Уравнения с одной переменной

Целое уравнение

и его корни

Урок алгебры. 9 класс

Правила

Уравнения называются ЦЕЛЫМИ, если у них левая и правая части являются целыми выражениями (т.е. не содержат деления на выражения с переменными).

Всякое уравнение можно заменить равносильным ему уравнением, левая часть которого – многочлен стандартного вида, а правая – нуль.

Если уравнение с одной переменной записано в виде P(x)=0, где P(x) – многочлен стандартного вида, то степень этого многочлена называют степенью уравнения

Примеры

$(3x+7) – 5 = 3x(3x+1)$

$(2x^2+1)^2-x^3=1-3(x^2-2) \leftrightarrow$

$4x^4-x^3+7x^2+6=0$

Уравнение $4x^4-x^3+7x^2+6=0$ является уравнением 4-й степени

Надо научиться решать уравнения n-й степени $P_n(x)=0$

- При n=1 имеем линейное уравнение $ax+b=0$? у которого 1 корень $x=-b/a$
- При n=2 имеем квадратное уравнение

$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$

Количество корней зависит от дискриминанта

$D=b^2-4ac$ D>o – два различных корня;

D=o – два одинаковых корня;

D<o – нет корней

Уравнение n-й степени $\mathbf{P_n(x)=0}$

имеет не более n корней

Для 3-й и 4-й степени существуют формулы для нахождения корней, но они очень громоздки и сложны.

Для 5-й степени и выше формул нет (доказано в 19в. Нильсом Абелем и Эваристом Галуа)

Уравнения 3-й; 4-й и выше степеней – уравнения высоких степеней

Три основных приёма:

- Разложение на множители
- Замена переменной
- Графический способ

Пример1.

$x^3+2x^2-x-2=0$

$x^2(x+2) – (x+2)=0$

$(x+2)(x^2-1)=0$

$(x+2)(x-1)(x+1)=0$

$x=-2$; $x=-1$; $x=1$

Пример2.

$6x^2(x-1)-x^2+x-2x+=0$

$6x^2(x-1)-(x^2-x)-(2x-2)=0$

$6x^2(x-1)-x(x-1)-2(x-1)=0$

$(x-1)(6x^2-x-2)=0$

$x=1;\quad x=2/3;\quad x=-1/2$

Кубическое уравнение – *алгебраическое уравнение третьей степени.*

Общий вид кубического уравнения:

$ax^3+bx^2+cx+d=0$, *где* $a\neq 0$

Заменяя в этом уравнении x новым неизвестным y, связанным с x равенством $y= x-(b/3a)$, *кубическое уравнение можно привести к более простому(каноническому) виду:*

$y^3+py+q=0$, *где*

$p=-b^2/3a^2+c/a$, $q=2b/27a^3-bc/3a^2+d/a$

Решение кубического уравнения можно получить с помощью *формулы Кардано*:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Если $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ >0, то кубическое уравнение имеет 3 различных корня(один действительный, а два других – сопряжённые комплексные)

Если $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ <0, то все три корня действительные и различные

Биквадратное уравнение

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Решаются заменой переменной

$$y = x^2$$

$$ay^2 + by + c = 0$$

Пример3.

$4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ $\qquad y = x^2$

$4y^2 - 5y + 1 = 0$

$y = 1; \quad y = 1/4$

$x = -1; \quad x = 1; \qquad x = 1/2; \quad x = -1/2$

Пример4.

$$(x^2-2x)^2-4(x^2-2x)+3=0 \qquad y=(x^2-2x)$$

$$y^2-4y+3=0$$

$$y=1; \qquad y=3$$

$$x^2-2x=1 \qquad x^2-2x=3$$

$$x^2-2x-1=0 \qquad x^2-2x-3=0$$

$$x=1-\sqrt{2}; \quad x=1+\sqrt{2}; \quad x=-1; \quad x=3$$

Пример5.

$$(x^2+4x+3)(x^2+4x+1)=48$$

$$y=(x^2+4x+1)$$

$$y(y+2)=48$$

$$y^2+2y-48=0$$

$y=-8$ $y=6$

$x^2+4x+1=-8$

$x^2+4x+9=0$

корней нет

$x^2+4x+1=6$

$x^2+4x-5=0$

$x=-5$; $x=1$

Пример 6.

$(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)=105$

При решении этой задачи важно сообразить, что $(x-1)(x+5)=x^2+4x-5$,

$(x+1)(x+3)= x^2+4x+3$.

Поэтому изменив порядок умножения сомножителей в исходном уравнении, получим: $(x^2+4x-5)(x^2+4x+3)=105$.

Далее решаем вводом новой переменной **$y= x^2+4x-5$** и получим уравнение **$y(y+8)=105$**, корни которого **$y_1=-15$ и $y_2=7$.**

Решим уравнения **$x^2+4x-5=-15$** (корней не имеет) и **$x^2+4x-5=7$**(корни **$x_1=-6$** и **$x_2=2$**)

Пример 7.

$$(x^2+3x-8)^2+2x(x^2+3x-8)-3x^2=0$$

Многочлен, который стоит в левой части уравнения, легко свести к однородному многочлену двух переменных, если ввести замену $y=(x^2+3x-8)$.

Тогда уравнение примет вид:

$$y^2+2xy-3x^2=0.$$

Решим его как квадратное по переменной **y**,

$$y^2+2xy-3x^2=0$$

D=

y=

y=

$y=-3x$ и $y=x$.

Возвращаясь к переменной **x**, имеем два уравнения:

$x^2+3x-8=-3x$ и $x^2+3x-8=x$

(корни $x=-3-\sqrt{17}$ и $x=-3+\sqrt{17}$)

(корни $x=-4$ и $x=2$)

Решите уравнение:

- №272(а) $y^3-6y=0$ $y(y^2-6)=0$

Ответ: $y=0$, $y=-\sqrt{6}$, $y=\sqrt{6}$

Решите уравнение:

- №272(д) $9x^3-18x^2-x+2=0$

$(9x^3-18x^2)-(x-2)=0$

$9x^2(x-2)-(x-2)=0$

$(x-2)(9x^2-1)=0$

$(x-2)(3x-1)(3x+1)=0$

Ответ: $x=-1/3$, $x=1/3$, $x=2$

Решите уравнение:

- №276(а) $(2x^2+3)^2 - 12(2x^2+3)+11=0$

Заменим $(2x^2+3)=h$,

имеем $h^2-12h+1=0$

Решите уравнение:

- №278(а) $x^4 – 5x^2 - 36 = 0$

Теорема Безу.

- **Этье́нн Безу́** (фр. *Étienne Bézout*; 31 марта; 31 марта 1730; 31
  марта 1730, Немур; 31
  марта 1730, Немур — 27 сентября; 31
  марта 1730, Немур — 27
  сентября 1783; 31
  марта 1730, Немур — 27
  Бас-Лож близ Фонтенбло
  марта 1730, Немур — 27
  Бас-Лож близ Фонтенбло
  математик, член Парижск
  наук (1758).

- Преподавал математику в Училище гардемаринов (1763) и Королевском артиллерийском корпусе (1768). Основные его работы относятся к алгебре (исследование систем алгебраических уравнений высших степеней, исключение неизвестных в таких системах и др.). Автор шеститомного «Курса математики» (1764—1769), неоднократно переиздававшегося.

НадгробиеЭтьенна Безу

Любой многочлен $R(x)$ можно представить в виде:

$$P(x) = (x-a) \cdot Q(x) + r,$$

где $r = P(a)$

Пример 1. Найти остаток от деления

$x^4 - 6x^3 + 8$ на $x+2$

Теорема Безу.

Если уравнение

0 $$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

где все коэффициенты целые, имеет целые корни, то это делители свободного члена.

Пример 2. Решите уравнение

$$x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$$

$x^3-8x^2+19x-12=0$

- Свободный член – 12 имеет делители ±1, ±2, ± 3, ±4, ±6, ±12.
- При $x=1$ значение многочлена равно 0. Это означает, что 1 является корнем уравнения, а

  $x^3-8x^2+19x-12$ делится на $(x-1)$.
- Выполнив деление, получим уравнение $x^2-7x+12=0$, решая которое, получим что $x=3$ или $x=4$.
- Ответ: 1; 3; 4.

Решение задач.

1) Решить уравнения:

- а) $x^3-3x^2-4x+12=0$,
- б) $x^3+4x^2+5x+2=0$,
- в) $x^4+4x^3+x^2-12x-12=0$,
- г) $x^4+4x^3-x^2-16x-12=0$.

Решим уравнение с помощью теоремы Безу:

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

Можно не делить многочлен на двучлен, а воспользоваться **схемой Горнера**

Метод назван в честь Уильяма Джоржа Горнера(анл.)

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

Делителями свободного члена являются: -1;+1; -2; +2; -3; +3; -6; +6

α	1	-6	11	-6
1	1	-6+1*1= **-5**	11+1*(-5)=**6**	-6+1*6=**0**

т.о. $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6)=0$

Решить уравнение:

$x^3-5x+4=0$

$x^3-3x+2=0$

4: на +/-1;+/-2; +/-4

	1	-5	4
1	1	-4	0

$x^3-5x+4=(x-1)(x^2+x-4)=0$

Возвратные уравнения

Рассмотрим уравнения:

$$x^3-3x^2-3x+1=0$$

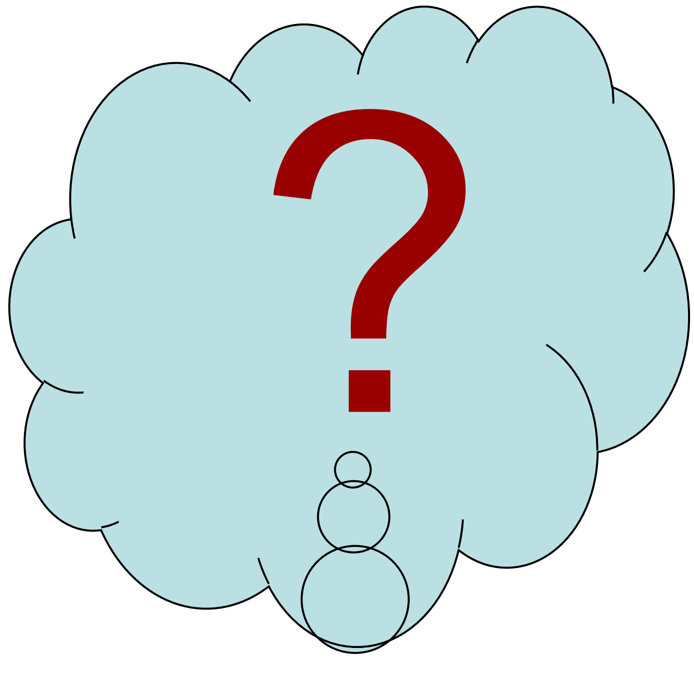
$$3x^4-7x^3+x^2-7x+3=0$$

$$-x^3+5x^2+5x-1=0$$

Все три уравнения объединяет то, что *коэффициенты равноотстоящие от начала и конца левой части уравнения равны*.

Такие уравнения называются *возвратными*.

КАК РЕШАТЬ?



Рассмотрим методы решения возвратных уравнений 3-ей и 4-ой степени.

В общем виде возвратное уравнение 3-ей степени имеет вид

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \qquad (3)$$

Сгруппируем первый и последний, второй и третий члены, вынесем общие множители, тем самым, разложив левую часть уравнения (3) на множители:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = a(x^3 + 1) + bx(x + 1) =$$

$$= a(x+1)(x^2 - x + 1) + bx(x+1) =$$

$$= (x+1)(ax^2 - ax + a + bx) =$$

$$= (x+1)(ax^2 + (b-a)x + a).$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$(x+1)(ax^2+(b-a)x+a)=0$$

полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $x+1=0$, $ax^2+(b-a)x+a=0$,
решая первое уравнение получаем один из корней уравнения (3) $x_1=-1$

другие корни, если они есть, находят, решая второе уравнение. Заметим, что (-1) является корнем любого возвратного уравнения 3-ей степени.

Пример решения кубического уравнения заменой переменных

Пример. Решить уравнение $x^3 - 6x^2 - 6x - 2 = 0.$

Решение. Сначала приведем уравнение к трехчленному виду. Для этого в соответствии с формулой (3) сделаем в уравнении замену $x = y + 2.$

$$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 - 6(y+2) - 2 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6\left(y^2 + 4y + 4\right) - 6y - 12 - 2 =$$

$$= y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 24y - 24 - 6y - 12 - 2 = y^3 - 18y - 30. \quad (16)$$

Следовательно, уравнение принимает вид $y^3 - 18y - 30 = 0.$

Теперь в соответствии с формулой (6) сделаем в уравнении еще одну замену

$$y = z + \frac{6}{z}.$$

Тогда поскольку

$$\left(z+\frac{6}{z}\right)^3-18\left(z+\frac{6}{z}\right)-30=z^3+18z+\frac{108}{z}+\frac{216}{z^3}-18z-\frac{108}{z}-30=z^3+\frac{216}{z^3}-30,$$

то уравнение примет вид

$$z^3+\frac{216}{z^3}-30=0.$$

Далее из получаем

$$y=z_1+\frac{6}{z_1}=\sqrt[3]{18}+\frac{6}{\sqrt[3]{18}}=\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{\frac{6^3}{18}}=\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{12}.$$

Заметим, что такое же, как и в формуле (18), значение получилось бы, если бы мы использовали формулу

$$y=z_2+\frac{6}{z_2},$$

или использовали формулу $y=z_1+z_2$.

$$x=y+2=\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{12}+2.$$

Таким образом, мы нашли у уравнения (13) вещественный корень

Рассмотрим возвратное уравнение 4-ой степени

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + c = 0 \qquad (4)$$

Так как $a \neq 0$, то $x = 0$ не является корнем этого уравнения.

Поэтому, если разделить обе части уравнения на x^2, то получим уравнение:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

равносильное данному.

Полученное уравнение можно решить уже знакомым нам методом замены переменной.

Пусть $x+\frac{1}{x}=t$,тогда

$$t^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+2+\frac{1}{x^2}$$

,откуда получаем, что

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$$

и уравнение (4) примет вид

$$a(t^2-2)+bt+c=0$$

Решив это уравнение, найдем его корни t_1 и t_2
Теперь чтобы найти корни уравнения (4) необходимо решить два уравнения

$$x + \frac{1}{x} = t_1 \quad \text{и} \quad x + \frac{1}{x} = t_2$$

Пример. Решить уравнение

$$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$$

Решение.

Имеем возвратное уравнение 4-ой степени.

Разделим обе части уравнения на x^2, проведем группировку слагаемых и вынесем общие множители за скобки, получим уравнение

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0$$

Введем новую переменную $x+\frac{1}{x}=t$, тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

подставляя новую переменную в уравнение, получим уравнение:

$$6t^2+5t-50=0$$

$$6t^2+5t-50=0$$

Решая это уравнение, получим $t_1=-\frac{10}{3}$ и $t_2=\frac{5}{2}$

Для нахождения корней первоначального уравнения решим дробно-рациональные уравнения

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3} \qquad x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$$

решение которых сводится к решению двух квадратных

уравнений $3x^2+10x+3=0$ и $2x^2-5x+2=0$

Корни этих уравнений являются корнями первоначального уравнения:

$$x_1=-3 \qquad x_2=-\frac{1}{3} \qquad x_3=2 \qquad x_4=\frac{1}{2}$$

Решить уравнения:

$5x^3-4x^2-4x+5=0$

Решить уравнения:

$2x^4-5x^3+4x^2-5x+2=0$

Однородные уравнения

- **Одноро́дным уравнением** n-й степени, называется дифференциальное уравнение вида:

$$c_0 \cdot f(x)^n + c_1 \cdot f(x)^{n-1} \cdot g(x) + c_2 \cdot f(x)^{n-2} \cdot g(x)^2 + \ldots + c_{n-1} \cdot f(x) \cdot g(x)^{n-1} + c_n \cdot g(x)^n = 0$$

- Такое уравнение заменой $\frac{f(x)}{g(x)} = t$ сводится к алгебраическому уравнению *n*-ой степени:

$$c_0 t^n + c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + \ldots + c_{n-1} t + c_n = 0$$

Примеры однородных уравнений:

$\sin x - \cos x = 0$,

$a\cdot\sin^2 x + b\cdot\sin x\cdot\cos x + c\cdot\cos^2 x = 0$

$a\cdot\sin^3 x + b\cdot\sin^2 x\cdot\cos x + c\cdot\sin x\cdot\cos^2 x + d\cdot\cos^3 x = 0$

$3(x^2+5)^2+4(x^2+5)(x-7)-7(x-7)^2=0$

$(x-3)^4+4(x+3)^4=5(x^2-9)^2 \leftrightarrow (x-3)^4+4(x+3)^4=5(x-3)^2(x+3)^2$

Степень каждого слагаемого одинакова!

Эта сумма называется степенью однородного уравнения.

Рассмотренные уравнения имеют соответственно первую, вторую, третью и четвёртую степень.

$(x-3)^4+4(x+3)^4=5(x-3)^2(x+3)^2$

Разделим обе части уравнения на **$(x-3)^4$** и сделаем замену $t=((x+3):(x-3))^2$

Получим равносильное уравнение:

$1+4t^2=5t$, корни которого равны:

$t=1$; $t=\frac{1}{4}$

Сделаем обратную замену

$$\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2 = 1 \qquad \left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Решим относительно x:

X=0 X=-1 X=-9

Итоги урока:

- Какие уравнения называются уравнениями высоких порядков?
- Что значит решить уравнение?
- Сколько корней может иметь уравнение высоких порядков?
- Какие основные способы решения уравнений высоких порядков?

Задание на самоподготовку:

- п.12.
- №272(б,е); 276(б,г); 278(б,д).