Лекция № 9

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ (продолжение)

Преобразования Лоренца

Преобразования Лоренца при переходе от K- к K'-СО (Лекция № 8, ф-ла (8.5а)):

$$x' = \gamma(x - ut) \qquad y' = y \qquad z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{xu}{c^2}\right),$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

При обратном переходе от K'- к K-системе отсчета (Лекция № 8, ф-ла (8.5б)):

$$x = \gamma\left(x' + ut'\right)$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{x'u}{c^2}\right)$$

Кинематические следствия из преобразований Лоренца

Сокращение длин отрезков, параллельных $\vec{u}$, относительно неподвижного наблюдателя $(t_2 = t_1)$:

$$l_0 = x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l$$

Замедление часов: В точке с координатой x' K'-СО протекает процесс, длительность которого в этой системе $\Delta t_0 = t_2' - t_1'$ (*собственное время* процесса). Длительность этого процесса в K- системе, относительно которой K'-система движется

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t_2' - t_1') = \gamma \Delta t_0$$

Релятивистский закон сложения скоростей

В K-системе движется частица со скоростью $\vec{\upsilon}$, проекции которой υ_x, υ_y и υ_z. В K'-СО

$$\upsilon'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t}$$

$$\upsilon'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y'/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t}$$

$$\upsilon'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}z'/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t}$$

Релятивистский закон сложения скоростей:

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - u}{1 - \upsilon_x \frac{u}{c^2}},$$

(9.1)

$$\upsilon'_y = \frac{\upsilon_y}{\gamma\left(1 - \upsilon_x \frac{u}{c^2}\right)}, \qquad \upsilon'_z = \frac{\upsilon_z}{\gamma\left(1 - \upsilon_x \frac{u}{c^2}\right)};$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}$$

Аналогично находим обратные зависимости, для вычисления скорости в *K*-СО, если она известна в *K′*-СО:

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + u}{1 + \upsilon'_x \dfrac{u}{c^2}},$$

$$\upsilon_y = \frac{\upsilon'_y}{\gamma\left(1 + \upsilon'_x \dfrac{u}{c^2}\right)}, \qquad \upsilon_z = \frac{\upsilon'_z}{\gamma\left(1 + \upsilon'_x \dfrac{u}{c^2}\right)} \tag{9.2}$$

Интервал

В релятивистской механике *физический процесс – это последовательность событий*.

Понятие **события** *включает место, где оно произошло* (его координаты x, y, z) *и момент времени* t, *когда оно произошло*.

Интервал между двумя событиями (S_{12}):

$$S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = \mathrm{inv}$$

t_{12} – промежуток времени между событиями, l_{12} – расстояние между точками *1* и *2*, в которых происходят данные события.

Во всех ИСО интервал между событиями 1 и 2 одинаков: $S_{12} = S'_{12} = \mathrm{inv}$

Типы интервалов:

1) **пространственноподобный**

$$l_{12} > ct_{12}$$

2) **времениподобный**

$$l_{12} < ct_{12}$$

3) **светоподобный**

$$l_{12} = ct_{12}$$

Для (1) – пространственноподобного интервала всегда можно найти такую K'-систему в которой оба события происходят одновременно ($t'_{12} = 0$):

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = \left(-l'_{12}\right)^2$$

Для (2) – времениподобного интервала всегда можно найти такую K'-СО, в к-рой оба события происходят в одной точке ($l'_{12} = 0$):

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2$$

Существуют причинно связанные и причинно не связанные события.

В случае пространственноподобных интервалов ($l_{12} > ct_{12}$) ни в одной СО *события не могут оказать влияния друг на друга*, даже если связь между событиями осуществлялась со скоростью $c = 3 \cdot 10^8$ м/с .

Такие *события не причинно-связаны* (сигнал не может дойти).

События, разделенные времениподобными и светоподобными интервалами ($l_{12} \leq ct_{12}$) *могут быть причинно-связанными друг с другом,* т.к. сигнал может дойти из т. 1 в т. 2 со скоростью c.

Элементы релятивистской динамики

Релятивистская масса частицы

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} = \gamma m_0 \qquad (9.3)$$

m_0 – масса (покоя) частицы, υ – скорость движения частицы.

Релятивистский импульс

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} = \frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} = \gamma m_0 \vec{\upsilon} \qquad (9.4)$$

Основное уравнение релятивистской динамики

частицы в ИСО при любых возможных скоростях $\upsilon < c$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{\upsilon})}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \qquad (9.5)$$

ЗАКОН ВЗАИМОСВЯЗИ МАССЫ И ЭНЕРГИИ

Кинетическая энергия релятивистской частицы

Как и в ньютоновской механике, приращение кинетической энергии частицы под действием силы $\vec{F}$

$$\mathrm{d}E_k = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}\,\mathrm{d}t = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Согласно (9.5)

$$\vec{F}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}(m\vec{\upsilon}) = \mathrm{d}m \cdot \vec{\upsilon} + m\,\mathrm{d}\vec{\upsilon},$$

$$\mathrm{d}E_k = \vec{\upsilon}\left(\mathrm{d}m \cdot \vec{\upsilon} + m\,\mathrm{d}\vec{\upsilon}\right) = \upsilon^2\,\mathrm{d}m + m\upsilon\,\mathrm{d}\upsilon,$$

где $\quad \vec{\upsilon}\,\mathrm{d}\vec{\upsilon} = \upsilon\,\mathrm{d}\upsilon$

Упростим это выражение, используя (9.3):

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}$$

Возведем (9.3) в квадрат

$$m^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)=m_0^2 \quad \Big|\cdot c^2$$

$$m^2c^2-m^2\upsilon^2=m_0^2c^2$$

$$m^2c^2=m^2\upsilon^2+m_0^2c^2$$

Найдем дифференциал этого выражения, учитывая, что m_0 и c – постоянные:

$$2mc^2\,\mathrm{d}\,m=2m\upsilon^2\,\mathrm{d}\,m+2m^2\upsilon\,\mathrm{d}\,\upsilon$$

Если разделить это равенство на $2m$, то его правая часть совпадет с выражением для $\mathrm{d}E_k$

$$\mathrm{d}E_k = c^2 \mathrm{d}m \qquad (9.6)$$

Кинетическая энергия покоящейся частицы равна нулю, а ее релятивистская масса $m = m_0$

$$\int_0^{E_k} \mathrm{d}E_k = \int_{m_0}^{m} c^2 \mathrm{d}m = c^2 \int_{m_0}^{m} \mathrm{d}m$$

Кинетическая энергия частицы, движущейся со скоростью υ:

$$E_k = (m - m_0)c^2 \qquad (9.7)$$

Перепишем (9.7) в форме:

$$mc^2 = m_0c^2 + E_k \tag{9.8}$$

Здесь

$$\varepsilon_0 = m_0c^2 \tag{9.9}$$

– **энергия покоя** частицы (это общая внутренняя энергия тела),

$$\varepsilon = mc^2 \tag{9.10}$$

– **полная энергия** частицы.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + E_k \tag{9.11}$$

Связь между импульсом и энергией релятивистской частицы

Полная энергия ε и импульс *p* частицы имеют разные значения в разных СО. Однако существует некоторая комбинация ε и *p*, которая является *инвариантной* т.е. имеет одно и то же значение в разных СО:

$$\varepsilon^2 - p^2 c^2 = inv \qquad (9.12)$$

Убедимся в правильности (9.12) подставив в неё (9.10) и $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$:

$$\varepsilon^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 - m^2 \upsilon^2 c^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \upsilon^2 / c^2}\left(1 - \upsilon^2 / c^2\right)$$

Уравнение связи энергии и импульса частицы

$$\varepsilon^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4 = \varepsilon_0^2 \qquad (9.13)$$

Правая часть (9.13) не зависит от скорости частицы, а следовательно, и от СО.

Из (9.11) и (9.13) получаем

$$\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2 = \underbrace{\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)}_{E_k}\underbrace{\left(\varepsilon + \varepsilon_0\right)}_{E_k + 2\varepsilon_0} = p^2c^2$$

$$pc = \sqrt{E_k\left(E_k + 2m_0c^2\right)} \qquad (9.14)$$