Теоремы Менелая и Чевы

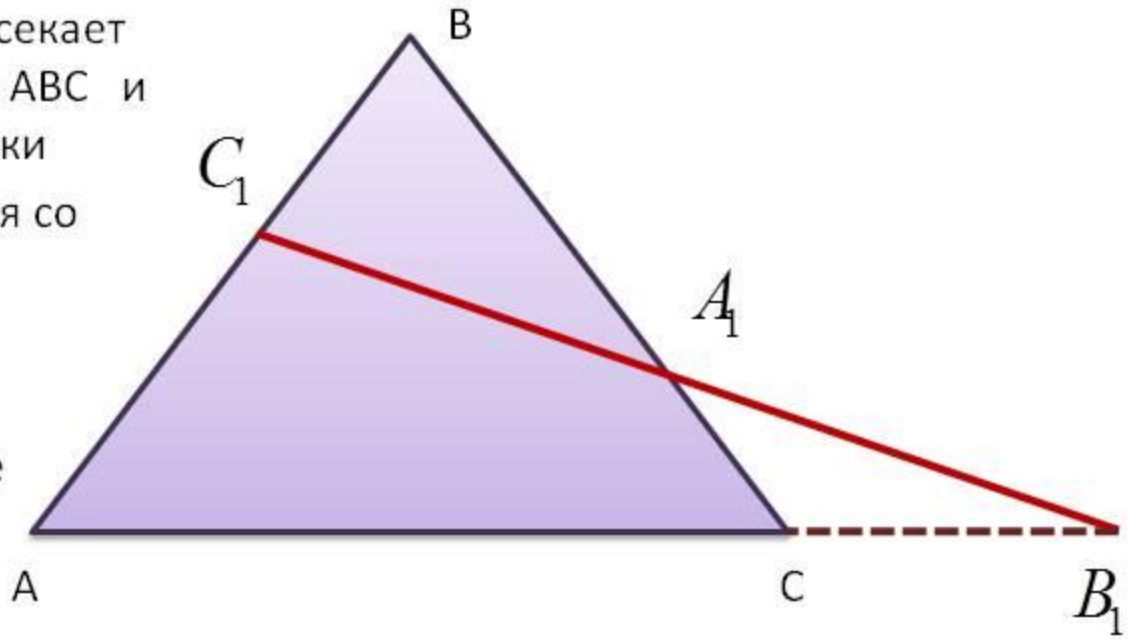
Теорема Менелая (теория).

Теорема:

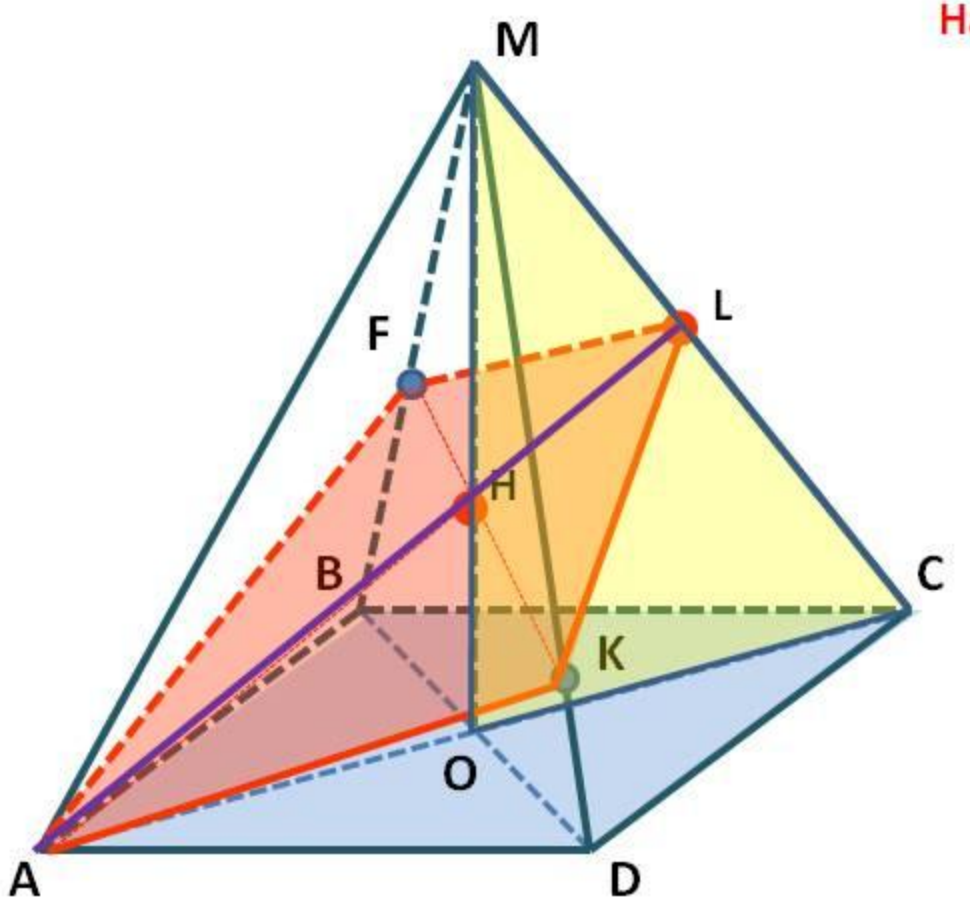
Пусть некоторая прямая пересекает две стороны треугольника ABC и продолжение третьей. Точки A_1, B_1, C_1 это пересечения со сторонами BC, AC, AB или их продолжениями соответственно.

Тогда имеет место следующее равенство:

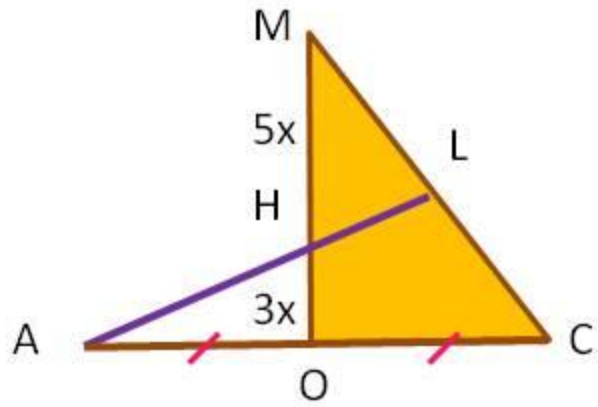
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$



Использование теоремы Менелая в стереометрических задачах.



Нахождение отношения ML:LC



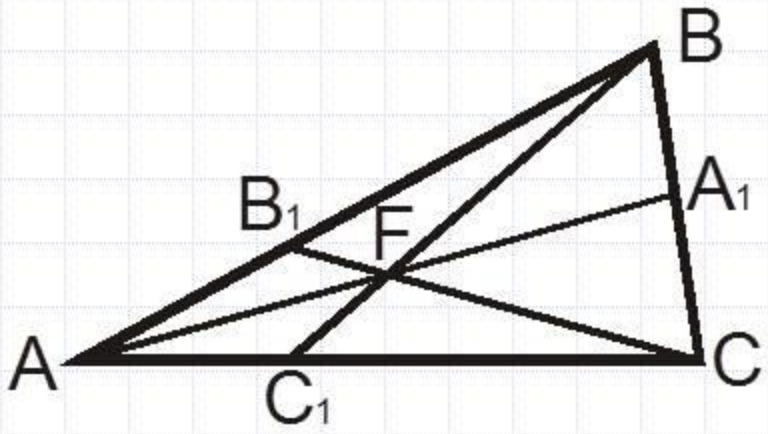
По теореме Менелая для треугольника MOC получаем:

$$\frac{3x}{5x}\cdot\frac{ML}{LC}\cdot\frac{2}{1}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{ML}{LC}=\frac{5}{6}$$

Теорема Чевы

Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 тогда и только тогда пересекаются в одной точке, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$$



Теорема Чевы и ее следствия.

- **Следствие1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.**
- **Следствие 2. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.**
- **Следствие3. Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.**

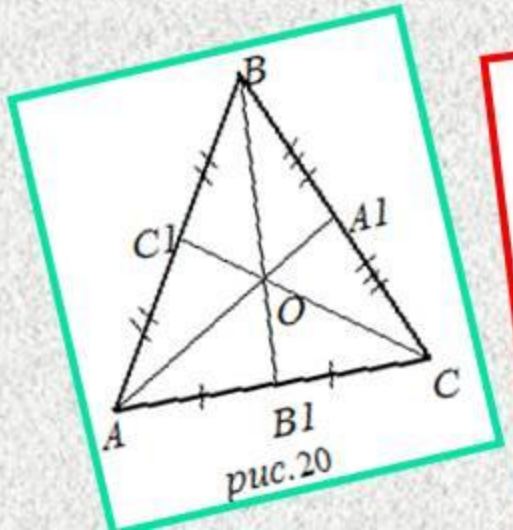


рис.20

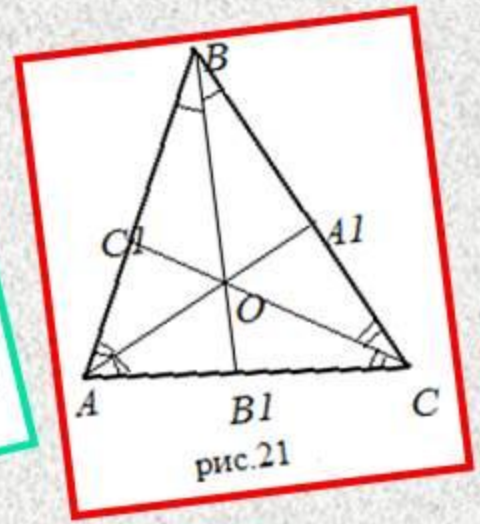


рис.21

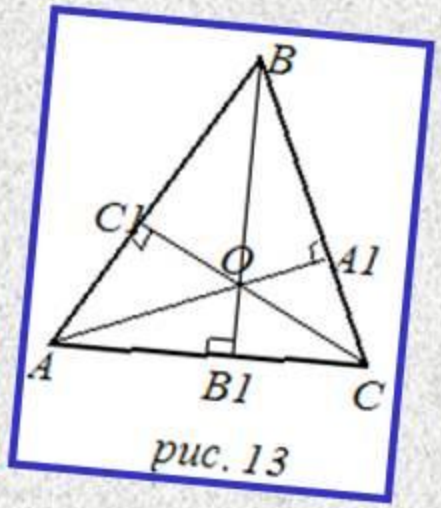
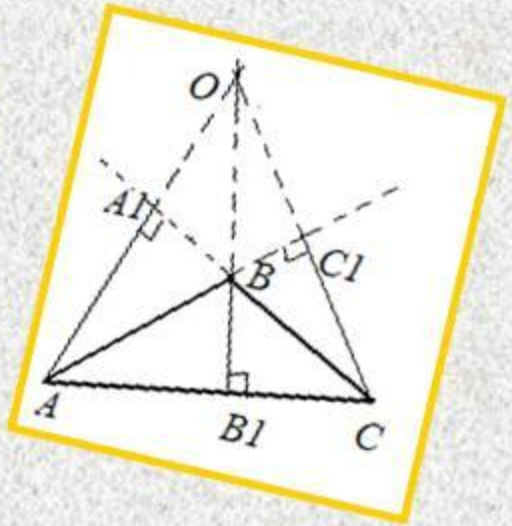


рис. 13



Теорема Чевы и ее следствия.

- **Следствие4. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.**
- **Следствие 5. Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вписанная окружность касается противоположных сторон, пересекаются в одной точке.**

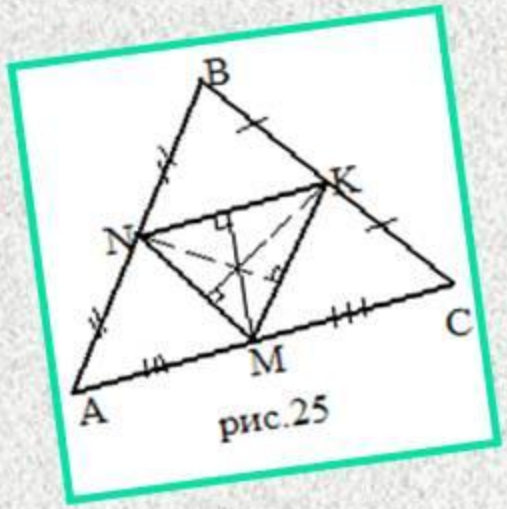


рис.25

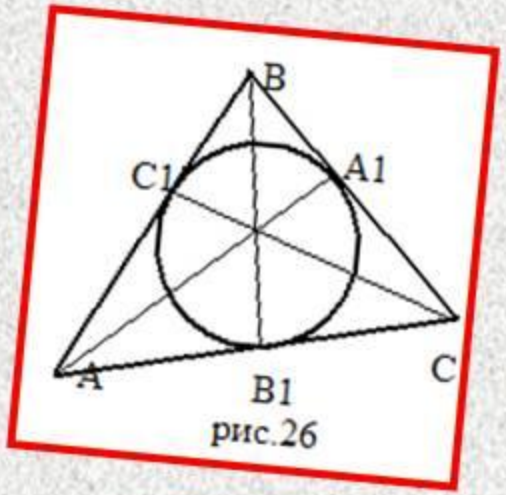


рис.26

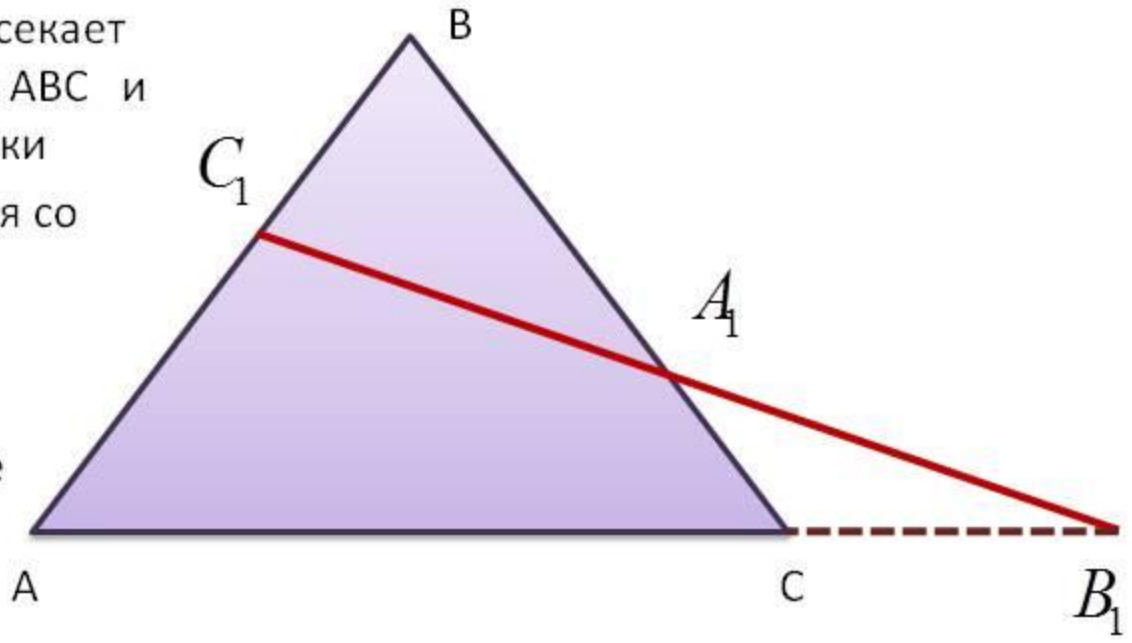
Теорема Менелая (теория).

Теорема:

Пусть некоторая прямая пересекает две стороны треугольника ABC и продолжение третьей. Точки A_1, B_1, C_1 это пересечения со сторонами BC, AC, AB или их продолжениями соответственно.

Тогда имеет место следующее равенство:

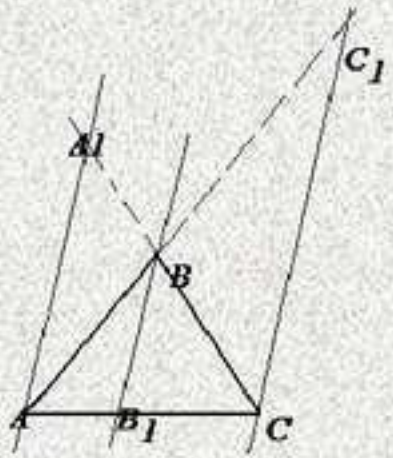
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

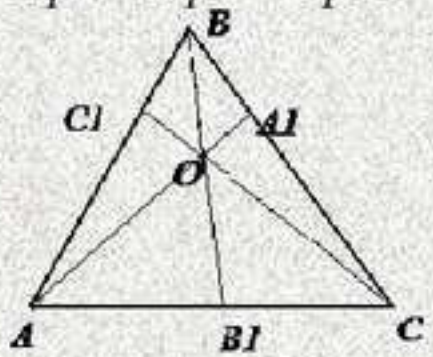


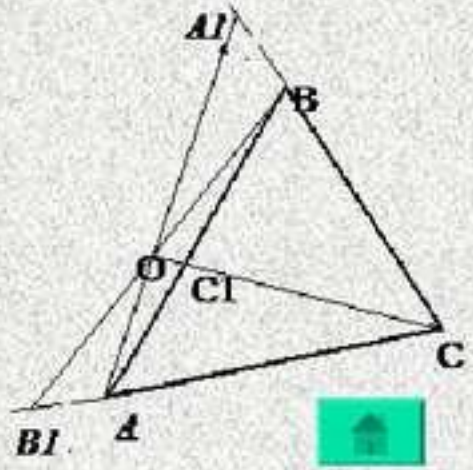
Теорема Чевы

Пусть в ΔABC на сторонах BC,AC,AB или их продолжениях взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1,не совпадающие с вершинами треугольника. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда выполняется равенство

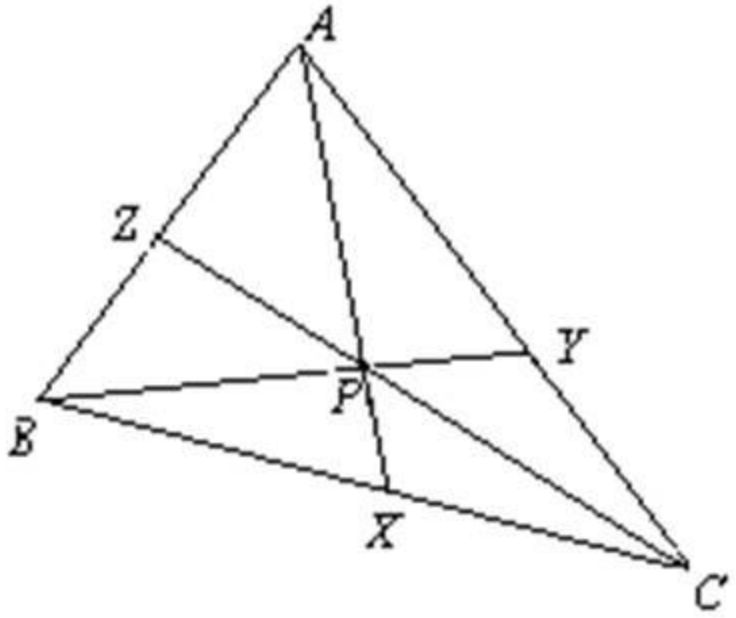
$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$







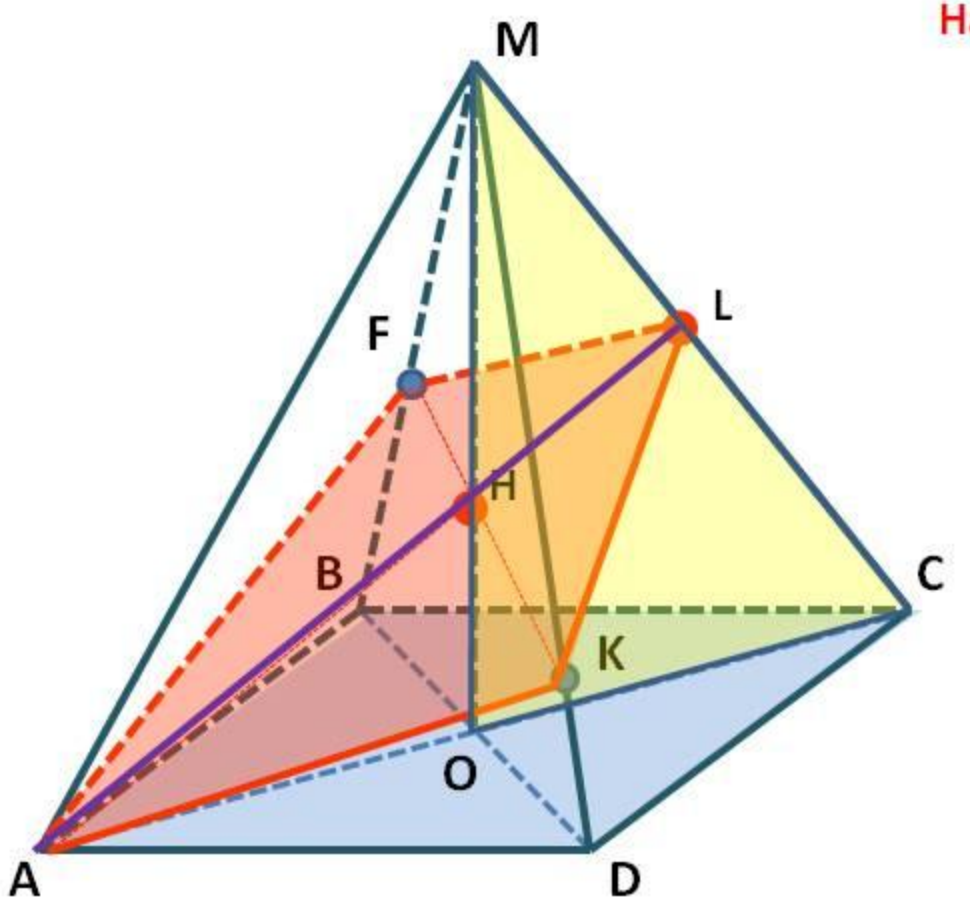
Теорема Чевы



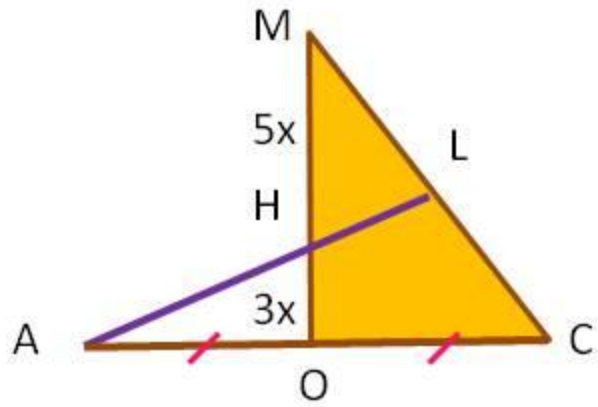
- ***Если три чевианы AX, BY, CZ (по одной из каждой вершины) треугольнка ABC конкурентны, то***

$$\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}\cdot\frac{|AZ|}{|ZB|}=1$$

Использование теоремы Менелая в стереометрических задачах.



Нахождение отношения ML:LC



По теореме Менелая для треугольника MOC получаем:

$$\frac{3x}{5x}\cdot\frac{ML}{LC}\cdot\frac{2}{1}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{ML}{LC}=\frac{5}{6}$$