Лекция. Дифференциальные Уравнения

Лектор : Сандаков Евгений Борисович – доцент кафедры №30 Высшей математики «НИЯУ МИФИ»

§ Функционалы, содержащие производные высших порядков.

Рассмотрим функционал

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)})dx \quad (1)$$

Будем считать, что $F(x, p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$ непрерывна по совокупности переменных вместе со всеми частными производными до $(n+1)$-ого порядка включительно.

Будем рассматривать этот функционал в классе $A_{2n} = \{y(x) \in C^{(2n)}[a;b]:\ y(a)=A_1, y'(a)=A_2, \dots, y^{(n-1)}(a)=A_n, y(b)=B_1, y'(b)=B_2, \dots, y^{(n-1)}(b)=B_n\}$

Теорема Если функционал (1) с заданными выше условиями на $F(x, p_0, p_1, \dots, p_n)$ достигает экстремума в классе A_{2n} на функции $y(x) \in A_{2n}$, то $y(x)$ является решением уравнения Эйлера–Пуассона

$$F'_y - \frac{d}{dx}[F'_{y'}] + \frac{d^2}{dx^2}[F'_{y''}] - \dots + (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}[F'_{y^{(n)}}] = 0$$

и удовлетворяет краевым условиям:

$$\begin{cases} y(a)=A_1,\ y'(a)=A_2,\ \dots,\ y^{(n-1)}(a)=A_n \\ y(b)=B_1,\ y'(b)=B_2,\ \dots,\ y^{(n-1)}(b)=B_n \end{cases}$$

Док-во:

Так же как и в случае простейшего функционала можно доказать существование вариации у функционала (1) и его можно вычислить по формуле:

$$\delta J[y]=\frac{\partial}{\partial t}(J[y+t\delta y])\Big|_{t=0}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b F(x,y+t\delta y,y'+t\delta y',\dots,y^{(n)}+t\delta y^{(n)})dx\Big|_{t=0}=$$

$$=\int_a^b [F_y\delta y+F_{y'}\delta y'+\dots+F_{y^{(n)}}\delta y^{(n)}]dx$$

В силу необходимого условия экстремума функционала имеем $\delta J[y]=0$.

Следовательно,

$$\int_a^b [F_y\delta y+F_{y'}\delta y'+\dots+F_{y^{(n)}}\delta y^{(n)}]dx=0 \quad (*)$$

Допустимыми вариациями для функционала являются

$\delta y(a) = \delta y(b) = \delta y'(a) = \delta y'(b) = \dots = \delta y^{(n)}(a) = \delta y^{(n)}(b) = 0$

Обозначим $\delta y = \eta(x)$ Тогда ⊛ примет вид

$$\int_a^b [F_y \cdot \eta(x) + F_{y'} \cdot \eta'(x) + F_{y''} \eta'' + \dots + F_{y^{(n)}} \cdot \eta^{(n)}(x)]dx = 0 \quad (**)$$

Все слагаемые в (∗∗), кроме первого, преобразуем

1) $$\int_a^b F_{y'} \eta'(x) dx = \underbrace{F_{y'} \eta(x)\Big|_a^b}_{0} - \int_a^b \frac{d}{dx}[F_{y'}] \cdot \eta(x) dx = $$
$$= -\int_a^b \frac{d}{dx}[F_{y'}] \cdot \eta(x) dx$$

2) $$\int_a^b F_{y''} \cdot \eta''(x) dx = \underbrace{F_{y''} \cdot \eta'(x)\Big|_a^b}_{0} - \int_a^b \frac{d}{dx}[F_{y''}] \cdot \eta'(x) dx =$$
$$= -\underbrace{\frac{d}{dx}[F_{y''}] \eta(x)\Big|_a^b}_{0} + \int_a^b \frac{d^2}{dx^2}[F_{y''}] \eta(x) dx =$$
$$= \int_a^b \frac{d^2}{dx^2}[F_{y''}] \cdot \eta(x) dx$$ и так далее

$$\int_a^b F_{y^{(n)}} \cdot \eta^{(n)}(x) dx = (-1)^n \int_a^b \frac{d^n}{dx^n}[F_{y^{(n)}}] \eta(x) dx$$

Подставляя все эти слагаемые в (∗∗) получим :

$$\int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx}[F_{y'}] + \frac{d^2}{dx^2}[F_{y''}] - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}[F_{y^{(n)}}] \right] \eta(x)\,dx = 0$$

Обозначим

$$\Phi(x) = F_y - \frac{d}{dx}[F_{y'}] + \frac{d^2}{dx^2}[F_{y''}] - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}[F_{y^{(n)}}]$$

Тогда получим

$\int_a^b \Phi(x)\eta(x)\,dx = 0$ для любой $\eta(x) \in C^{(n)}_{[a,b]}$

и такой что $\eta(a) = \eta(b) = \dots = \eta^{(n-1)}(a) = \eta^{(n-1)}(b) = 0$

Тогда по обобщению основной леммы вариационного исчисления получим, что $\Phi(x) = 0$, то есть

$$F_y - \frac{d}{dx}[F_{y'}] + \frac{d^2}{dx^2}[F_{y''}] - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}[F_{y^{(n)}}] = 0$$

Следовательно, $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера – Пуассона и принадлежит классу A_{2n}, то есть удовлетворяет краевым условиям

$y(a) = A_1,\ y'(a) = A_2, \dots, y^{(n-1)}(a) = A_n,$

$y(b) = B_1,\ y'(b) = B_2, \dots, y^{(n-1)}(b) = B_n$

Таким образом теорема доказана.

§ Функционалы от функций нескольких переменных.

Рассмотрим для простоты случай $n=2$

Пусть Q – ограниченная измеримая по Жордану область в R^2_{xy} и $\overline{Q}=Q\cup\partial Q$, где ∂Q – граница области Q.

∂Q – кусочно гладкая граница.

Обозначим через $C^{(2)}(\overline{Q})$ – множество функций $z(x,y)$ непрерывных в $\overline{Q}$ вместе со всеми частными производными до 2-ого порядка включительно

Норма в $C^{(2)}(\overline{Q})$ определяется равенством:

$$\|z(x,y)\|_{C^{(2)}(\overline{Q})}=\max\left\{\max_{\overline{Q}}|z(x,y)|;\ \max_{\overline{Q}}\left(\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\right);\ \max_{\overline{Q}}\left(\left|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|+\left|\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|+\left|\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|\right)\right\}$$

§ Основная лемма вариационного исчисления

Лемма Если $\varphi(x,y)\in C^{(2)}(\overline{Q})$ и

$$\iint\limits_{Q}\varphi(x,y)\eta(x,y)\,dx\,dy=0$$ для любой

$$\eta(x,y)\in \overset{\circ}{C}{}^{(1)}(\overline{Q})=\{\eta(x,y)\in C^1(\overline{Q}):\ \eta(x,y)\big|_{\partial Q}=0\},$$

то $\varphi(x,y)\equiv 0$ в $\overline{Q}$

Док-во: Будем доказывать эту лемму

методом „от противного".

Пусть $\varphi(x,y) \not\equiv 0$. Тогда существует точка $(x_0, y_0) \in Q$ такая что $\varphi(x_0, y_0) = m \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $m > 0$. Тогда по теореме о сохранении знака непрерывной функцией существует окрестность

$$U_r(x_0, y_0) = \{(x,y) \in Q : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2, r>0\}$$

такая что для всех точек $(x,y) \in U_r(x_0, y_0)$

$\varphi(x,y) > \frac{m}{2}$. Далее так как

$\eta(x,y) \in \overset{\circ}{C}{}^{(1)}(\overline{Q})$ произвольна, то возьмём

$$\eta(x,y) = \begin{cases} [r^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2]^2, & \text{если } (x,y) \in U_r(x_0,y_0) \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin U_r(x_0,y_0) \text{ из } \overline{Q} \end{cases}$$

Тогда $\iint\limits_{Q} \varphi(x,y)\eta(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{U_r(x_0,y_0)} \varphi(x,y)\eta(x,y)\,dx\,dy \geq$

$\geq \frac{m}{2} \iint\limits_{U_r(x_0,y_0)} \eta(x,y)\,dx\,dy > 0$, что противоречит условию, что

$$\iint\limits_{Q} \varphi(x,y)\eta(x,y)\,dx\,dy = 0 \text{ для } \forall \eta(x,y) \in \overset{\circ}{C}{}^{(1)}(\overline{Q})$$

Полученное противоречие и доказывает

лемму #

Рассмотрим функционал

$$J[z(x,y)] = \iint\limits_Q F\left(x,y,z(x,y),\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy \quad (1)$$

Будем предполагать, что функция $F(x,y,z,p,q)$ непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными до 2-ого порядка включительно. Будем рассматривать этот функционал на множестве

$$A = \{ z(x,y) \in C^{(2)}(\bar{Q}) : z(x,y)\big|_{\partial Q} = g(x,y)\}$$

Тогда в силу леммы о вычислении вариации функционала, вариация может быть вычислена по формуле

$$\delta J[z(x,y)] = \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_Q F\left(x,y,z+t\delta z,\frac{\partial z}{\partial x}+t\delta z'_x,\frac{\partial z}{\partial y}+t\delta z'_y\right)dxdy\Big|_{t=0} =$$

$$= \iint\limits_Q \left[F'_z \delta z + F'_{\frac{\partial z}{\partial x}}\cdot \delta z'_x + F'_{\frac{\partial z}{\partial y}}\cdot \delta z'_y\right]dxdy$$

Обозначим $\delta z = \eta(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$

Тогда выражение для вариации функционала примет вид:

$$\delta J[z(x,y)]=\iint\limits_Q\left[F'_z\,\zeta(x,y)+F'_p\frac{\partial\zeta}{\partial x}+F'_q\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]dxdy \quad (**)$$

Теорема. Пусть функционал

$$J[z(x,y)]=\iint\limits_Q F\left(x,y,z(x,y),\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy \quad (*)$$

с заданными выше условиями на $F(x,y,z,p,q)$ достигает экстремума на функции $z(x,y)\in A=\{z\in C^{(2)}(\overline{Q}):\ z(x,y)\big|_{\partial Q}=g(x,y)\}$. Тогда функция $z(x,y)$ является решением уравнения Эйлера–Остроградского

$$F'_z-\frac{\partial}{\partial x}[F'_p]-\frac{\partial}{\partial y}[F'_q]=0$$

Док-во. Если экстремум функционала $(*)$ достигается на функции $z(x,y)\in A$, то согласно необходимому условию экстремума $\delta J[z]=0$. Тогда согласно $(**)$ получим

$$\iint\limits_Q\left[F'_z\cdot\zeta(x,y)+\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]dxdy=0 \quad (1)$$

Заметим, что

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial p}\cdot\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\dfrac{\partial F}{\partial p}\right)-\zeta\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial p}\right)\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial q}\cdot\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\zeta\dfrac{\partial F}{\partial q}\right)-\zeta\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial F}{\partial q}\right)\end{cases} \quad (***)$$

Тогда в равенстве (1) последние два слагаемых преобразуем следующим образом: используя равенства (***)

$$\iint\limits_{Q}\left[\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]dxdy \overset{\text{в силу }(***)}{=}$$

$$=\iint\limits_{Q}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial F}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]dxdy -$$

$$-\iint\limits_{Q}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]\eta(x,y)\,dxdy \overset{\text{по формуле Грина}}{=}$$

$$=\underbrace{\int\limits_{\partial Q}\eta\frac{\partial F}{\partial q}dx-\eta\frac{\partial F}{\partial p}dy}_{\equiv 0 \text{ в силу условия, что } \eta|_{\partial Q}=0}-\iint\limits_{Q}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]\eta\,dxdy=$$

$$=-\iint\limits_{Q}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]\eta(x,y)\,dxdy$$

Подставляя это в (1), получим, что

$$\iint\limits_{Q}\left[F'_z-\frac{\partial}{\partial x}(F'_p)-\frac{\partial}{\partial y}(F'_p)\right]\eta(x,y)\,dxdy=0 \quad (2)$$

для любой $\eta(x,y)\in \overset{(0)}{C}{}^{1}(\overline{Q})$

Обозначим $\Phi(x,y)=F'_z-\frac{\partial}{\partial x}(F'_p)-\frac{\partial}{\partial y}(F'_q)$

Тогда равенство ② примет вид

$$\iint\limits_Q \Phi(x,y)\,\eta(x,y)\,dx\,dy = 0$$

для любой $\eta(x,y) \in \overset{0}{C}{}^{(1)}(\overline{Q})$

Тогда в силу основной леммы вариационного исчисления получим, что $\Phi(x,y) \equiv 0$ или

$$F'_z - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) = 0$$

то есть получили, что $z(x,y) \in A = \{z(x,y) \in C^{(2)}(\overline{Q}) : z(x,y)\big|_{\partial Q} = g(x,y)\}$ и удовлетворяет уравнению Эйлера Остроградского. Теорема доказана #