

Уравнения с одной переменной

Целое
уравнение

и его корни

Урок алгебры. 9 класс

Правила

Уравнения называются **ЦЕЛЫМИ**, если у них левая и правая части являются целыми выражениями (т.е. не содержат деления на выражения с переменными).

Всякое **уравнение можно заменить равносильным ему уравнением**, левая часть которого – многочлен стандартного вида, а правая – нуль.

Если уравнение с одной переменной записано в виде $P(x)=0$, где $P(x)$ – многочлен стандартного вида, то степень этого многочлена называют **степенью уравнения**

Примеры

$$(3x+7) - 5 = 3x(3x+1)$$

$$(2x^2+1)^2 - x^3 = 1 - 3(x^2-2) \leftrightarrow$$
$$4x^4 - x^3 + 7x^2 + 6 = 0$$

Уравнение

$4x^4 - x^3 + 7x^2 + 6 = 0$ является уравнением 4-й степени

Надо научиться решать уравнения n -й степени

$$P_n(x)=0$$

- При $n=1$ имеем линейное уравнение $ax + b=0$?
у которого 1 корень $x=-b/a$
- При $n=2$ имеем квадратное уравнение
 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$)

Количество корней зависит от дискриминанта

$D=b^2-4ac$ $D > 0$ – два различных корня;

$D = 0$ – два одинаковых корня;

$D < 0$ – нет корней

Уравнение n -й степени $P_n(x)=0$

имеет не более n корней

Для 3-й и 4-й степени существуют формулы для нахождения корней, но они очень громоздки и сложны.

Для 5-й степени и выше формул нет (доказано в 19в. Нильсом Абелем и Эваристом Галуа)

Уравнения 3-й; 4-й и выше степеней –
уравнения высоких степеней

Три основных приёма:

- Разложение на множители
- Замена переменной
- Графический способ

Пример 1.

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

$$x^2(x+2) - (x+2) = 0$$

$$(x+2)(x^2-1) = 0$$

$$(x+2)(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = -2; \quad x = -1; \quad x = 1$$

Пример 2.

$$6x^2(x-1)-x^2+x-2x+=0$$

$$6x^2(x-1)-(x^2-x)-(2x-2)=0$$

$$6x^2(x-1)-x(x-1)-2(x-1)=0$$

$$(x-1)(6x^2-x-2)=0$$

$$x=1; \quad x=2/3; \quad x=-1/2$$

Кубическое уравнение – алгебраическое уравнение третьей степени.

Общий вид кубического уравнения:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \text{ где } a \neq 0$$

Заменяя в этом уравнении x новым неизвестным y , связанным с x равенством $y = x - (b/3a)$, кубическое уравнение можно привести к более простому (каноническому) виду:

$$y^3+py+q=0, \text{ где}$$

$$p = -b^2/3a^2 + c/a, \quad q = 2b^3/27a^3 - bc/3a^2 + d/a$$

Решение кубического уравнения МОЖНО
получить с помощью *формулы Кардано*:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Если $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, то кубическое уравнение имеет 3
различных корня (один действительный,
а два других – сопряжённые
комплексные)

Если $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, то все три корня
действительные и различные

Биквадратное уравнение

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Решаются заменой
переменной

$$y = x^2$$

$$ay^2 + by + c = 0$$

Пример 3.

$$4x^4 - 5x^2 + 1 = 0 \quad y = x^2$$

$$4y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$y = 1; \quad y = 1/4$$

$$x = -1; \quad x = 1; \quad x = 1/2; \quad x = -1/2$$

Пример 4.

$$(x^2-2x)^2-4(x^2-2x)+3=0 \quad y=(x^2-2x)$$

$$y^2-4y+3=0$$

$$y=1; \quad y=3$$

$$x^2-2x=1$$

$$x^2-2x=3$$

$$x^2-2x-1=0$$

$$x^2-2x-3=0$$

$$x=1-\sqrt{2}; \quad x=1+\sqrt{2}; \quad x=-1; \quad x=3$$

Пример 5.

$$(x^2+4x+3)(x^2+4x+1)=48$$

$$y = (x^2+4x+1)$$

$$y(y+2)=48$$

$$y^2+2y-48=0$$

$$y=-8 \quad y=6$$

$$x^2+4x+1=-8$$

$$x^2+4x+9=0$$

корней нет

$$x^2+4x+1=6$$

$$x^2+4x-5=0$$

$$x=-5; \quad x=1$$

Пример 6.

$$(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)=105$$

При решении этой задачи важно сообразить, что $(x-1)(x+5)=x^2+4x-5$,
 $(x+1)(x+3)=x^2+4x+3$.

Поэтому изменив порядок умножения сомножителей в исходном уравнении, получим: $(x^2+4x-5)(x^2+4x+3)=105$.

Далее решаем введением новой переменной $y = x^2+4x-5$ и

получим уравнение $y(y+8)=105$,

корни которого $y_1=-15$ и $y_2=7$.

Решим уравнения $x^2+4x-5=-15$ (корней не имеет) и $x^2+4x-5=7$ (корни $x_1=-6$ и $x_2=2$)

Пример 7.

$$(x^2+3x-8)^2+2x(x^2+3x-8)-3x^2=0$$

Многочлен, который стоит в левой части уравнения, легко свести к однородному многочлену двух переменных, если ввести замену $y = (x^2+3x-8)$.

Тогда уравнение примет вид:

$$y^2+2xy-3x^2=0.$$

Решим его как квадратное по переменной y ,

$$y^2+2xy-3x^2=0$$

D=

y=

y=

$$y=-3x \text{ и } y=x.$$

Возвращаясь к переменной **X**, имеем два уравнения:

$$x^2+3x-8=-3x$$

и

$$x^2+3x-8=x$$

(корни $x=-3-\sqrt{17}$ и $x=-3+\sqrt{17}$)

(корни $x=-4$ и $x=2$)

Решите уравнение:

• №272(а) $y^3 - 6y = 0$ $y(y^2 - 6) = 0$

Ответ: $y = 0$, $y = -\sqrt{6}$, $y = \sqrt{6}$

Решите уравнение:

• №272(д) $9x^3 - 18x^2 - x + 2 = 0$

$$(9x^3 - 18x^2) - (x - 2) = 0$$

$$9x^2(x - 2) - (x - 2) = 0$$

$$(x - 2)(9x^2 - 1) = 0$$

$$(x - 2)(3x - 1)(3x + 1) = 0$$

Ответ: $x = -1/3$, $x = 1/3$, $x = 2$

Решите уравнение:

- №276(a) $(2x^2 + 3)^2 - 12(2x^2 + 3) + 11 = 0$

Заменим $(2x^2 + 3) = h$,

имеем $h^2 - 12h + 1 = 0$

Решите уравнение:

• №278(a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

Теорема Безу.



• **Этьенн Безу́** (фр. *Étienne Bézout*; [31 марта](#); 31 марта [1730](#); 31 марта 1730, [Немур](#); 31 марта 1730, Немур — [27 сентября](#); 31 марта 1730, Немур — 27 сентября [1783](#); 31 марта 1730, Немур — 27

- Преподавал математику в Бас-Лож близ Фонтенбло Училище гардемаринов (1763) и Королевском артиллерийском корпусе (1768). Основные его работы относятся к алгебре (исследование систем алгебраических уравнений высших степеней, исключение неизвестных в таких системах и др.). Автор шеститомного «Курса математики» (1764—1769), неоднократно переиздававшегося.



Надгробие Этьенна Безу

Любой многочлен $R(x)$ можно
представить в виде:

$$P(x) = (x-a) \cdot Q(x) + r,$$

$$\text{где } r = P(a)$$

Пример 1. Найти остаток от деления

$$x^4 - 6x^3 + 8 \text{ на } x + 2$$

Теорема Безу.

Если уравнение

$$a^0 x^n + a^1 x^{n-1} + \dots + a^{n-1} x + a^n = 0,$$

где все коэффициенты целые, имеет целые корни, то это делители свободного члена.

Пример 2. Решите уравнение

$$x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$$

$$x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$$

- Свободный член – 12 имеет делители $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.
- При $x=1$ значение многочлена равно 0. Это означает, что 1 является корнем уравнения, а $x^3 - 8x^2 + 19x - 12$ делится на $(x-1)$.
- Выполнив деление, получим уравнение $x^2 - 7x + 12 = 0$, решая которое, получим что $x=3$ или $x=4$.
- Ответ: 1; 3; 4.

Решение задач.

1) Решить уравнения:

- а) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$,
- б) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$,
- в) $x^4 + 4x^3 + x^2 - 12x - 12 = 0$,
- г) $x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = 0$.

Решим уравнение с помощью теоремы Безу:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Можно не делить многочлен на двучлен, а воспользоваться **схемой Горнера**

Метод назван в честь [Уильяма Джоржа Горнера\(англ.\)](#)



$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Делителями свободного члена являются: -1; +1; -2; +2; -3; +3; -6; +6

α	1	-6	11	-6
1	1	$-6 + 1 * 1 = -5$	$11 + 1 * (-5) = 6$	$-6 + 1 * 6 = 0$

т.о. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$

Решить уравнение:

$$x^3 - 5x + 4 = 0$$

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

4: на +/-1; +/-2; +/-4

	1	-5	4
1	1	-4	0

$$x^3 - 5x + 4 = (x - 1)(x^2 + x - 4) = 0$$

Возвратные уравнения

Рассмотрим уравнения:

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$$

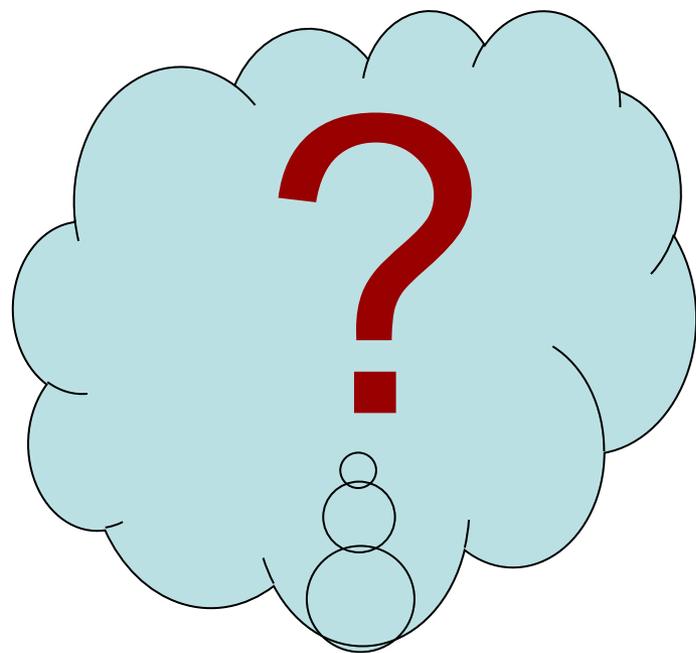
$$3x^4 - 7x^3 + x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$-x^3 + 5x^2 + 5x - 1 = 0$$

Все три уравнения объединяет то, что *коэффициенты равноотстоящие от начала и конца левой части уравнения равны.*

Такие уравнения называются *возвратными.*

КАК РЕШАТЬ?



Рассмотрим методы решения возвратных уравнений 3-ей и 4-ой степени.

В общем виде возвратное уравнение 3-ей степени имеет вид

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \quad (3)$$

Сгруппируем первый и последний, второй и третий члены, вынесем общие множители, тем самым, разложив левую часть уравнения (3) на множители:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + bx + a &= a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = \\ &= a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = \\ &= (x + 1)(ax^2 - ax + a + bx) = \\ &= (x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a). \end{aligned}$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$(x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a) = 0$$

полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $x + 1 = 0$, $ax^2 + (b - a)x + a = 0$, решая первое уравнение получаем один из корней уравнения (3)

другие корни, если они есть, находят, решая второе уравнение. Заметим, что **(-1) является корнем любого возвратного уравнения 3-ей степени.**

Пример решения кубического уравнения заменой переменных

Пример. Решить уравнение $x^3 - 6x^2 - 6x - 2 = 0$.

Решение. Сначала приведем уравнение к трехчленному виду. Для этого в соответствии с формулой (3) сделаем в уравнении замену $x = y + 2$.

$$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 - 6(y+2) - 2 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6(y^2 + 4y + 4) - 6y - 12 - 2 =$$
$$= y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 24y - 24 - 6y - 12 - 2 = y^3 - 18y - 30.$$

(
1
6
)

Следовательно, уравнение принимает вид $y^3 - 18y - 30 = 0$.

Теперь в соответствии с формулой (6) сделаем в уравнении еще одну замену

$$y = z + \frac{6}{z}.$$

Тогда поскольку

$$\left(z + \frac{6}{z}\right)^3 - 18\left(z + \frac{6}{z}\right) - 30 = z^3 + 18z + \frac{108}{z} + \frac{216}{z^3} - 18z - \frac{108}{z} - 30 = z^3 + \frac{216}{z^3} - 30,$$

то уравнение примет вид

$$z^3 + \frac{216}{z^3} - 30 = 0.$$

Далее из получаем

$$y = z_1 + \frac{6}{z_1} = \sqrt[3]{18} + \frac{6}{\sqrt[3]{18}} = \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{\frac{6^3}{18}} = \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{12}.$$

Заметим, что такое же, как и в формуле (18), значение получилось бы, если бы мы использовали формулу

$$y = z_2 + \frac{6}{z_2},$$

или использовали формулу $y = z_1 + z_2$.

$$x = y + 2 = \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{12} + 2.$$

Таким образом, мы нашли у уравнения (13) вещественный корень

*Рассмотрим возвратное уравнение
4-ой степени*

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + c = 0 \quad (4)$$

Так как $a \neq 0$, то $x = 0$
не является корнем этого уравнения.

Поэтому, если разделить обе части x^2
уравнения на получим

уравнение:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

равносильное данному.

Полученное уравнение можно решить уже знакомым нам методом замены переменной.

Пусть $x + \frac{1}{x} = t$, тогда

$$t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

,откуда получаем, что

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

и уравнение (4) примет вид

$$a(t^2 - 2) + bt + c = 0$$

Решив это уравнение, найдем его корни t_1 и t_2

Теперь чтобы найти корни уравнения (4)

необходимо решить два уравнения

$$x + \frac{1}{x} = t_1 \quad \text{и} \quad x + \frac{1}{x} = t_2$$

Пример. Решить уравнение

$$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$$

Решение.

Имеем возвратное уравнение 4-ой степени.

Разделим обе части уравнения на x^2 , проведем группировку слагаемых и вынесем общие множители за скобки, получим уравнение

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$$

Введем новую переменную $x + \frac{1}{x} = t$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

подставляя новую переменную в уравнение, получим уравнение:

$$6t^2 + 5t - 50 = 0$$

$$6t^2 + 5t - 50 = 0$$

Решая это уравнение, получим $t_1 = -\frac{10}{3}$ и $t_2 = \frac{5}{2}$

Для нахождения корней первоначального уравнения решим дробно-рациональные уравнения

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3} \qquad x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

решение которых сводится к решению двух квадратных

уравнений $3x^2 + 10x + 3 = 0$ и $2x^2 - 5x + 2 = 0$

Корни этих уравнений являются корнями первоначального уравнения:

$$x_1 = -3 \qquad x_2 = -\frac{1}{3} \qquad x_3 = 2 \qquad x_4 = \frac{1}{2}$$

Решить уравнения:

$$5x^3 - 4x^2 - 4x + 5 = 0$$

Решить уравнения:

$$2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$$

Однородные уравнения

- Однородным уравнением n -й степени, называется дифференциальное уравнение вида:

$$c_0 \cdot f(x)^n + c_1 \cdot f(x)^{n-1} \cdot g(x) + c_2 \cdot f(x)^{n-2} \cdot g(x)^2 + \dots + c_{n-1} \cdot f(x) \cdot g(x)^{n-1} + c_n \cdot g(x)^n = 0$$

- Такое уравнение заменой $\frac{f(x)}{g(x)} = t$ сводится к алгебраическому уравнению n -ой степени:

$$c_0 t^n + c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + \dots + c_{n-1} t + c_n = 0$$

Примеры однородных уравнений:

$$\sin x - \cos x = 0,$$

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0$$

$$a \cdot \sin^3 x + b \cdot \sin^2 x \cdot \cos x + c \cdot \sin x \cdot \cos^2 x + d \cdot \cos^3 x = 0$$

$$3(x^2+5)^2+4(x^2+5)(x-7)-7(x-7)^2=0$$

$$(x-3)^4+4(x+3)^4=5(x^2-9)^2 \leftrightarrow (x-3)^4+4(x+3)^4=5(x-3)^2(x+3)^2$$

Степень каждого слагаемого одинакова!

Эта сумма называется степенью однородного уравнения.

Рассмотренные уравнения имеют соответственно первую, вторую, третью и четвёртую степень.

$$(x-3)^4 + 4(x+3)^4 = 5(x-3)^2(x+3)^2$$

Разделим обе части уравнения на $(x-3)^4$ и
сделаем замену $t = \left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2$

Получим равносильное уравнение:

$$1 + 4t^2 = 5t, \text{ корни которого равны:}$$

$$t = 1 ; t = \frac{1}{4}$$

Сделаем обратную замену

$$\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2 = 1 \qquad \left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Решим относительно x :

$$x = 0$$

$$x = -1$$

$$x = -9$$

Итоги урока:

- Какие уравнения называются уравнениями высоких порядков?
- Что значит решить уравнение?
- Сколько корней может иметь уравнение высоких порядков?
- Какие основные способы решения уравнений высоких порядков?

Задание на самоподготовку:

- п.12.
- №272(б,е); 276(б,г);
278(б,д).