

# Лекция № 9

## **ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ (продолжение)**

# *Преобразования Лоренца*

Преобразования Лоренца при переходе от  $K$ - к  $K'$ -СО (Лекция № 8, ф-ла (8.5а)):

$$x' = \gamma(x - ut) \quad y' = y \quad z' = z$$

$$t' = \gamma \left( t - \frac{xu}{c^2} \right),$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

При обратном переходе от  $K'$ - к  $K$ -системе отсчета (Лекция № 8, ф-ла (8.5б)):

$$x = \gamma(x' + ut')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{x'u}{c^2}\right)$$

# *Кинематические следствия из преобразований Лоренца*

**Сокращение длин отрезков**, параллельных  $\vec{u}$ , относительно неподвижного наблюдателя ( $t_2 = t_1$ ):

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l$$

**Замедление часов:** В точке с координатой  $x'$   $K'$ -СО протекает процесс, длительность которого в этой системе  $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$  (*собственное время* процесса). Длительность этого процесса в  $K$ -системе, относительно которой  $K'$ -система движется

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) = \gamma \Delta t_0$$

# *Релятивистский закон сложения скоростей*

В  $K$ -системе движется частица со скоростью  $\vec{v}$ , проекции которой  $v_x$ ,  $v_y$  и  $v_z$ . В  $K'$ -СО

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'/dt}{dt'/dt}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'/dt}{dt'/dt}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz'/dt}{dt'/dt}$$

# Релятивистский закон сложения скоростей:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - v_x \frac{u}{c^2}}, \quad (9.1)$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left( 1 - v_x \frac{u}{c^2} \right)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left( 1 - v_x \frac{u}{c^2} \right)};$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Аналогично находим обратные зависимости, для вычисления скорости в  $K$ -СО, если она известна в  $K'$ -СО:

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + v'_x \frac{u}{c^2}},$$

(9.2)

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left( 1 + v'_x \frac{u}{c^2} \right)}, \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left( 1 + v'_x \frac{u}{c^2} \right)}$$

# *Интервал*

В релятивистской механике *физический процесс* – это последовательность событий.

Понятие **события** включает место, где оно произошло (его координаты  $x, y, z$ ) и момент времени  $t$ , когда оно произошло.

**Интервал между двумя событиями ( $S_{12}$ ):**

$$S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = \text{inv}$$

$t_{12}$  – промежуток времени между событиями,  
 $l_{12}$  – расстояние между точками 1 и 2, в которых происходят данные события.



**Во всех ИСО интервал между событиями 1 и 2 одинаков:  $S_{12} = S'_{12} = inv$**

**Типы интервалов:**

**1) пространственноподобный**

$$l_{12} > ct_{12}$$

**2) времениподобный**

$$l_{12} < ct_{12}$$

**3) светоподобный**

$$l_{12} = ct_{12}$$

Для (1) – пространственноподобного интервала всегда можно найти такую  $K'$ -систему в которой оба события происходят одновременно ( $t'_{12} = 0$ ):

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = (-l'_{12})^2$$

Для (2) – времениподобного интервала всегда можно найти такую  $K'$ -СО, в к-рой оба события происходят в одной точке ( $l'_{12} = 0$ ):

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'^2_{12}$$

Существуют причинно связанные и причинно не связанные события.

*В случае пространственноподобных интервалов ( $l_{12} > ct_{12}$ ) ни в одной СО события не могут оказать влияния друг на друга, даже если связь между событиями осуществлялась со скоростью  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с .*

*Такие события не причинно-связаны (сигнал не может прийти).*

*События, разделенные времениподобными и светоподобными интервалами ( $l_{12} \leq ct_{12}$ ) могут быть причинно-связанными друг с другом, т.к. сигнал может прийти из т. 1 в т. 2 со скоростью  $c$ .*

# *Элементы релятивистской динамики*

## **Релятивистская масса частицы**

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m_0 \quad (9.3)$$

$m_0$  — масса (покоя) частицы,  $v$  — скорость движения частицы.

## **Релятивистский импульс**

$$\vec{p} = m \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m_0 \vec{v} \quad (9.4)$$

# *Основное уравнение релятивистской динамики*

**частицы в ИСО при любых возможных  
скоростях  $v < c$**

$$\frac{d \overset{\square}{p}}{dt} = \frac{d(m \overset{\square}{v})}{dt} = \overset{\square}{F} \quad (9.5)$$

# *ЗАКОН ВЗАИМОСВЯЗИ МАССЫ И ЭНЕРГИИ*

## *Кинетическая энергия релятивистской частицы*

Как и в ньютоновской механике, приращение кинетической энергии частицы под действием силы  $F$

$$dE_k = F \cdot \frac{dr}{dt} dt$$

Согласно (9.5)

$$\overset{\vee}{F} dt = d(m\overset{\vee}{v}) = dm \cdot \overset{\vee}{v} + m d\overset{\vee}{v},$$

$$dE_k = \overset{\vee}{v}(dm \cdot \overset{\vee}{v} + m d\overset{\vee}{v}) = v^2 dm + m v dv,$$

где  $\overset{\vee}{v} d\overset{\vee}{v} = v dv$

Упростим это выражение, используя (9.3):

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Возведем (9.3) в квадрат

$$m^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0^2 \quad | \cdot c^2$$

$$m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2$$

$$m^2 c^2 = m^2 v^2 + m_0^2 c^2$$

Найдем дифференциал этого выражения, учитывая, что  $m_0$  и  $c$  – постоянные:

$$2mc^2 dm = 2mv^2 dm + 2m^2 v dv$$



Если разделить это равенство на  $2m$ , то его правая часть совпадет с выражением для  $dE_k$

$$dE_k = c^2 dm \quad (9.6)$$

Кинетическая энергия покоящейся частицы равна нулю, а ее релятивистская масса  $m = m_0$

$$\int_0^{E_k} dE_k = \int_{m_0}^m c^2 dm = c^2 \int_{m_0}^m dm$$

**Кинетическая энергия частицы, движущейся со скоростью  $v$ :**

$$E_k = (m - m_0)c^2 \quad (9.7)$$

Перепишем (9.7) в форме:

$$mc^2 = m_0c^2 + E_k \quad (9.8)$$

Здесь

$$\varepsilon_0 = m_0c^2 \quad (9.9)$$

– **энергия покоя** частицы (это общая внутренняя энергия тела),

$$\varepsilon = mc^2 \quad (9.10)$$

– **полная энергия** частицы.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + E_k \quad (9.11)$$

## *Связь между импульсом и энергией релятивистской частицы*

Полная энергия  $\varepsilon$  и импульс  $p$  частицы имеют разные значения. Однако существует некоторая комбинация  $\varepsilon$  и  $p$ , которая является *инвариантной* т.е. имеет одно и то же значение в разных СО:

$$\varepsilon^2 - p^2 c^2 = i n v \quad (9.12)$$

Убедимся в правильности (9.12) подставив в неё (9.10) и  $\vec{p} = m\vec{v}$ :

$$\varepsilon^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - v^2/c^2} \left(1 - v^2/c^2\right)$$

## Уравнение связи энергии и импульса частицы

$$\varepsilon^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 = \varepsilon_0^2 \quad (9.13)$$

Правая часть (9.13) не зависит от скорости частицы, а следовательно, и от СО.

Из (9.11) и (9.13) получаем

$$\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2 = \left( \underset{\boxed{\times}}{\varepsilon} \underset{\boxed{\times}}{-} \underset{\boxed{\times}}{\varepsilon_0} \right) \left( \underset{\boxed{\times}}{\varepsilon} \underset{\boxed{\times}}{+} \underset{\boxed{\times}}{\varepsilon_0} \right) = p^2 c^2$$
$$pc = \sqrt{E_k \left( E_k + 2m_0 c^2 \right)} \quad (9.14)$$