сгорбленные**» **кривые доходности** – падение доходности после некоторого ее роста.

# Кривые доходности облигаций федерального займа (ОФЗ)



Спасибо за внимание!