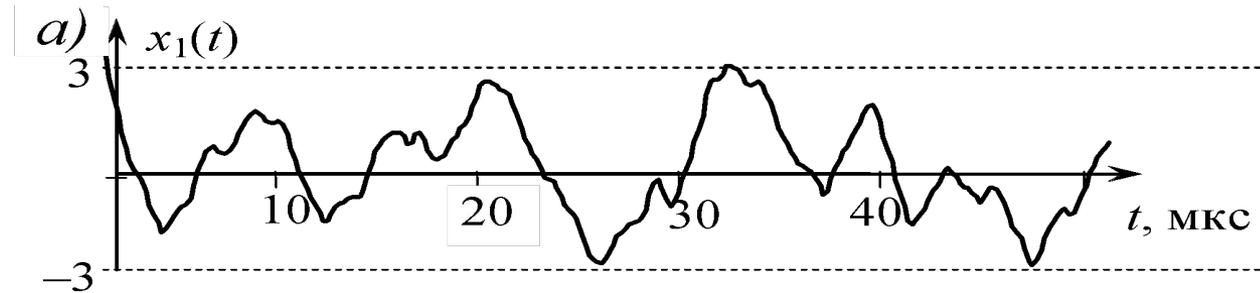


Корреляционная функция случайного процесса

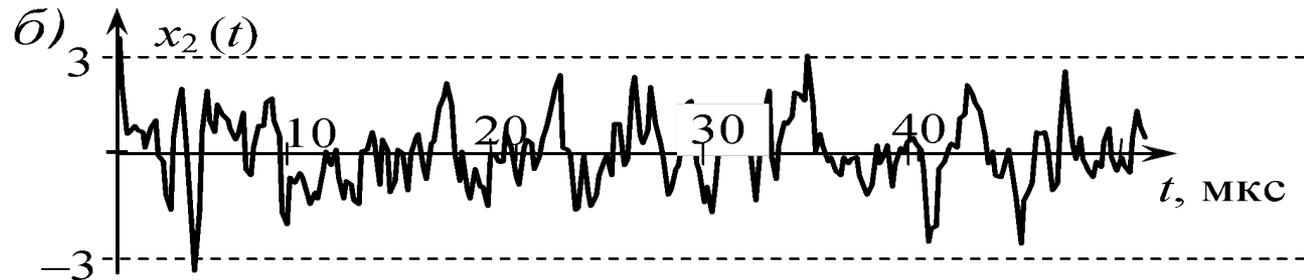
$$m_1 = 0$$

$$\sigma_1 = 1$$



$$m_2 = 0$$

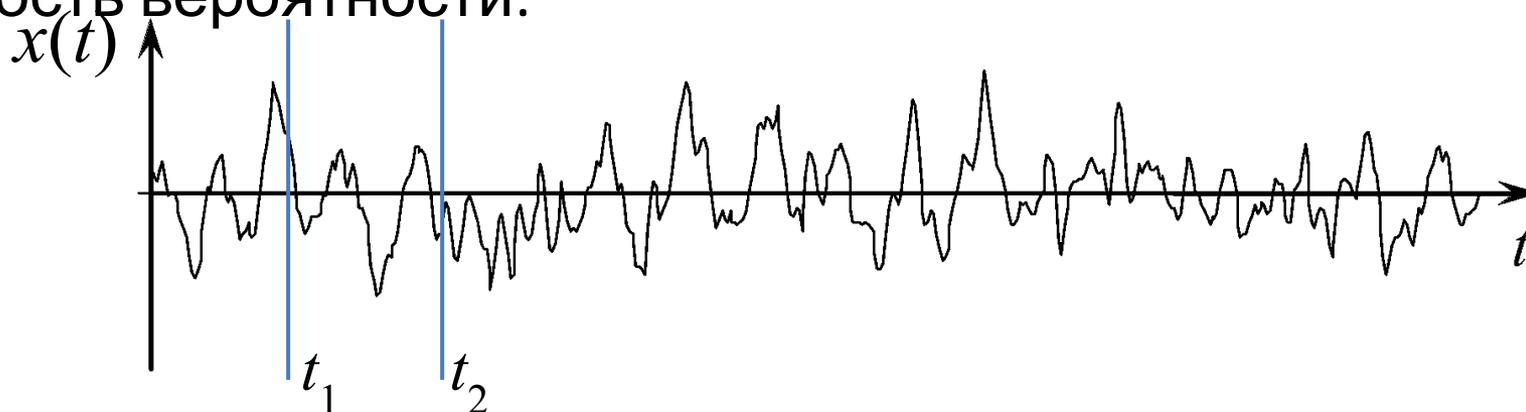
$$\sigma_2 = 1$$



Реализации двух случайных процессов с одинаковой плотностью вероятности, но различной скоростью протекания

Корреляционная функция характеризует скорость протекания случайного процесса

Автокорреляционная (корреляционная) функция
случайного процесса определяется через двумерную
плотность вероятности:



$$x_1 = x(t_1) \quad x_2 = x(t_2)$$

$$R_x(t_1, t_2) = \overline{(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) p(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= \overline{(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)} = \overline{x_1 x_2 - x_1 \bar{x}_2 - \bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2} = \\ &= \overline{x_1 x_2} - \overline{x_1 \cdot \bar{x}_2} - \overline{\bar{x}_1 \cdot x_2} + \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2} = \overline{x_1 x_2} - \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2} \end{aligned}$$

Корреляционная функция стационарного случайного процесса:

Для стационарного случайного процесса

$$\tau = t_2 - t_1$$

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1) = R_x(\tau) = \overline{(x - \bar{x})(x - \bar{x})} = \overline{xx} - (\bar{x})^2$$

Свойства корреляционной функции стационарного СП

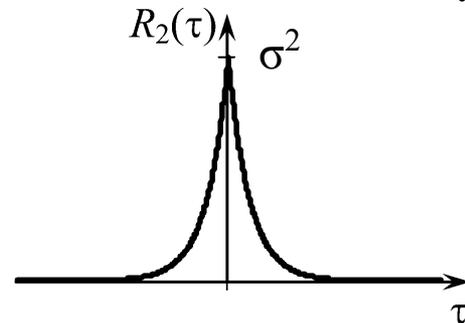
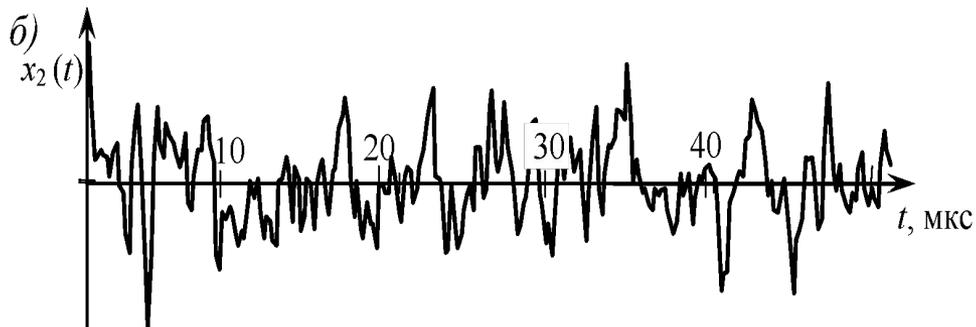
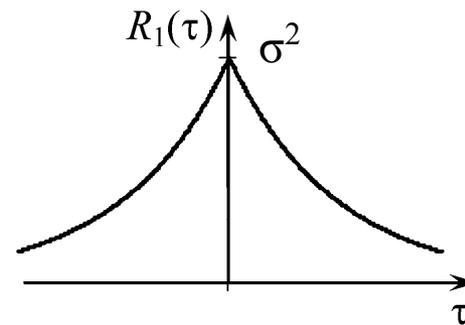
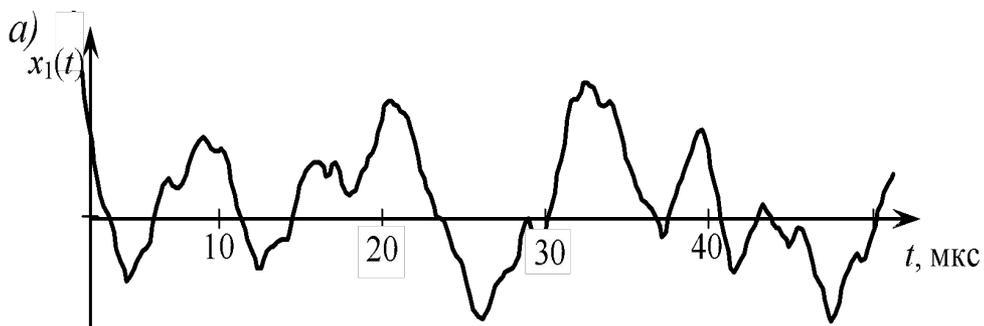
1. $R_x(-\tau) = R_x(\tau)$.

2. $R_x(0) = \sigma^2$.

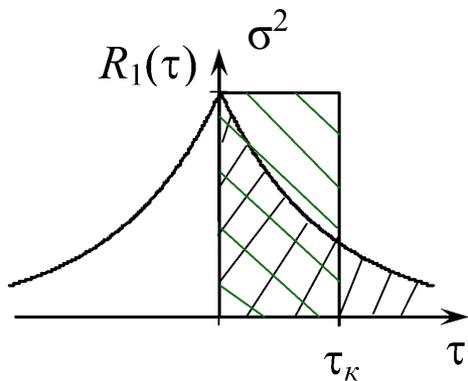
3. $R_x(\tau) \leq R_x(0)$.

*Нормированная
корреляционная функция*

$$r(\tau) = \frac{R(\tau)}{\sigma^2}$$



Время (интервал) корреляции стационарного случайного процесса



$$\sigma^2 \cdot \tau_k = \int_0^{\infty} |R(\tau)| d\tau$$

$$\tau_k = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} |R(\tau)| d\tau$$

Корреляционная функция гармонического сигнала со случайной равномерно распределенной фазой

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad p(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad -\pi < \varphi < \pi$$

$$R_x(t_1, t_2) = \overline{(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)} \quad \overline{f(\xi)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(\xi) d\xi$$

$$\bar{x} = \overline{A \cos(\omega_0 t + \varphi)} = \int_{-\pi}^{\pi} A \cos(\omega_0 t + \varphi) \frac{1}{2\pi} d\varphi = 0$$

$$R_x(t_1, t_2) = \overline{(x_1 - \bar{x}_1) \cos(\omega_0 t_2 + \varphi)} = \int_{-\pi}^{\pi} A \cos(\omega_0 t_1 + \varphi) \cos(\omega_0 t_2 + \varphi) \frac{1}{2\pi} d\varphi$$

Корреляционная функция гармонического сигнала со случайной равномерно распределенной фазой

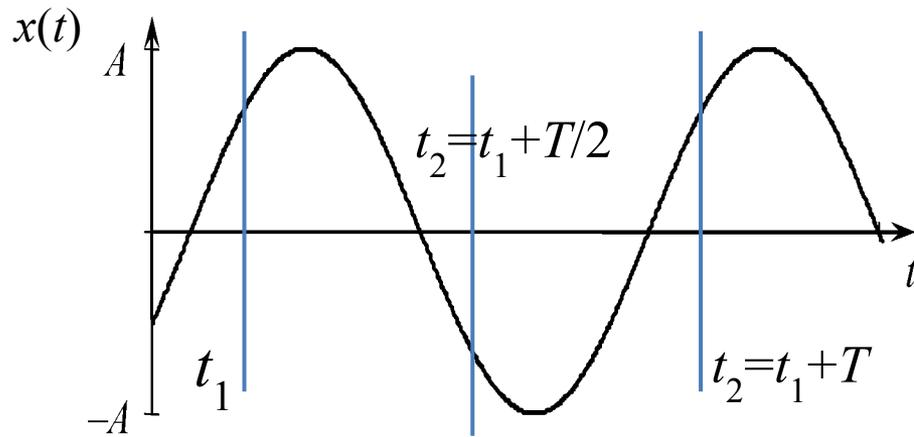
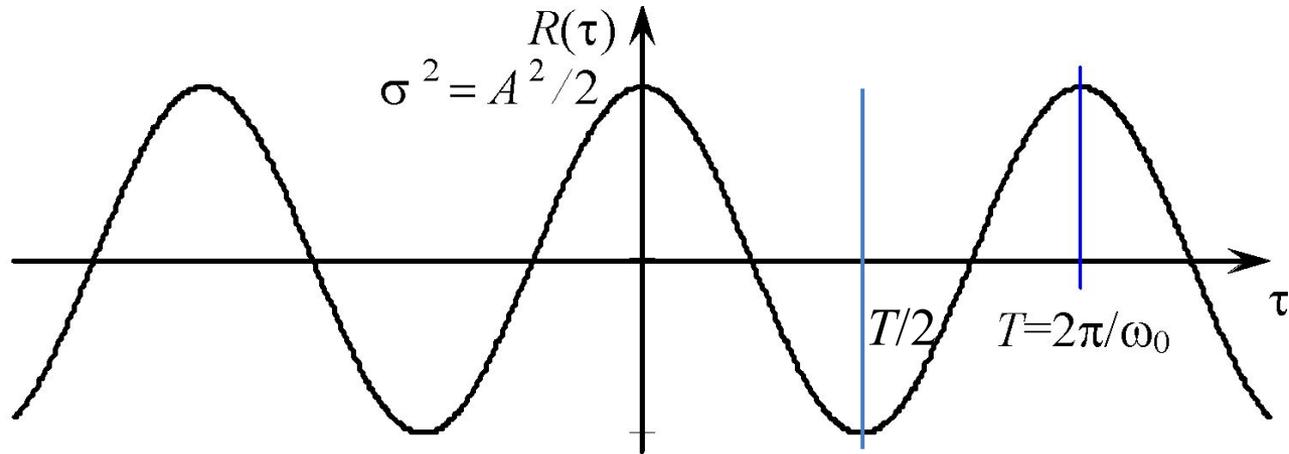
$$R_x(t_1, t_2) = \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(\omega_0 t_1 + \varphi) + \cos(\omega_0 t_2 + \varphi)] \frac{1}{2} d\varphi =$$

$$= \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t_1 + \varphi) \frac{1}{2} d\varphi + \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t_2 + \varphi) \frac{1}{2} d\varphi =$$

$$= \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 t_2 - t_1) \quad t_2 - t_1 = \tau$$

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$$

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$$



$$T = t_2 - t_1$$

Взаимная корреляционная функция

Характеризует корреляционную связь двух случайных процессов:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \overline{(x_1 - \bar{x}_1)(y_2 - \bar{y}_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}_1)(y_2 - \bar{y}_2) p(x_1, y_2) dx_1 dy_2$$

$$x_1 = x(t_1), \quad y_2 = y(t_2)$$

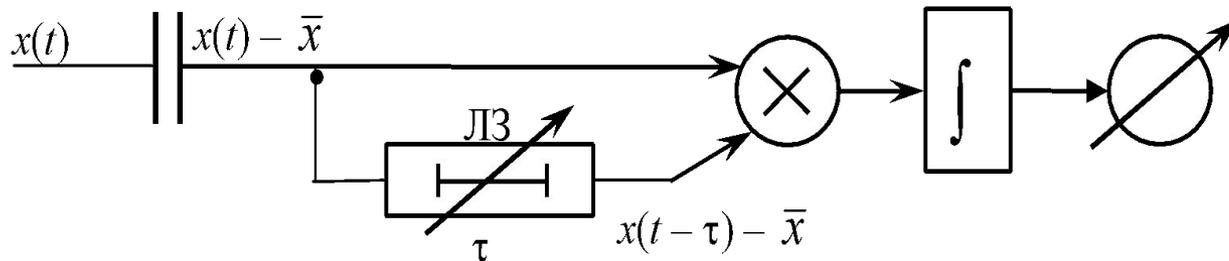
Случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$ называют **стационарно связанными**, если взаимно корреляционная функция зависит только от разности $\tau = t_2 - t_1$

Если случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$ **независимы**, то взаимно корреляционная функция равна нулю при любых значениях аргументов

$$\begin{aligned} R_{xy}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}_1)(y_2 - \bar{y}_2) p_1(x_1) p_2(y_2) dx_1 dy_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}_1) p_1(x_1) dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (y_2 - \bar{y}_2) p_2(y_2) dy_2 = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1 p_1(x_1) dx_1 - \bar{x}_1 \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1) dx_1 \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y_2 p_2(y_2) dy_2 - \bar{y}_2 \int_{-\infty}^{\infty} p_2(y_2) dy_2 \right) = \\ &= (\bar{x}_1 - \bar{x}_1)(\bar{y}_2 - \bar{y}_2) = 0 \end{aligned}$$

Экспериментальное определение корреляционной функции эргодического случайного процесса

$$R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \bar{x})(x(t + \tau) - \bar{x}) dt$$



Спектральная плотность мощности (спектр мощности, энергетический спектр)

эргодического случайного процесса $\bar{x} = 0$

$$S_T^{(i)}(\omega) = \int_0^T x_T^{(i)}(t) e^{-j\omega t} dt \quad W_T(\omega) = S_T^{(i)}(\omega) \cdot S_T^{(i)*}(\omega)$$

Энергия
реализации

$$E_T = \int_0^T (x_T^{(i)}(t))^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_T^{(i)}(\omega)|^2 d\omega$$

Средняя мощность
реализации

$$\frac{E_T}{T} = \overline{(x_T^{(i)}(t))^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_T(\omega)}{T} d\omega$$

Совершим предельный переход $T \rightarrow \infty$ (проведем усреднение по реализациям)

$$\overline{(x(t))^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_T(\omega)}{T} d\omega$$

**Спектральная плотность
мощности случайного
процесса**

$$W(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{W_T(\omega)}{T}$$

Свойства энергетического спектра

1. $W(\omega) \geq 0$

2. Теорема Винера - Хинчина

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

3. $W(-\omega) = W(\omega)$

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) (\cos(\omega\tau) - \sin(\omega\tau)) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau$$

4. Связь СПМ и дисперсии случайного процесса

$$\sigma^2 = R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W(\omega) d\omega$$

Односторонний спектр мощности (энергетический спектр)

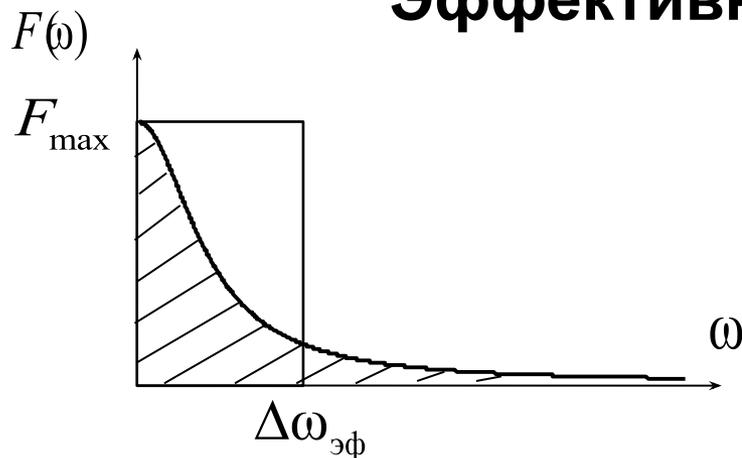
$$F(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} W(\omega), & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}$$

$$F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau$$

$$R_x(\tau) = \int_0^{\infty} F(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega$$

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega$$

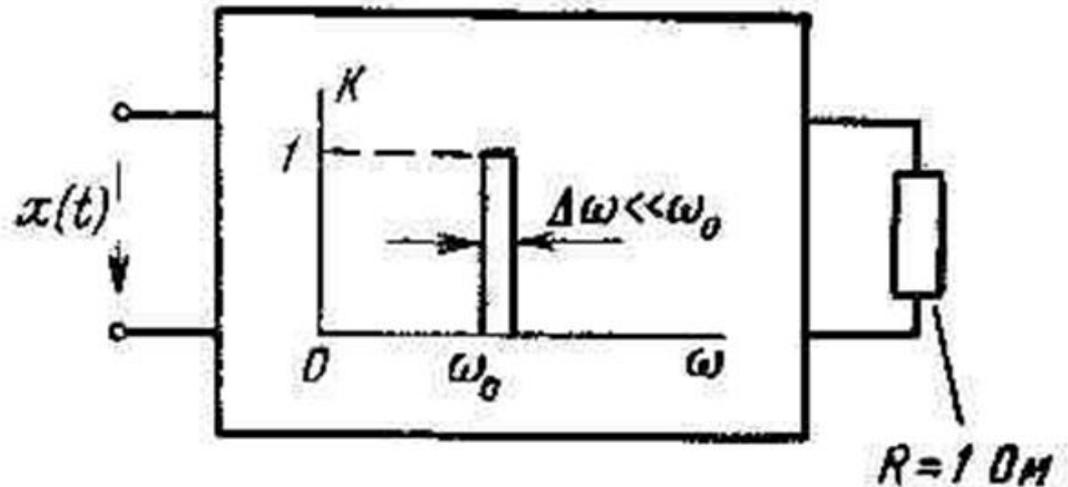
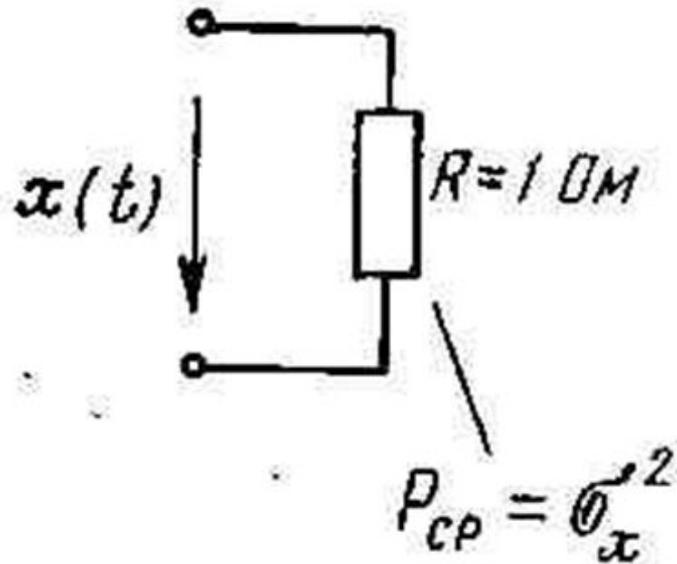
Эффективная ширина спектра



$$\Delta\omega_{\text{эф}} = \frac{1}{F_{\text{max}}} \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega$$

$$\Delta\omega_{\text{эф}} \cdot \tau_{\text{к}} = \frac{\pi}{2}$$

Физический смысл одностороннего спектра мощности (энергетического спектра)

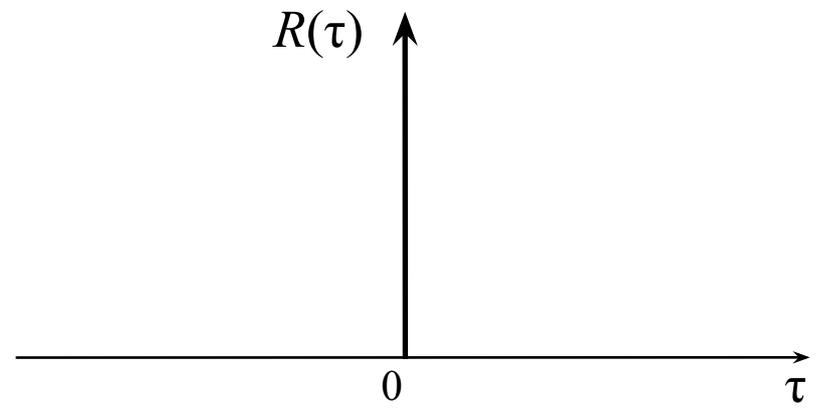
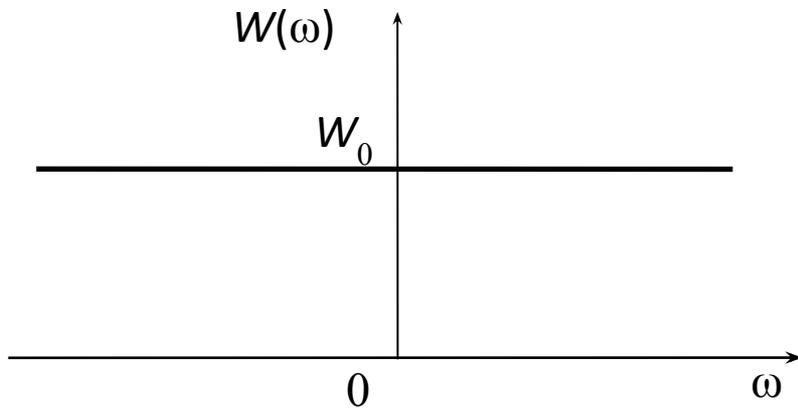


$$F(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{P_{cp}(\omega; \omega + \Delta\omega)}{\Delta\omega}$$

$$P_{cp}(\omega_1; \omega_2) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} R(\omega) d\omega$$

Примеры случайных процессов

Белый шум

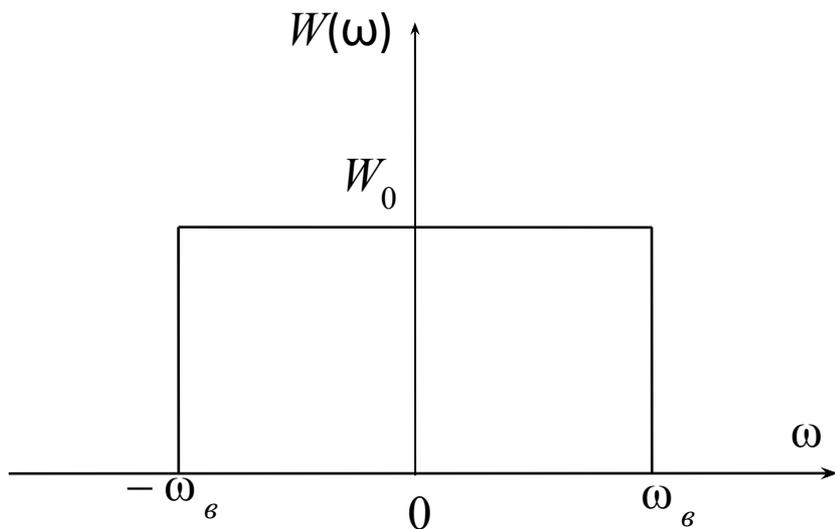


$$W(\omega) = W_0$$

$$R(\tau) = W_0 \delta(\tau)$$

$$\sigma^2 = \infty$$

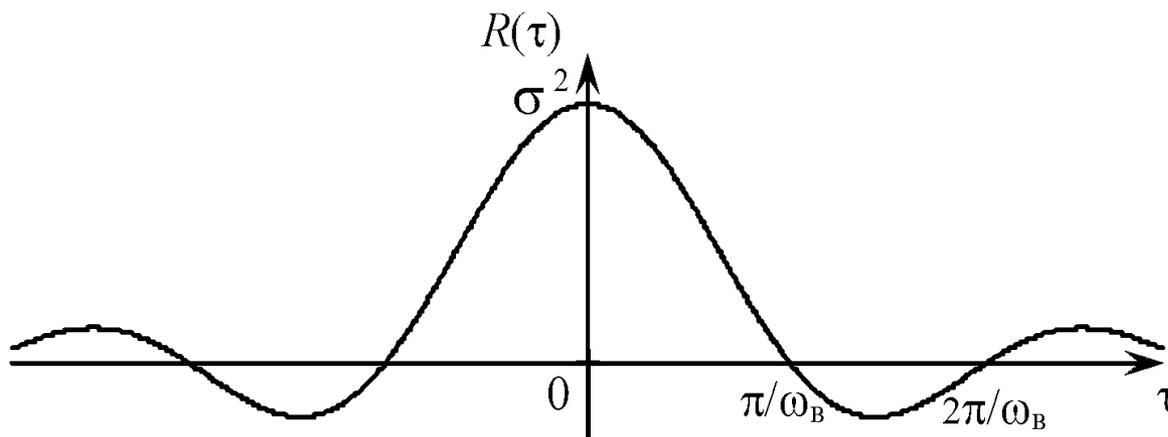
Белый шум с ограниченным спектром



$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_\epsilon}^{\omega_\epsilon} W_0 e^{j\omega\tau} d\omega =$$

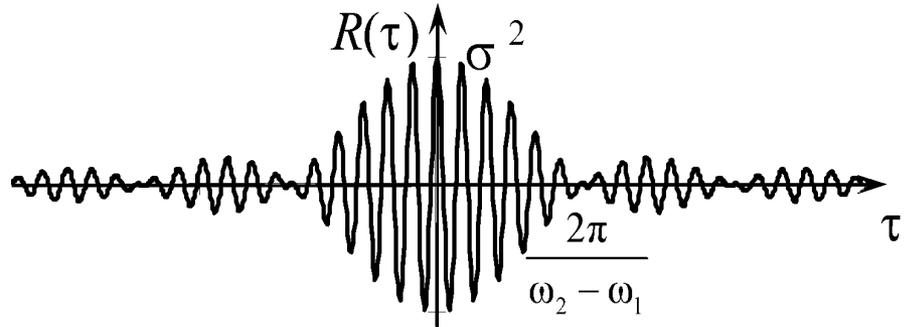
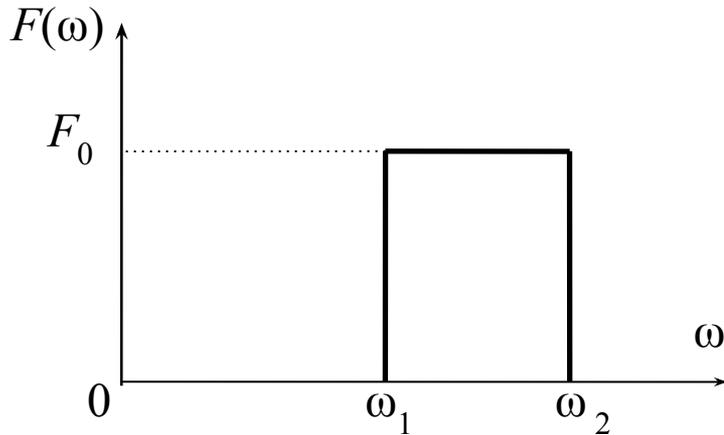
$$= \frac{W_0 (e^{j\omega_\epsilon\tau} - e^{-j\omega_\epsilon\tau})}{2\pi \cdot j} = \frac{W_0 \sin(\omega_\epsilon \tau)}{\pi \tau}$$

$$R(\tau) = \frac{W_0 \omega_B}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_B \tau)}{\omega_B \tau}$$



$$\sigma^2 = \frac{W_0 \omega_\epsilon}{\pi} = F_0 \omega_\epsilon$$

Шум с равномерным спектром в полосе частот от ω_1 до ω_2



$$R(\tau) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} F_0 \cos(\omega\tau) d\omega = \frac{F_0}{\tau} (\sin(\omega_2\tau) - \sin(\omega_1\tau))$$

$$R(\tau) = F_0(\omega_2 - \omega_1) \cdot \frac{\sin\left[\frac{(\omega_2 - \omega_1)\tau}{2}\right]}{\frac{(\omega_2 - \omega_1)\tau}{2}} \cdot \cos\left[\frac{(\omega_1 + \omega_2)\tau}{2}\right]$$

Источники шумов в радиотехнических устройствах

Тепловой шум

$$F(\omega) = \frac{2}{\pi} kTR$$

формула Найквиста

$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град — постоянная Больцмана,

T — абсолютная температура, в градусах Кельвина,

R — сопротивление проводника, Ом.

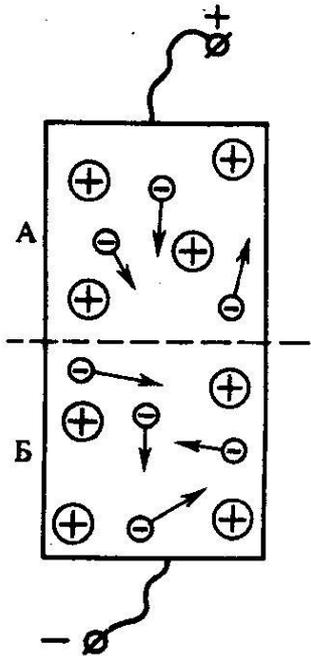
Дисперсия в полосе частот

$$\sigma^2 = \frac{2}{\pi} kTR \cdot \Delta\omega = 4kTR \cdot \Delta f$$

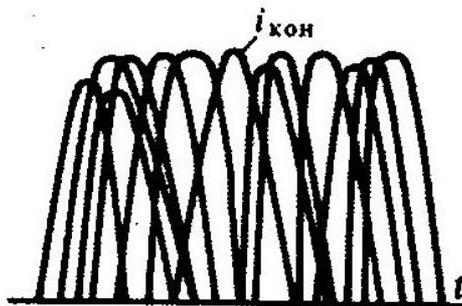
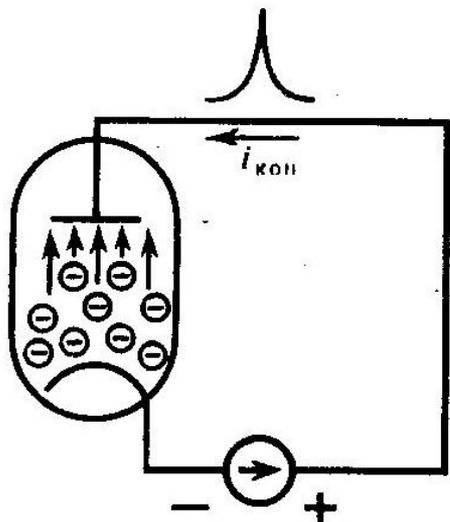
Пример: дисперсия теплового шума, создаваемого резистором $R = 1$ кОм в полосе частот $\Delta f = 1$ МГц при комнатной температуре:

$$B^2 = 4 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 293 \cdot 10^3 \cdot 10^6 = 1,6 \cdot 10^{-11} \quad 2$$

$$U_{\text{эфф}} = \sigma = 4 \cdot 10^{-6} \text{ В} = 4 \text{ мкВ.}$$



Дробовой шум



Каждый электрон при движении создает короткий импульс тока, а все вместе – случайную последовательность

Количество импульсов n за произвольное время наблюдения T подчиняется закону распределения Пуассона:

$$P(n) = \frac{(vT)^n}{n!} e^{-vT}$$

v – среднее число импульсов за 1 с

Средний ток (постоянная составляющая тока) равен $i_0 = ve$

Для закона

$$\sigma_n^2 = \bar{n} = vT$$

Пуассона

Фактическое значение тока за время T равно

$$i = \frac{ne}{T}$$

Дисперсия тока

равна $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона,

T – время усреднения тока

$$\sigma_i^2 = \sigma_n^2 \frac{e^2}{T^2} = \frac{\bar{n}e^2}{T^2} = \frac{vTe^2}{T^2} = \frac{ve^2}{T} = \frac{i_0e}{T}$$

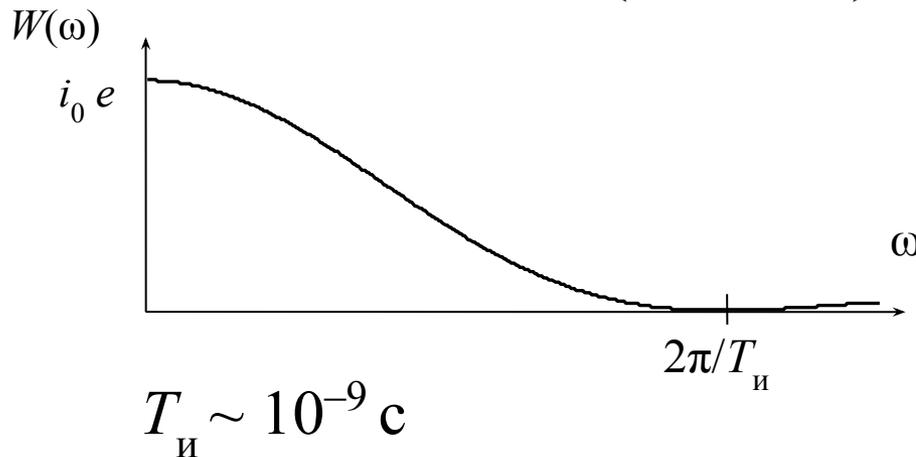
Спектр мощности дробового шума

Предположим для определенности, что импульс тока, создаваемый одним пролетающим электроном, имеет прямоугольную форму

Энергетический спектр одного импульса

$$|S_e(\omega)|^2 = e^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega T_{\text{и}}}{2}\right)}{\frac{\omega T_{\text{и}}}{2}} \right)^2$$

$$W(\omega) = ve^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega T_{\text{и}}}{2}\right)}{\frac{\omega T_{\text{и}}}{2}} \right)^2 = i_0 e \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega T_{\text{и}}}{2}\right)}{\frac{\omega T_{\text{и}}}{2}} \right)^2$$



$$F(\omega) = \frac{i_0 e}{\pi}$$

формула Шотки

Пример: дисперсия дробового шума диода в режиме насыщения при токе $i_0 = 100$ мА и полосе частот 1 МГц:

$$\sigma_i^2 = \frac{i_0 e}{\pi} \cdot \Delta\omega = \frac{0,1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{\pi} 2\pi \cdot 10^6 = 3,2 \cdot 10^{-14} \text{ А}^2,$$

Эффективное значение шумового тока $\sigma_i = 1,79 \cdot 10^{-7} \approx 0,18$ мкА.

При сопротивлении нагрузки 1 кОм эффективное значение напряжения будет равным $U_{\text{эфф}} = 1,79 \cdot 10^{-4} \text{ В} = 179$ мкВ

В транзисторах существует несколько источников шума.

Основными из них являются следующие:

- тепловой шум сопротивления базы, как электрода с самым большим сопротивлением;
- дробовой шум эмиттерного перехода;
- дробовой шум коллекторного перехода;
- шум токораспределения: носители, прошедшие через эмиттерный переход, могут попадать как на коллектор, так и на базу (этот процесс является случайным и вносит свой вклад в шум транзистора);
- шум $1/f$, или фликкер-эффект. Спектр мощности этого шума зависит от частоты как $1/f$ и поэтому он проявляется на самых низких частотах.