

Дробно-линейная функция

обобщение

Функция $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ и её график.

Рассмотрите случаи когда а) $c = 0$ или в) $\frac{a}{c} = \frac{e}{d}$.

Если $c = 0$, то $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ – линейная функция.

Если $\frac{a}{c} = \frac{e}{d}$, то $c = \frac{ad}{b}$. Подставив значение c в формулу (1) получим:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax+b}{\frac{adx+bd}{b}} = \frac{(ax+b)b}{d(ax+b)} = \frac{e}{d}, \text{ то есть } y = \frac{e}{d} \text{ - линейная функция.}$$

Функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, где буквой x обозначена незави-

симая переменная, а буквами a, b, c и d – произвольные числа, причём $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$, называется дробно-линейной функцией.

Графиком любой дробно-линейной функции является гипербола.

График дробно-линейной функции получается из графика функции $y = \frac{k}{x}$ с помощью параллельных переносов вдоль осей координат, ветви гиперболы дробно-линейной функции симметричны относительно точки $(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$. Прямая $x = -\frac{d}{c}$ называется вертикальной асимптотой гиперболы. Прямая $y = \frac{a}{c}$ называется горизонтальной асимптотой.

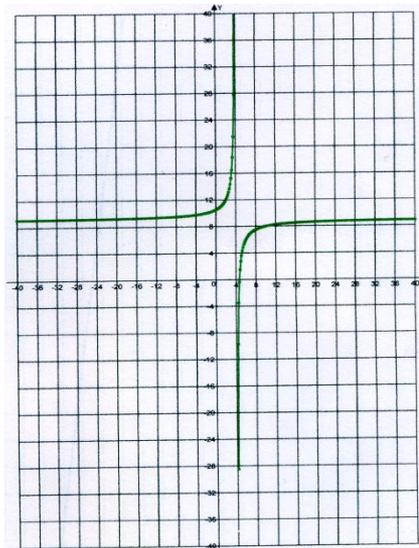
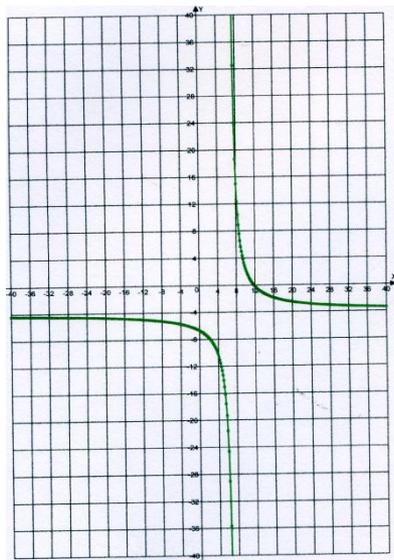
$$D(y) = \left(-\infty; -\frac{d}{c}\right) \cup \left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$$

$$E(y) = \left(-\infty; \frac{a}{c}\right) \cup \left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$$

Если $x = 0$, то $f(0) = \frac{b}{d}$, $d \neq 0$. То есть у функции есть нули – точка $A\left(0; \frac{b}{d}\right)$.

Если $y = 0$, то $x = -\frac{a}{c}$. Значит, если $a \neq 0$, то точка пересечения с осью X имеет координаты $\left(-\frac{a}{c}; 0\right)$. Если же $a = 0$, $b \neq 0$, то точек пересечения с осью абсцисс график дробно-линейной функции не имеет.

Функция убывает на промежутках всей области определения, если $bc-ad > 0$ и возрастает на промежутках всей области определения, если $bc-ad < 0$. Но это немонотонная функция.



Вертикальной асимптотой является прямая $x = -\frac{d}{c}$

горизонтальной асимптотой – прямая $y = \frac{a}{c}$.

Наибольшего и наименьшего значений функция не имеет.

Исследование функции

Результаты исследования функций.

Функции	График	$D(y)$	$E(y)$	Асимптота вертикальная	Асимптота горизонтальная	$f(x)=0$	$x=0$	$y>0$	$y<0$	Промежутки возрастания функции	Промежутки убывания функции
$y = \frac{2}{x}$											
$y = -\frac{6}{x}$											
$y = \frac{9}{x-3}$											
$y = \frac{9}{x} - 2$											
$y = \frac{8}{x+2} - 3$											
$y = \frac{x+1}{x-1}$											

