РГСУ

Математика

Математический анализ. Функции. Пределы. Непрерывность.

Последовательности

- **Определение.** Если каждому $n \in N$ поставлено в соответствие по определенному закону некоторое действительное число a_n , то множество занумерованных чисел

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \qquad \text{или } \{a_n\}$$

называется **числовой последовательностью**, a_n - общий член последовательности.

Примеры:

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \quad a_n = \frac{1}{n}$ - общий член последовательности

2. арифметическая прогрессия: $a_n = a_1 + d(n-1)$, где d – разность прогрессии

$a_n = a_{n-1} + d$ – рекуррентная формула арифметической прогрессии.

3. геометрическая прогрессия: $b_n = b_1 q^{n-1}$, где q – знаменатель прогрессии

$b_n = b_{n-1} \cdot q$ – рекуррентная формула геометрической прогрессии.

Предел последовательности

- **Определение.** Число А называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного ε существует число $n_0(\varepsilon)$ такое, что $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$, и обозначается

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{или} \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \; \textit{такое, что} \; \forall n \geq n_0 : \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

Здесь и далее используем обозначения: $\forall$ - для любого, $\exists$ - существует.

Пример.

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Возьмем, например, $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, тогда $n_0 = 1001$ и при $n \geq 1001$ $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{1000}$

Предел последовательности

1. Последовательность, у которой существует предел, называется сходящейся.
2. Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется расходящейся.
3. Теорема: если последовательность имеет предел, то он единственный.
4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то последовательность называется бесконечно малой.

5. Если для любого сколь угодно большого положительного A существует число $n_0(A)$ такое, что $\forall n \geq n_0(A)$ выполняется неравенство $|a_n| > A$, то последовательность называется бесконечно большой и это обозначается как:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{или} \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Предел последовательности

6. Последовательность называется неубывающей (невозрастающей), если $\forall n$ выполняется неравенство $a_n \le a_{n+1} (a_n \ge a_{n+1})$. Такие последовательности называются монотонными.

Последовательность называется возрастающей (убывающей), если $\forall n$ выполняется неравенство $a_n < a_{n+1} (a_n > a_{n+1})$. Такие последовательности называются строго монотонными.

7. Последовательность называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое С, что $\forall n$ выполняется неравенство $a_n \le C (a_n \ge C)$. Если последовательность ограничена и сверху и снизу называется ограниченной.

8. Сходящаяся последовательность ограничена.

9. Теорема. Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Число e

Можно доказать, что последовательность $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ является возрастающей и ограниченной и, следовательно, имеет предел.

Определение. Числом e или числом Эйлера называется предел последовательности $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$e \approx 2,718281828459045\ldots$$

Число e – иррациональное и трансцендентное, т.е. оно не является корнем многочлена с целочисленными

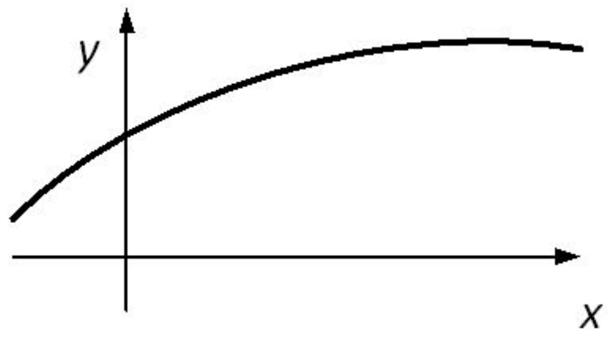
Функции

Определение. Если каждому элементу х из множества $D \subset R$ по некоторому правилу соответствует единственный элемент у из множества $E \subset R$, то говорят, что на множестве D задана **функция** $y = f(x)$ переменной x.

$$\forall x \in D \subset R \xrightarrow{f} y \in E \subset R \Leftrightarrow y = f(x)$$

D(f) – область определения, E(f) – область значения функции.

Определение. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости Оху с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D$.



Основные элементарные функции

1. Степенные функции: $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$.
2. Показательные функции: $y = a^{x}, a > 0, a \neq 1$.
3. Логарифмические функции: $y = log_{a}x, a > 0, a \neq 1$.
4. Тригонометрические функции: $y = sinx, y = cosx, y = tgx, y = ctgx$.
5. Обратные тригонометрические функции: $y = arcsinx, y = arccosx, y = arctgx, y = arcctgx$.

Задание: повторить свойства элементарных функций, графики.

Предел функции в точке

- Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Выберем точку $x_0 \in R$.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к точке x_0:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

Определение. Число А называется **пределом функции (по Гейне)** $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 и состоящей из чисел, отличных от x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу А:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \text{ если } \forall \{x_n\}:\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0,\ x_n \neq x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A$$

Предел функции в точке

- Определение. Число А называется пределом функции (по Коши) $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого сколь угодно малого положительного ε существует положительное число δ, зависящее от ε, такое, что для любого $x \in D$, удовлетворяющего неравенству 0<$|x - x_0|$< δ справедливо неравенство $|f(x) - A|$< ε.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall x \in D, \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Замечание. Неравенство 0<$|x - x_0|$< δ определяет δ-окрестность точки x_0.

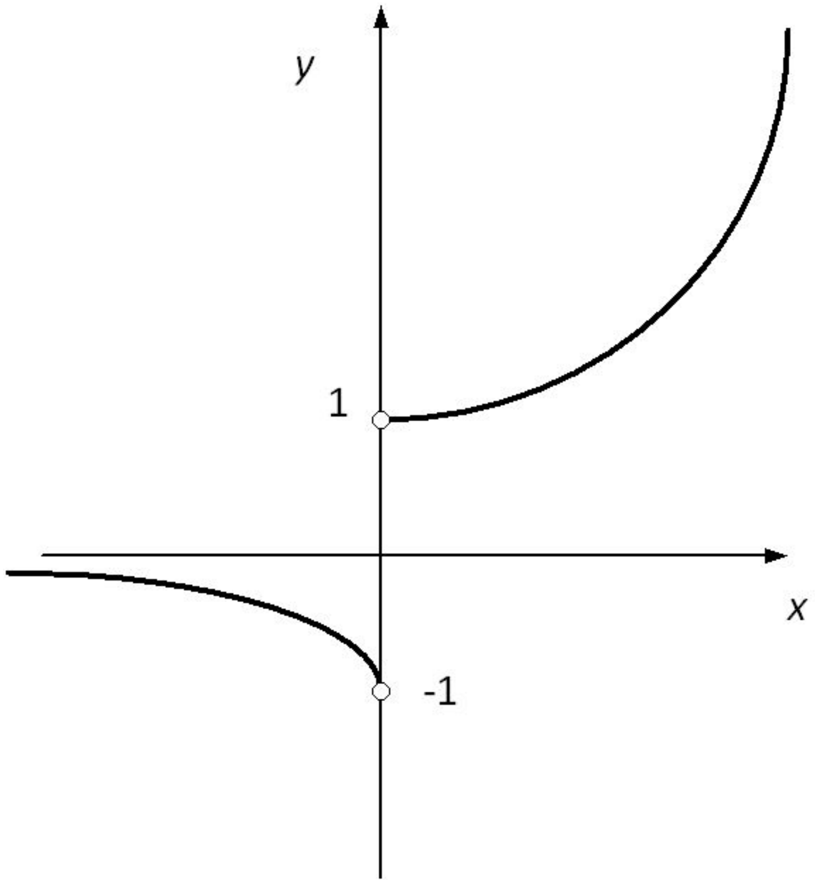
Предел функции в точке

Теорема. Определения предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.

А может ли функция не иметь предела?

Пример 1. $y = \frac{|x|}{x} 2^x, \qquad D = \{x \in R : x \neq 0\}$

$$y = \left[\begin{array}{ll} 2^x, & x > 0 \\ -2^x, & x < 0 \end{array}\right.$$



Односторонние пределы

Определение (*по Коши*). Число A называется *левым* [*правым*] *пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого сколь угодно малого положительного ε существует положительное δ, зависящее от ε, такое, что для любого $x \in D$, удовлетворяющего неравенству $x_0 - \delta < x < x_0$ $[x_0 < x < x_0 + \delta]$ справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall x \in D, \; x_0 - \delta < x < x_0 \; [x_0 < x < x_0 + \delta] \Rightarrow \; |f(x) - A| < \varepsilon$$

Обозначение:

$A = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ – левый предел, $A = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$ – правый предел.

Односторонние пределы

Пример 1(продолжение). $\lim\limits_{x\to -0}\frac{|x|}{x}2^x = -1$, $\lim\limits_{x\to +0}\frac{|x|}{x}2^x = 1$

Теорема.

Функция имеет предел в точке $x = x_0$ равный A тогда и только тогда, когда в этой точке существуют левый и правый пределы и они равны A.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad A = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Предел в бесконечно удаленной точке

Определение. Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ при $x \to \infty$ $(x \to +\infty,$ $x \to -\infty)$, если для любого сколь угодно малого положительного ε существует положительное число Δ, зависящее от ε, такое, что для любого $x \in D$, удовлетворяющего неравенству $|x| > \Delta$ $(x > \Delta, \quad x < -\Delta)$ справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D, \ |x| > \Delta \ (x > \Delta, \quad x < -\Delta) \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

Обозначение:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \qquad \left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = A \right)$$

Если функция неограниченно возрастает при $x \to x_0$, то говорят, что предел равен ∞:

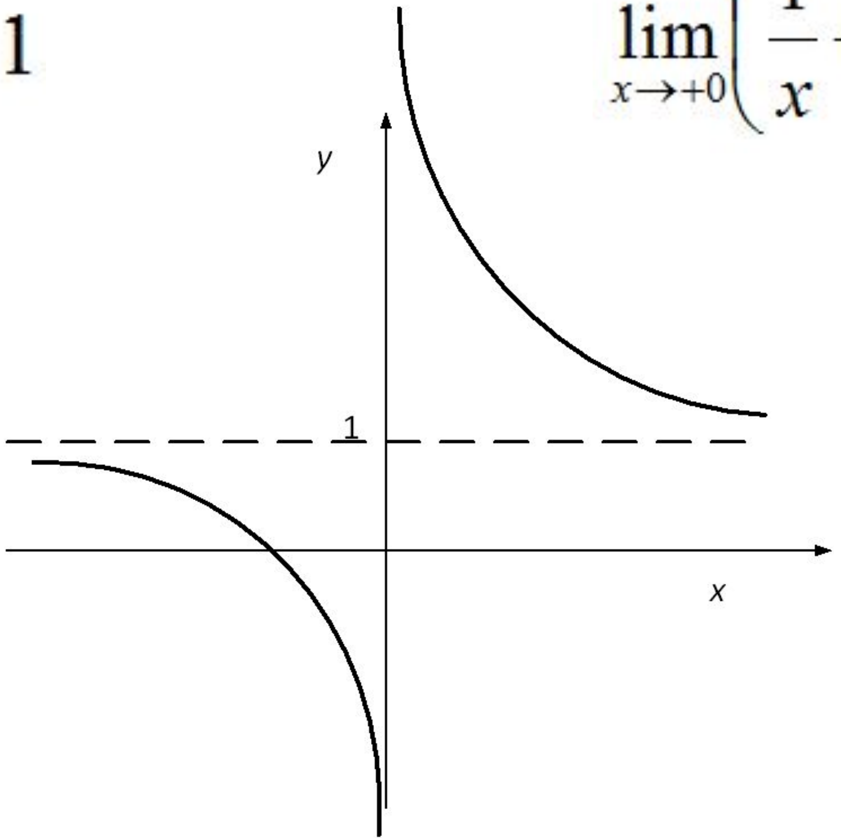
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Предел в бесконечно удаленной точке

Пример 2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)=1$$

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}+1\right)=+\infty,\quad \lim_{x\to-0}\left(\frac{1}{x}+1\right)=-\infty$$



СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ

Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, $C = const$.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} Cf(x) = C\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

4. Если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

5. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^k = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^k$, $k \in R$.

ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Правило 1. Если при замене x на x_0 под знаком предела получается некоторое ***конечное*** число A $(A = f(x_0))$, то оно и является пределом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Пример 3. $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[\frac{2^2 + 3}{2 - 1} \right] = \left[\frac{7}{1} \right] = 7$$

ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Правило 2.

Если $A = \left[\dfrac{C}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{C}\right]$, $[C \cdot \infty]$, $[\infty + \infty]$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Пример 4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[\dfrac{4}{0}\right] = \infty$

ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Правило 3.

Если $A=\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$, то говорят, что под знаком предела стоит неопределенность.

Вычисление предела сводится к «раскрытию неопределенности», т. е. к выполнению некоторых тождественных преобразований, позволяющих избавиться от неопределенности.

Пример 5.

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+6x-16}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{(x+8)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x+8)}{(x+2)}=\frac{10}{4}=2{,}5$$

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$$

Следствие.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$

Пример. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x+1)}{x+1}=1$

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Второй замечательный предел.

Теорема. Существует предел функц $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ пр $x\to\infty$ равный числу *e*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]=e\approx 2{,}72$$

Заменой $y=\frac{1}{x}$ получим $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$.

<u>Следствие.</u>

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=e$

Бесконечно малые функции

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \to x_0$. Тогда:

А) если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

Обозначение $\beta = o(\alpha)$ при $x \to x_0$.

Б) если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка.

Обозначение $\beta = O(\alpha)$ при $x \to x_0$.

В) если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными. Обозначение $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

Использование бесконечно малых для вычисления пределов

При вычислении пределов удобно использовать эквивалентность следующих бесконечно малых функций при x→0:

$sinx \sim x$

$cosx \sim 1-\frac{x^2}{2}$

$e^x \sim 1+x$

$tgx \sim x$

$\ln(1+x) \sim x$

$a^x \sim 1+xlna$

$arcsinx \sim x$

$(1+x)^{\alpha} \sim 1+\alpha x$

$arctgx \sim x$

Использование бесконечно малых для вычисления пределов

Пример 6.

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{2^{\sin 3x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1+\sin 3x\ln 2-1}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin 3x\ln 2}=\lim_{x\to0}\frac{x}{3x\ln 2}=\frac{1}{3\ln 2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sqrt[5]{\cos 2x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\left(1-\frac{(2x)^2}{2}\right)^{\frac{1}{5}}-1}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{6}-1}{1-\frac{4x^2}{5\cdot2}-1}=\frac{5}{12}$$

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Определение. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если функция определена в этой точке и её значение $f(x_0)$ равно пределу функции в этой точке

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Определение. Функция $f(x)$ ***непрерывна*** в интервале $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Теорема. Элементарная функция непрерывна на каждом интервале, целиком содержащемся в области её определения.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Пусть Δx – приращение аргумента,

$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ – приращение функции.

Теорема. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0

тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 .$$

ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

- **Определение**. Точка x_0 называется точкой разрыва функции, если в этой точке нарушается условие непрерывности.

Определение. Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва функции, если предел функции в этой точке существует, но функция $f(x)$ в точке x_0 либо не существует либо значение $f(x_0)$ не совпадает с равными односторонними пределами функции, т.е.

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$$

Точка устранимого разрыва

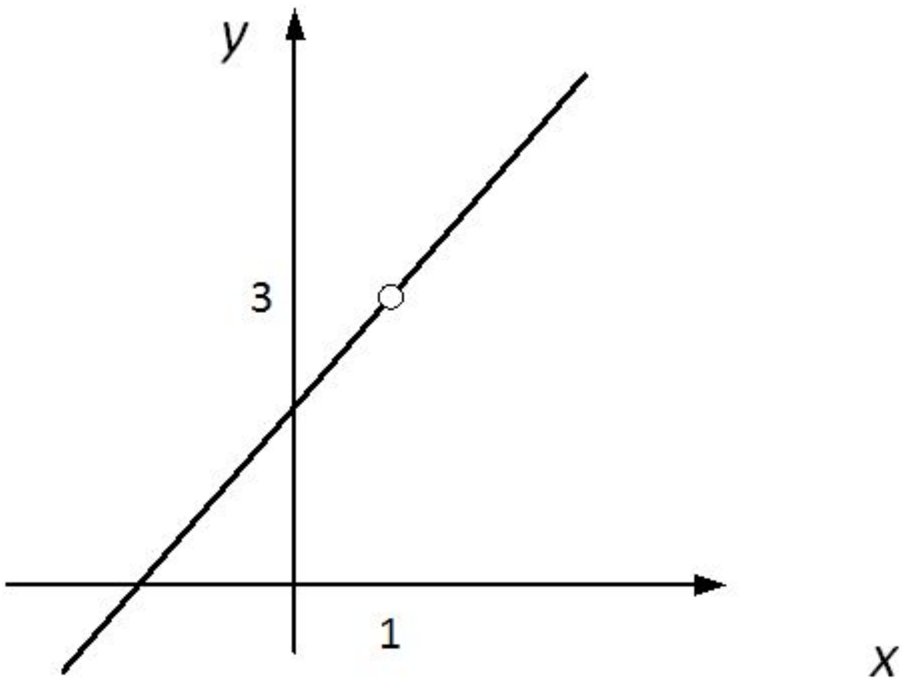
Пример 7.

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-1}$$

$$D(f)=\{x:x\neq 1\}$$

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-1}=\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=x+2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=3\neq f(1)$$



Точка разрыва1 рода

-

Определение. Если существует в точке разрыва конечные левые и правые пределы, причем не все три числа

$$f(x_0-0), \quad f(x_0+0), \quad f(x_0)$$

равны между собой, то в точке x_0 разрыв 1 рода, причем

$f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется скачком функции в точке разрыва.

Точка разрыва1 рода

Пример 1 (продолжение).

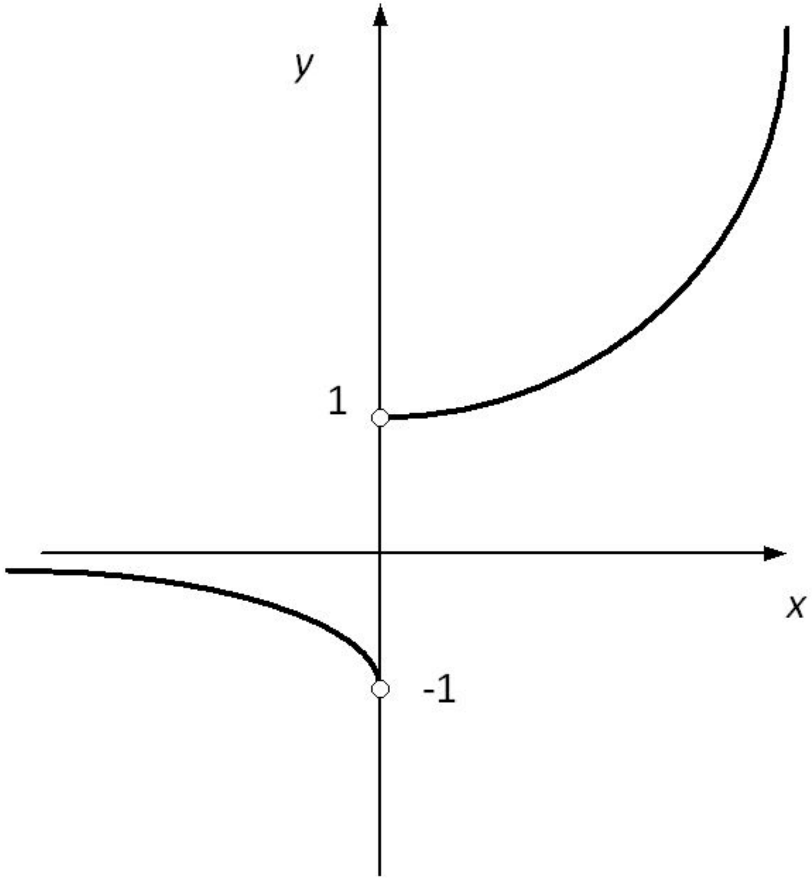
$$y = \frac{|x|}{x} 2^x$$

Односторонние пределы:

$$f(0-0) = -1, \qquad f(0+0) = 1.$$

Точка $x = 0$ – точка разрыва 1 рода.

скачок функции: $f(x_0+0) - f(x_0-0) = 2$.



Точка разрыва1 рода

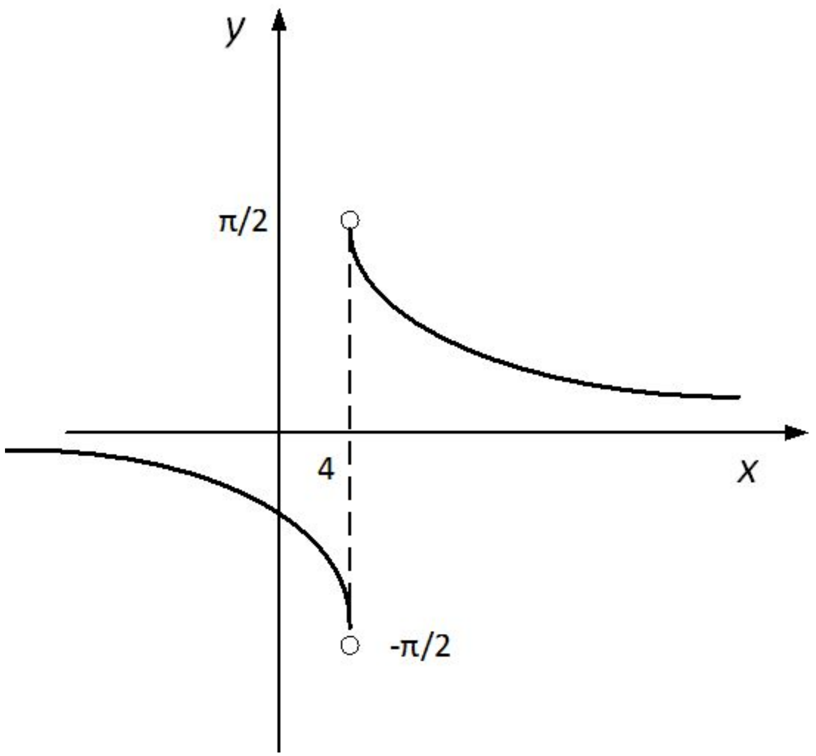
Пример 8

$$y = arctg\frac{1}{x-4}.$$

$$\lim_{x\to 4-0} arctg\frac{1}{x-4} = \lim_{x\to 4-0} arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 4+0} arctg\frac{1}{x-4} = \lim_{x\to 4+0} arctg(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$$

$$f(x_0+0) - f(x_0-0) = \pi$$

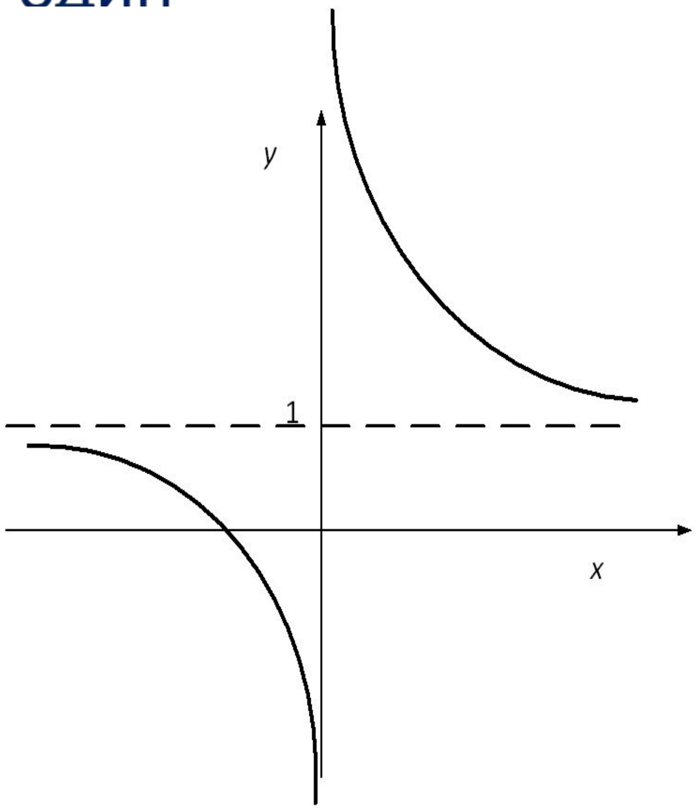


Точка разрыва 2 рода

- Определение. Точка x_0 называется точкой разрыва 2 рода функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет, по крайней мере, одного из односторонних пределов или хотя бы один односторонний предел равен ∞.

Пример 2. (продолжение)

$$y = \frac{1}{x} + 1.$$



Точка $x = 0$ – точка разрыва 2 рода.