



РГСУ

Математика

*Математический анализ.
Функции. Пределы.
Непрерывность.*

Последовательности

Определение. Если каждому $n \in \mathbb{N}$ поставлено в соответствие по определенному закону некоторое действительное число a_n , то множество занумерованных чисел

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad \text{или} \quad \{a_n\}$$

называется **числовой последовательностью**, a_n - общий член последовательности.

Примеры:

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ $a_n = \frac{1}{n}$ - общий член последовательности

2. арифметическая прогрессия: $a_n = a_1 + d(n - 1)$, где d - разность прогрессии
 $a_n = a_{n-1} + d$ - рекуррентная формула арифметической прогрессии.

3. геометрическая прогрессия: $b_n = b_1 q^{n-1}$, где q - знаменатель прогрессии
 $b_n = b_{n-1} \cdot q$ - рекуррентная формула геометрической прогрессии.

Предел последовательности

Определение. Число A называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного ε существует число $n_0(\varepsilon)$ такое, что $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$, и обозначается

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \text{ или } a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \text{ такое, что } \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$$

Здесь и далее используем обозначения: \forall - для любого, \exists - существует.

Пример.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Возьмем, например, $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, тогда $n_0 = 1001$ и при $n \geq 1001$ $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \frac{1}{1000}$

Предел последовательности

1. Последовательность, у которой существует предел, называется **сходящейся**.
2. Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется **расходящейся**.
3. **Теорема**: если последовательность имеет предел, то он единственный.
4. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то последовательность называется **бесконечно малой**.
5. Если для любого сколь угодно большого положительного A существует число $n_0(A)$ такое, что $\forall n \geq n_0(A)$ выполняется неравенство $|a_n| > A$, то последовательность называется **бесконечно большой** и это обозначается как:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{или} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Предел последовательности

6. Последовательность называется **неубывающей (невозрастающей)**, если $\forall n$ выполняется неравенство $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$). Такие последовательности называются **МОНОТОННЫМИ**.

Последовательность называется **возрастающей (убывающей)**, если $\forall n$ выполняется неравенство $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$). Такие последовательности называются **СТРОГО МОНОТОННЫМИ**.

7. Последовательность называется **ограниченной сверху (снизу)**, если существует такое C , что $\forall n$ выполняется неравенство $a_n \leq C$ ($a_n \geq C$). Если последовательность ограничена и сверху и снизу называется **ограниченной**.

8. Сходящаяся последовательность ограничена.

9. **Теорема**. Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Число e

Можно доказать, что последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ является возрастающей и ограниченной и, следовательно, имеет предел.

Определение. Числом e или числом Эйлера называется предел последовательности $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$e \approx 2,718281828459045 \dots$$

Число e – иррациональное и трансцендентное, т.е. оно не является корнем многочлена с целочисленными

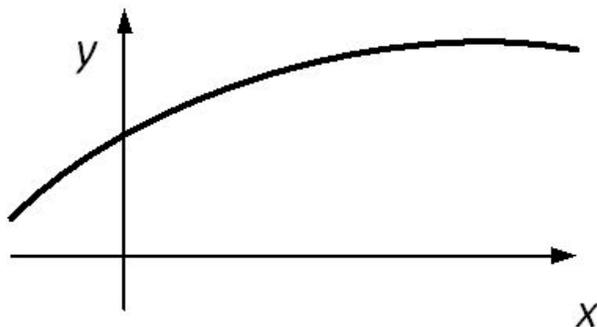
Функции

Определение. Если каждому элементу x из множества $D \subset R$ по некоторому правилу соответствует единственный элемент y из множества $E \subset R$, то говорят, что на множестве D задана **функция** $y = f(x)$ переменной x .

$$\forall x \in D \subset R \xrightarrow{f} y \in E \subset R \Leftrightarrow y = f(x)$$

$D(f)$ – область определения, $E(f)$ – область значения функции.

Определение. **Графиком** функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости Oxy с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D$.



Основные элементарные функции

1. Степенные функции: $y = x^\alpha, \alpha \in R$.
2. Показательные функции: $y = a^x, a > 0, a \neq 1$.
3. Логарифмические функции: $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$.
4. Тригонометрические функции: $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$.
5. Обратные тригонометрические функции: $y = \operatorname{arcsin} x, y = \operatorname{arccos} x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$.

Задание: повторить свойства элементарных функций, графики.

Предел функции в точке

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Выберем точку $x_0 \in R$.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к точке x_0 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

Определение. Число A называется **пределом функции (по Гейне)** $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \rightarrow x_0$), если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 и состоящей из чисел, отличных от x_0 , соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \text{ если } \forall \{x_n\}: x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0, x_n \neq x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

Предел функции в точке

Определение. Число A называется **пределом функции (по Коши)** $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \rightarrow x_0$), если для любого сколь угодно малого положительного ε существует положительное число δ , зависящее от ε , такое, что для любого $x \in D$, удовлетворяющего неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in D, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Замечание. Неравенство $0 < |x - x_0| < \delta$ определяет δ -окрестность точки x_0 .

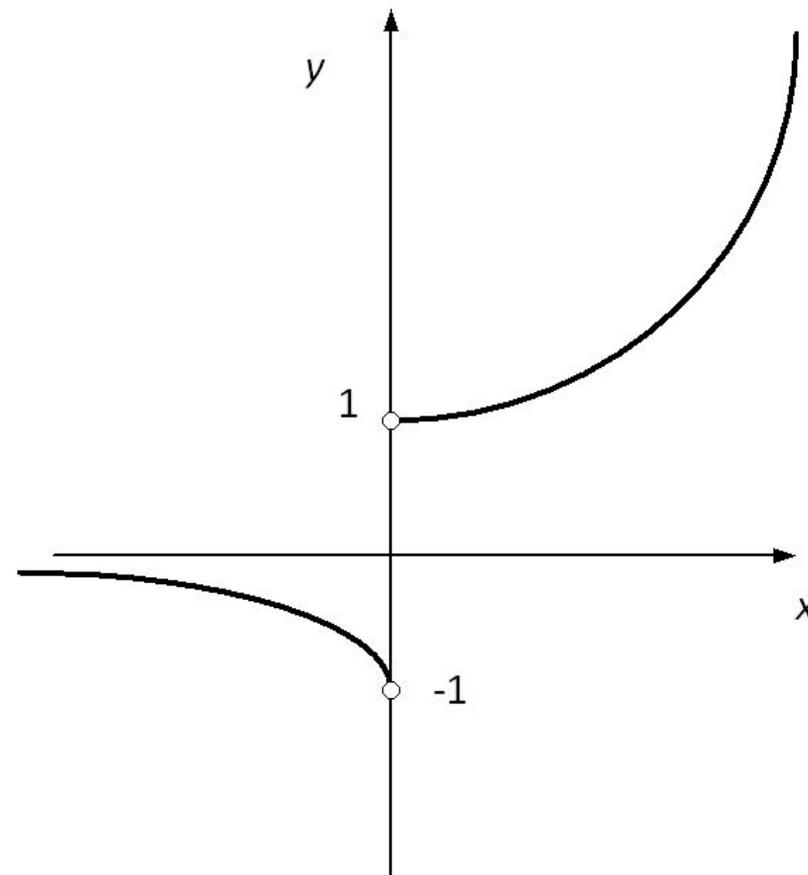
Предел функции в точке

Теорема. Определения предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.

А может ли функция не иметь предела?

Пример 1. $y = \frac{|x|}{x} 2^x$, $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

$$y = \begin{cases} 2^x, & x > 0 \\ -2^x, & x < 0 \end{cases}$$



Односторонние пределы

Определение (по Коши). Число A называется левым [правым] пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \rightarrow x_0$), если для любого сколь угодно малого положительного ε существует положительное δ , зависящее от ε , такое, что для любого $x \in D$, удовлетворяющего неравенству $x_0 - \delta < x < x_0$ [$x_0 < x < x_0 + \delta$] справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in D, x_0 - \delta < x < x_0 [x_0 < x < x_0 + \delta] \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Обозначение:

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \text{ — левый предел, } A = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) \text{ — правый предел.}$$

Односторонние пределы

Пример 1(продолжение). $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} 2^x = -1$, $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} 2^x = 1$

Теорема.

Функция имеет предел в точке $x = x_0$ равный A тогда и только тогда, когда в этой точке существуют левый и правый пределы и они равны A .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad A = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Предел в бесконечно удаленной точке

Определение. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$), если для любого сколь угодно малого положительного ε существует положительное число Δ , зависящее от ε , такое, что для любого $x \in D$, удовлетворяющего неравенству $|x| > \Delta$ ($x > \Delta$, $x < -\Delta$) справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in D, |x| > \Delta (x > \Delta, x < -\Delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Обозначение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \right)$$

Если функция неограниченно возрастает при $x \rightarrow x_0$, то говорят, что предел равен ∞ :

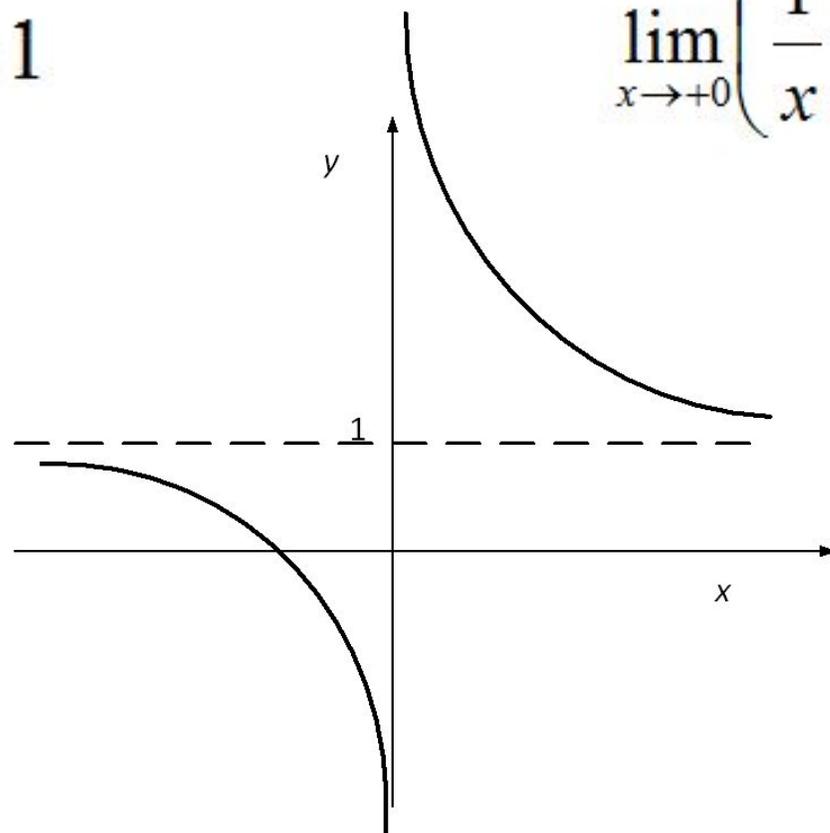
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

Предел в бесконечно удаленной точке

Пример 2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = -\infty$$



СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ

Пусть $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, $C = const$.

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} Cf(x) = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

$$4. \text{Если } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0, \text{ то } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^k = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^k, k \in R.$$

ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Правило 1. Если при замене x на x_0 под знаком предела получается некоторое *конечное* число A ($A = f(x_0)$), то оно и является пределом:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Пример 3.
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[\frac{2^2 + 3}{2 - 1} \right] = \left[\frac{7}{1} \right] = 7$$

ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Правило 2.

Если $A = \left[\frac{C}{0} \right], \left[\frac{\infty}{C} \right], [C \cdot \infty], [\infty + \infty]$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Пример 4.
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[\frac{4}{0} \right] = \infty$$

ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Правило 3.

Если $A = \left[\frac{0}{0} \right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$, то говорят, что **под**

знаком предела стоит неопределенность.

Вычисление предела сводится к «**раскрытию неопределенности**», т. е. к выполнению некоторых тождественных преобразований, позволяющих избавиться от неопределенности.

Пример 5.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6x - 16}{x^2 - 4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+8)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+8)}{(x+2)} = \frac{10}{4} = 2,5$$

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = 1$$

Следствие.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$

Пример. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{x+1} = 1$

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Второй замечательный предел.

Теорема. Существует предел функц $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x \rightarrow \infty$ равный числу e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = [1^\infty] = e \approx 2,72$$

Заменой $y = \frac{1}{x}$

получим

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$$

Следствие.

$$\text{Если } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty, \text{ то } \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)} = e$$

Бесконечно малые функции

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$. Тогда:

А) если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем $\beta(x)$.

Обозначение $\beta = o(\alpha)$ при $x \rightarrow x_0$.

Б) если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **бесконечно малыми одного порядка**.

Обозначение $\beta = O(\alpha)$ при $x \rightarrow x_0$.

В) если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются

эквивалентными. Обозначение $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Использование бесконечно малых для вычисления пределов

При вычислении пределов удобно использовать эквивалентность следующих бесконечно малых функций при $x \rightarrow 0$:

$$\sin x \sim x$$

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$e^x \sim 1 + x$$

$$\operatorname{tg} x \sim x$$

$$\ln(1 + x) \sim x$$

$$a^x \sim 1 + x \ln a$$

$$\arcsin x \sim x$$

$$(1 + x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x$$

Использование бесконечно малых для вычисления пределов

Пример 6.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{2^{\sin 3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \sin 3x \ln 2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 3x \ln 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x \ln 2} = \frac{1}{3 \ln 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - 1}{\sqrt[5]{\cos 2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - 1}{\left(1 - \frac{(2x)^2}{2}\right)^{\frac{1}{5}} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{6} - 1}{1 - \frac{4x^2}{5 \cdot 2} - 1} = \frac{5}{12}$$

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0 , если функция определена в этой точке и её значение $f(x_0)$ равно пределу функции в этой точке

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Определение. Функция $f(x)$ *непрерывна* в интервале (a, b) , если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Теорема. Элементарная функция непрерывна на каждом интервале, целиком содержащемся в области её определения.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Пусть Δx – приращение аргумента,

$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ – приращение функции.

Теорема. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0

тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0 .$$

ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

• **Определение.** Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции, если в этой точке нарушается условие непрерывности.

Определение. Точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва** функции, если предел функции в этой точке существует, но функция $f(x)$ в точке x_0 либо не существует либо значение $f(x_0)$ не совпадает с равными односторонними пределами функции, т.е.

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$$

Точка устранимого разрыва

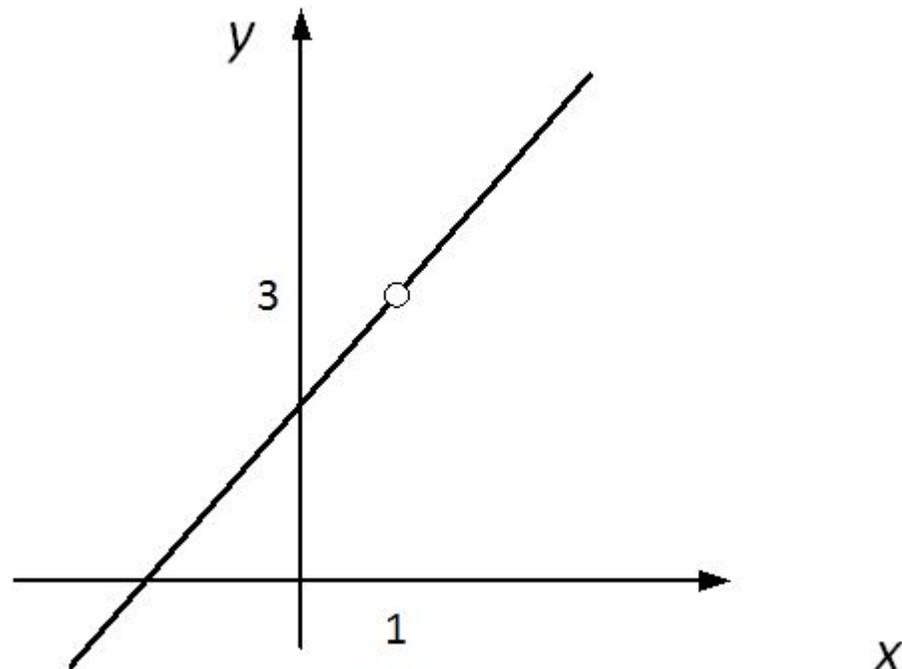
Пример 7.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

$$D(f) = \{x : x \neq 1\}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} = x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3 \neq f(1)$$



Точка разрыва 1 рода

• **Определение.** Если существует в точке разрыва конечные левые и правые пределы, причем не все три числа

$$f(x_0 - 0), \quad f(x_0 + 0), \quad f(x_0)$$

равны между собой, то в точке x_0 **разрыв 1 рода**, причем

$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется **скачком функции** в точке

разрыва.

Точка разрыва 1 рода

Пример 1 (продолжение).

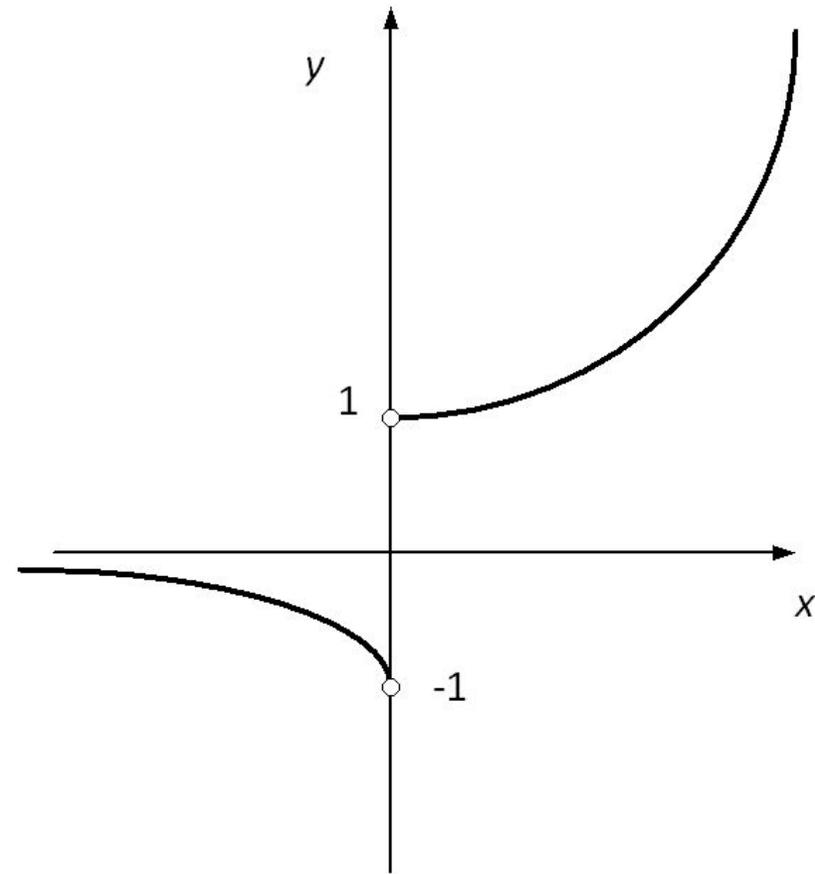
$$y = \frac{|x|}{x} 2^x$$

Односторонние пределы:

$$f(0-0) = -1, \quad f(0+0) = 1.$$

Точка $x = 0$ – точка разрыва 1 рода.

скачок функции: $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) = 2$.



Точка разрыва 1 рода

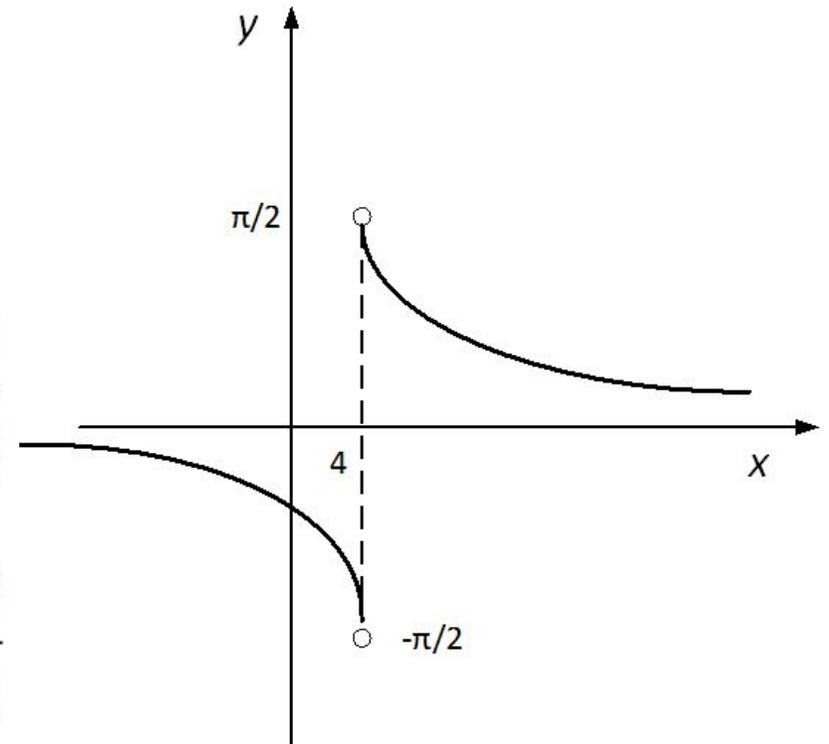
Пример 8

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4-0} \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4+0} \operatorname{arctg}(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$$

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) = \pi$$



Точка разрыва 2 рода

• **Определение.** Точка x_0 называется точкой разрыва 2 рода функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет, по крайней мере, одного из односторонних пределов или хотя бы один односторонний предел равен ∞ .

Пример 2. (продолжение)

$$y = \frac{1}{x} + 1.$$

Точка $x = 0$ – точка разрыва 2 рода.

