Производные процентные расчеты.
Кривые доходности.

Средние процентные ставки

Пусть за периоды $n_1, n_2, \dots, n_k$ начисляются простые проценты по ставкам $i_1, i_2, \dots, i_k$.

Приравниваем множители наращения:

$$1 + N\bar{i} = 1 + \sum_t n_t i_t$$

Откуда получаем:

$$\bar{i} = \frac{\sum n_t i_t}{N}$$

Средняя учетная ставка:

$$\bar{d} = \frac{\sum n_t d_t}{N}$$

Средние процентные ставки

Если усредняются сложные переменные во времени ставки сложных процентов.

Приравняем множители наращения:

$$(1+\bar{i})^{N} = (1+i_1)^{n_2}(1+i_2)^{n_2}$$

Откуда получим:

$$\bar{i} = \sqrt[N]{(1+i_1)^{n_2}(1+i_2)^{n_2}\ldots} - 1$$

Средние процентные ставки

Усреднение ставок, применяемых в нескольких однородных операциях, которые различаются суммами ссуд и процентными ставками.

Если применяются простые ставки и **сроки одинаковы**:

$$\sum P_t(1 + n\bar{i}) = \sum P_t(1 + ni_t)$$

Средняя ставка:

$$\bar{i} = \frac{\sum P_t i_t}{\sum P_t}$$

Средние процентные ставки

Усреднение сложных ставок для однородных ссудных операций.

Пусть **сроки** операций **одинаковы** (n). Из равенства соответствующих множителей наращения следует:

$$\bar{i} = \sqrt[n]{\frac{\sum P_t (1 + i_t)^n}{\sum P_t}} - 1$$

Эквивалентность процентных ставок

Эквивалентные ставки – ставки, которые приводят к одинаковым финансовым результатам;

ставки, замена которых друг на друга не изменяет финансовых отношений (обязательств) сторон в рамках одной операции.

Формулы эквивалентности ставок во всех случаях получим исходя из равенства взятых попарно множителей наращения.

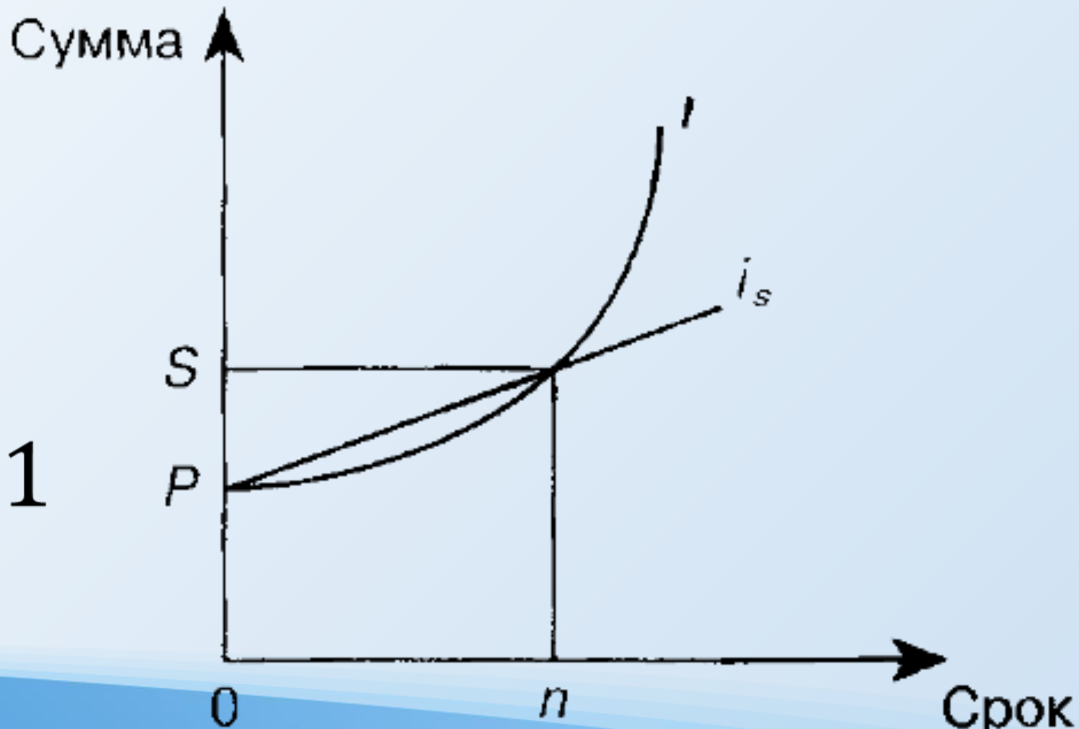
Эквивалентность простой и сложной процентных ставок

Равенство множителей наращения:

$$(1 + ni_s) = (1 + i)^n$$

$$i_s = \frac{(1+i)^n - 1}{n}$$

$$i = \sqrt[n]{1 + ni_s} - 1$$



Эквивалентность простых процентных ставок

Если временные базы одинаковы:

$$i_s = \frac{d_s}{1 - nd_s}$$

$$d_s = \frac{i_s}{1 + ni_s}$$

где n – срок в годах;

i_s – ставка простых процентов;

d_s – простая учетная ставка.

Эквивалентность простых процентных ставок

Пусть срок ссуды измеряется в днях ($n = t/K$):

- временные базы одинаковы и равны 360 дням:

$$i_s = \frac{360d_s}{360 - td_s}$$

$$d_s = \frac{360i_s}{360 + ti_s}$$

- база начисления – 360 дней, учетная база – 360 дней:

$$i_s = \frac{365d_s}{360 - td_s}$$

$$d_s = \frac{360i_s}{365 + ti_s}$$

Эквивалентность простых и сложных процентных ставок

Эквивалентность i_s и j:

$$i_s = \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{n}$$

$$j = m\left(\sqrt[mn]{1 + ni_s} - 1\right)$$

Эквивалентность
простых и сложных процентных ставок

- Эквивалентность d_s и i:

$$d_s = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{n}$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{1}{1 - nd_s}} - 1$$

Эквивалентность
простых и сложных процентных ставок

Эквивалентность d_s и j:

$$d_s = \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{n}$$

$$j = m\left(\sqrt[mn]{\frac{1}{1 - nd_s}} - 1\right)$$

Эквивалентность сложных процентных ставок

Эквивалентность i и j:

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$$

$$j = m\left(\sqrt[m]{1 + i} - 1\right)$$

Эквивалентность i и d:

$$i = \frac{d}{1 - d}$$

$$d = \frac{i}{1 + i}$$

Эквивалентность сложных процентных ставок

Примем обозначение множителя дисконтирования (дисконтного множителя):

$$v = (1 + i)^{-1}$$

Тогда:

$$d = iv$$

$$v = 1 - d$$

$$i - d = id$$

Эквивалентность
сложных дискретных и непрерывных ставок

Эквивалентность δ и i:

$$j = m\left(e^{\delta/m} - 1\right)$$

$$\delta = m \cdot \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)$$

Эквивалентность δ и d:

$$\delta = -\ln(1 - d)$$

$$d = 1 - e^{-\delta}$$

Финансовая эквивалентность обязательств и конверсия платежей

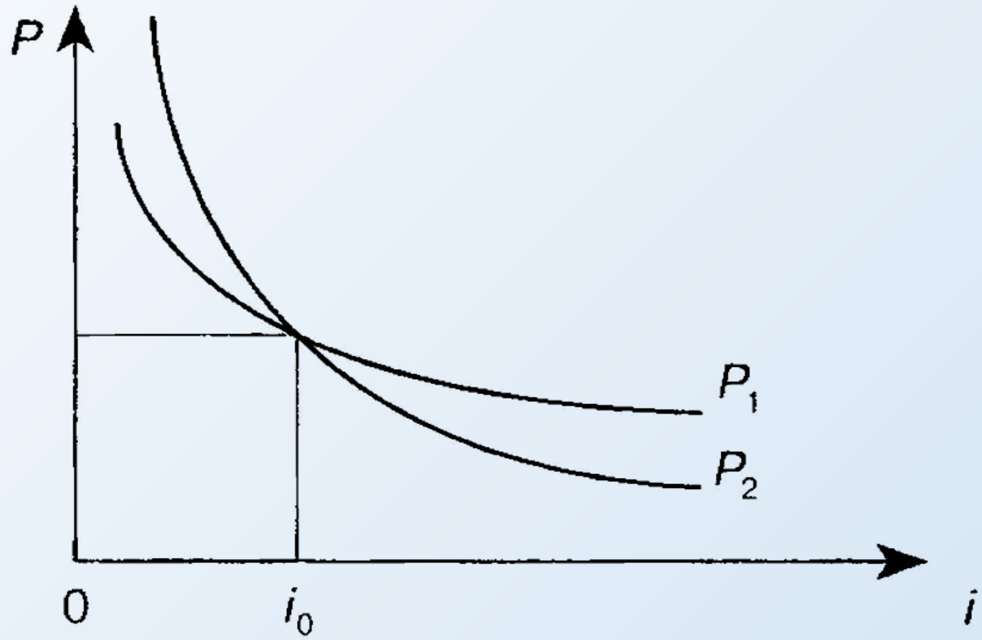
Эквивалентными считаются такие платежи, которые, будучи «приведенными» к одному моменту времени (*focal date*), оказываются равными:

- путем дисконтирования суммы платежа (к более ранней дате)
- путем наращения суммы платежа (к будущей дате)

Суммы S_1 и S_2, выплачиваемые в разные моменты времени, считаются ***эквивалентными***, если их современные (или наращенные) ***величины***, рассчитанные по одной и той же процентной ставке и на один момент времени, ***одинаковы***.

Финансовая эквивалентность обязательств и конверсия платежей

Сравниваются два платежа S_1 и S_2 со сроками n_1 и n_2 причем $S_1 < S_2$ и $n_1 < n_2$.



i_0 – ***критическая*** или ***барьерная ставка.***

Финансовая эквивалентность обязательств и конверсия платежей

Если i_0 – критическая или барьерная ставка, на основе равенства

$$\frac{S_1}{1+n_1 i_0} = \frac{S_2}{1+n_2 i_0}$$

можно найти:

$$i_0 = \frac{S_1 - \frac{S_1}{S_2}}{\frac{S_1}{S_2} n_2 - n_1}$$

Финансовая эквивалентность обязательств и конверсия платежей

- Если дисконтирование производится по сложной ставке, то критическую ставку найдем из равенства

$$S_1(1+i_0)^{-n_1} = S_2(1+i_0)^{-n_2}$$

В итоге получим:

$$i_0 = \sqrt[n_2-n_1]{\frac{S_2}{S_1}} - 1$$

Консолидирование (объединение) задолженности

Принцип ***финансовой эквивалентности*** платежей применяется при различных изменениях условий выплат денежных сумм: их объединении, изменении сроков (досрочном погашении задолженности или, наоборот, пролонгировании срока) и т.п.

Общий метод – разработка **уравнения эквивалентности** (***equation of value***): сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо моменту времени, приравнивается к сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате.

Консолидирование (объединение) задолженности

- Исходные данные для задачи консолидации платежей:

  Пусть платежи $S_1, S_2, \dots, S_m$ со сроками $n_1, n_2, \dots, n_m$ заменяются одним в сумме S_0 и сроком n_0.

В этом случае возможны две постановки задачи:

- если задается срок n_0, то находится сумма S_0;
- если задана сумма консолидированного платежа S_0, то определяется срок n_0.

Определение размера консолидированного платежа

В общем случае, когда $n_1 < n_2 < \cdots < n_m$.

Простые процентные ставки:

$$S_0 = \sum_j S_j(1 + t_j i) + \sum_k S_k(1 + t_k i)^{-1}$$

где S_j – размеры объединяемых платежей со сроками $n_j < n_0$;

S_k – размеры платежей со сроками $n_k > n_0$;

$$t_j = n_0 - n_j, \qquad t_k = n_k - n_0.$$

Определение размера консолидированного платежа

В общем случае, когда $n_1 < n_2 < \cdots < n_m$.

Сложные процентные ставки:

$$S_0 = \sum S_j (1+i)^{t_j} + \sum_k S_k (1+i)^{-t_k}$$

Определение срока консолидированного платежа

- Представим уравнение эквивалентности в виде равенства ***современных стоимостей*** платежей.

Простые процентные ставки:

$$S_0(1+n_0 i)^{-1} = \sum_j S_j(1+n_j i)^{-1}$$

Откуда получаем:

$$n_0 = \frac{1}{i}\left(\frac{S_0}{\sum S_j(1+n_j i)^{-1}} - 1\right)$$

Определение срока консолидированного платежа

Уравнение эквивалентности для сложны ставок:

$$S_0(1+i)^{-n_0} = \sum_j S_j(1+i)^{-n_j}$$

Для упрощения примем

$$Q = \sum S_j(1+i)^{-n_j}$$

После чего находим

$$n_0 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{Q}\right)}{\ln(1+i)}$$

Общая постановка задачи изменения условий контракта

Если приведение платежей осуществляется на некоторую начальную дату, то получим следующие уравнения эквивалентности в общем виде:

- при использовании простых процентов:

$$\sum_j S_j(1+n_j i) = \sum_k S_k(1+n_k i);$$

- при использовании сложных процентов:

$$\sum_j S_j v^{n_j} = \sum_k S_k v^{n_k}$$

где S_j и n_j – параметры заменяемых платежей;

S_k и n_k – параметры заменяющих платежей.

Налог на полученные проценты

В ряде случаев полученные проценты облагаются налогом, что, естественно, уменьшает реальную наращенную сумму и доходность депозитной операции.

При начислении налога на проценты возможны два варианта:

1) налог начисляется за весь срок сразу, т.е. на всю сумму процентов
2) налог начисляется последовательно по периодам, например в конце каждого года.

Налог на полученные проценты

При начислении простых процентов за весь срок:

$$G = Pnig$$

$$S'' = S - (S - P)g = P[1 + n(1 - g)i]$$

где S'' – наращенная сумма с учетом выплат налогов;

g – ставка налога на проценты.

Налог на полученные проценты

При начислении сложных процентов за весь срок:

$$G = (S - P)g = P[(1 + i)^n - 1]g$$

Наращенная сумма после выплаты налога составит

$$S'' = S - G = P[(1 - g)(1 + i)^n + g]$$

Налог на полученные проценты

Рассчитаем налог на проценты за t-й год:

$$G_t = (S_t - S_{t-1})g = P(1+i)^{t-1} \cdot i \cdot g$$

За весь срок сумма налогов равна полученной выше величине:

$$\sum_t G_t = \sum P(1+i)^{t-1} \cdot i \cdot g = P[(1+i)^n - 1]g = G$$

Инфляция

Инфляцию необходимо учитывать в двух случаях:

- при расчете наращенной суммы денег
- при измерении реальной эффективности (доходности) финансовой операции

Введем обозначения:

S – наращенная сумма денег, измеренная по номиналу

C – наращенная сумма с учетом ее обесценения

J_p – индекс цен

J_c – индекс, характеризующий изменение покупательной способности денег за период

Инфляция

В общем виде очевидно, что:

$$C = S \cdot J_c$$

Индекс покупательной способности денег равен обратной величине индекса цен:

$$J_c = \frac{1}{J_p}$$

Указанные индексы, естественно, должны относиться к ***одинаковым интервалам времени***.

Инфляция

- Под ***темпом инфляции h*** понимается относительный прирост цен за период; обычно он измеряется в процентах и определяется как:

$$h = 100\left(J_p - 1\right)$$

$$J_p = \left(1 + \frac{h}{100}\right)$$

Инфляция

- Индекс цен за несколько периодов равен ***произведению*** цепных индексов цен:

$$J_p = \prod_{1}^{n} \left(1 + \frac{h_t}{100}\right)$$

Если h - постоянный ожидаемый (или прогнозируемый) темп инфляции за один период, то

$$J_p = \left(1 + \frac{h}{100}\right)^n$$

Инфляция

- Если наращение производится по простой ставке, то наращенная сумма с учетом покупательной способности равна:

$$C = \frac{S}{J_p} = P\frac{1+ni}{J_p} = P\frac{1+ni}{\left(1+\frac{h}{100}\right)^n}$$

Увеличение наращенной суммы с учетом ее инфляционного обесценения имеет место только тогда, когда $\boldsymbol{1+ni > J_p}$.

Инфляция

- Наращенная сумма сложных процентов с учетом инфляционного обесценивания находится как:

$$C = \frac{S}{J_p} = P\frac{(1+i)^n}{J_p} = P\left(\frac{1+i}{1+\frac{h}{100}}\right)^n$$

Если среднегодовой темп инфляции равен процентной ставке, то ***роста реальной суммы не произойдет.***

Если $h/100 > i$, то наблюдается ***«эрозия» капитала.***

Если $h/100 < i$, происходит ***реальный рост, реальное накопление.***

Инфляция

- При простых процентах ставка, компенсирующая влияние инфляции, соответствует величине:

$$i' = \frac{J_p - 1}{n}$$

Ставку, превышающую ***критическое значение i'*** (при начислении сложных процентов $i' = h$), называют **положительной ставкой процента**.

Инфляция

- ***Брутто-ставка*** («номинальная» ставка) – процентная ставка, скорректированная (увеличенная) на величину так называемой ***инфляционной премии***.

По сложным процентам:

$$1 + r = (1 + i)\left(1 + \frac{h}{100}\right)$$

$$r = i + \frac{h}{100} + i\frac{h}{100}$$

$$r = i + \frac{h}{100}$$

Инфляция

- Если r объявленная норма доходности (или брутто-ставка), то реальный показатель доходности в виде годовой процентной ставки i:

$$i = \frac{1+r}{1+\frac{h}{100}} - 1$$

Для простых процентов:

$$i = \frac{1}{n}\left(\frac{1+nr}{J_p} - 1\right)$$

Кривые доходности

Для практика важно представить себе закономерность изменения величины доходности (или процентных ставок, используемых в однородных по содержанию операциях), в зависимости от некоторых факторов.

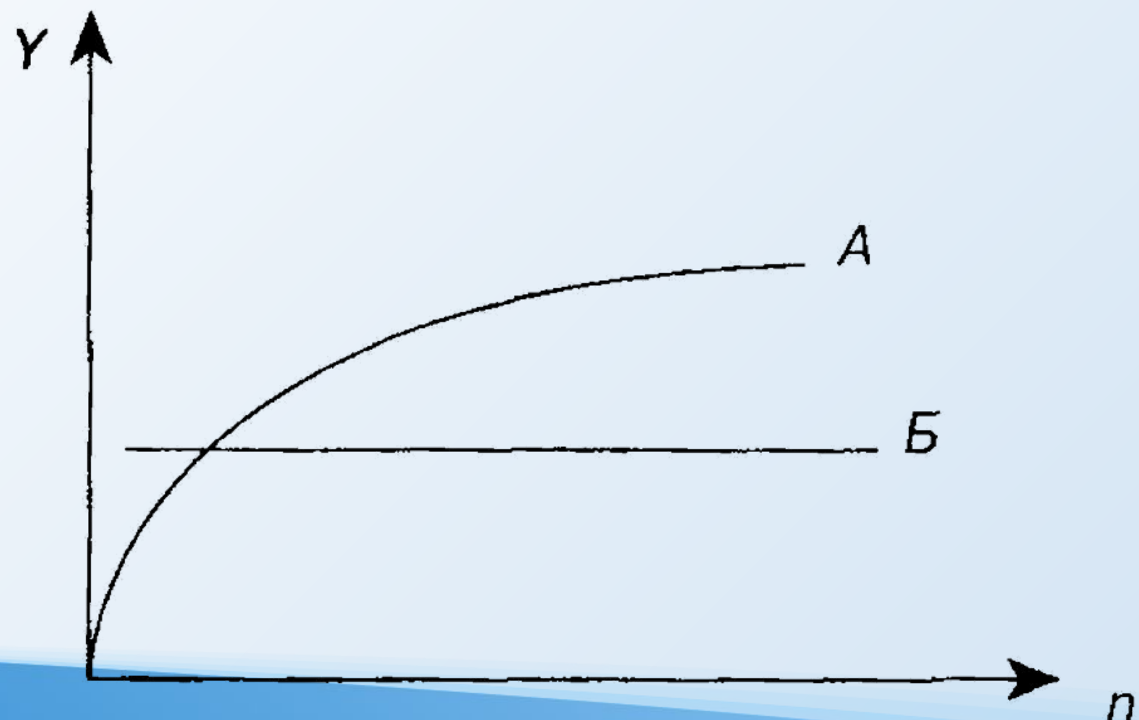
Наиболее важным из них является риск невозврата вложенных средств.

Подобный риск существенно зависит от срока ссуды.

Таким образом, зависимость «доходность – риск» приближенно можно охарактеризовать с помощью зависимости «доходность – срок».

Кривые доходности

– графическая зависимость (кривая зависимости) доходности по однородным финансовым операциям от их сроков.



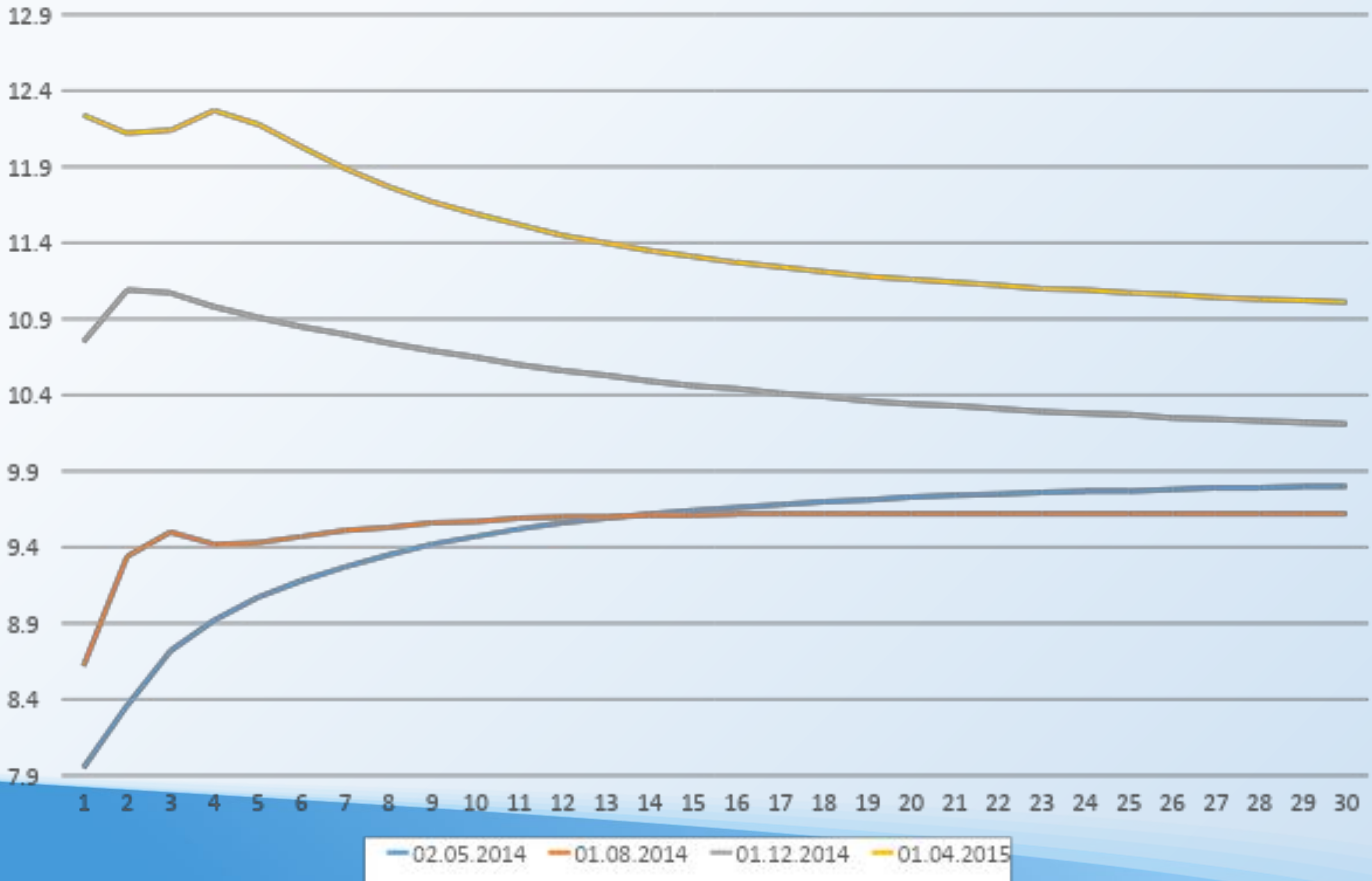
Кривые доходности

- Для нормальных экономических условий: доходность (Y) растет по мере увеличения срока, но каждая следующая единица прироста срока дает все меньшее увеличение доходности – ***положительная (нормальная) кривая доходности (positive, normal yield curve).***

«Отрицательные» кривые доходности – уменьшение доходности финансового инструмента по мере роста срока.

«Сгорбленные» кривые доходности – падение доходности после некоторого ее роста.

Кривые доходности облигаций федерального займа (ОФЗ)



Спасибо за внимание!