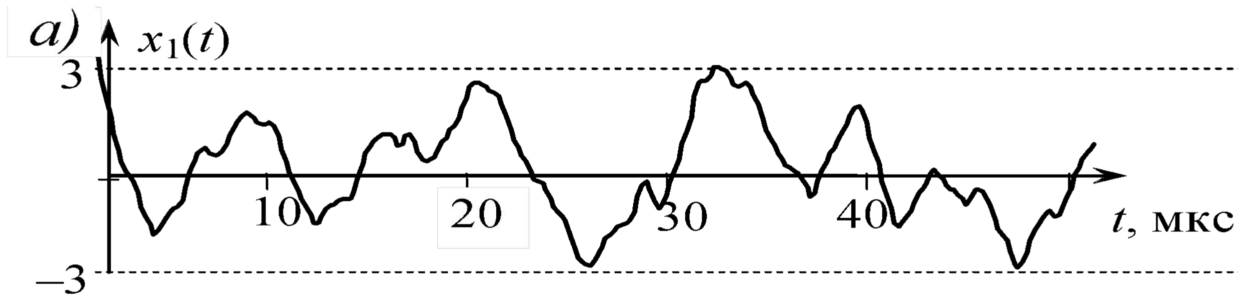
Корреляционная функция случайного процесса

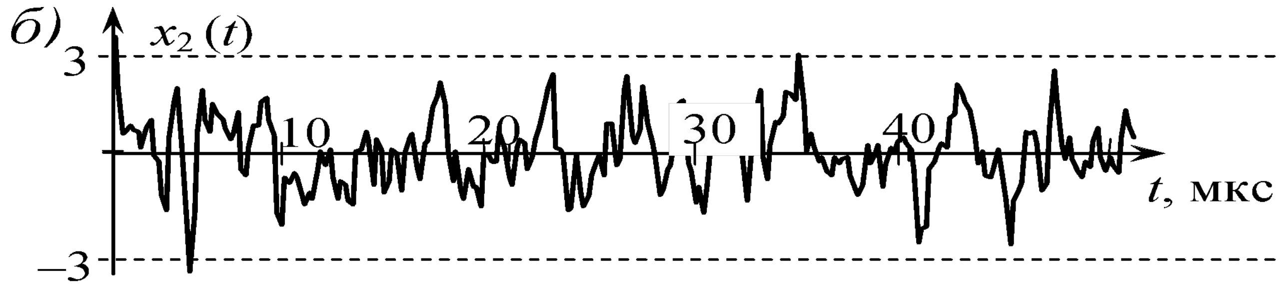
$$m_1 = 0$$

$$\sigma_1 = 1$$



$$m_2 = 0$$

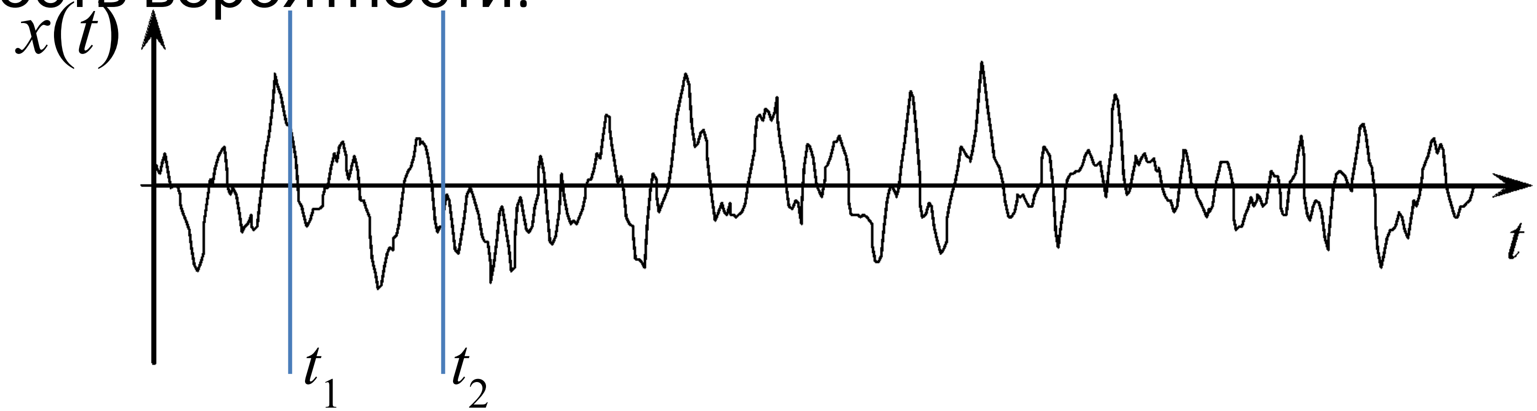
$$\sigma_2 = 1$$



Реализации двух случайных процессов с одинаковой плотностью вероятности, но различной скоростью протекания

Корреляционная функция характеризует скорость протекания случайного процесса

Автокорреляционная (корреляционная) функция случайного процесса определяется через двумерную плотность вероятности:



$$x_1 = x(t_1) \quad x_2 = x(t_2)$$

$$\boxed{R_x(t_1,t_2) = \overline{\left(x_1 - \overline{x_1}\right)\left(x_2 - \overline{x_2}\right)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(x_1 - \overline{x_1}\right)\left(x_2 - \overline{x_2}\right) p(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\,x_1\,\mathrm{d}\,x_2}$$

$$R_x(t_1,t_2) = \overline{\left(x_1 - \overline{x_1}\right)\left(x_2 - \overline{x_2}\right)} = \overline{x_1 x_2 - x_1 \overline{x_2} - \overline{x_1} x_2 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}} =$$

$$= \overline{x_1 x_2} - \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} - \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = \overline{x_1 x_2} - \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$$

Корреляционная функция стационарного случайного процесса:

Для стационарного случайного процесса $\tau = t_2 - t_1$

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1) = R_x(\tau) = \overline{\left(x - \bar{x}\right)\left(x - \bar{x}\right)} = \overline{xx} - \left(\bar{x}\right)^2$$

Свойства корреляционной функции стационарного СП

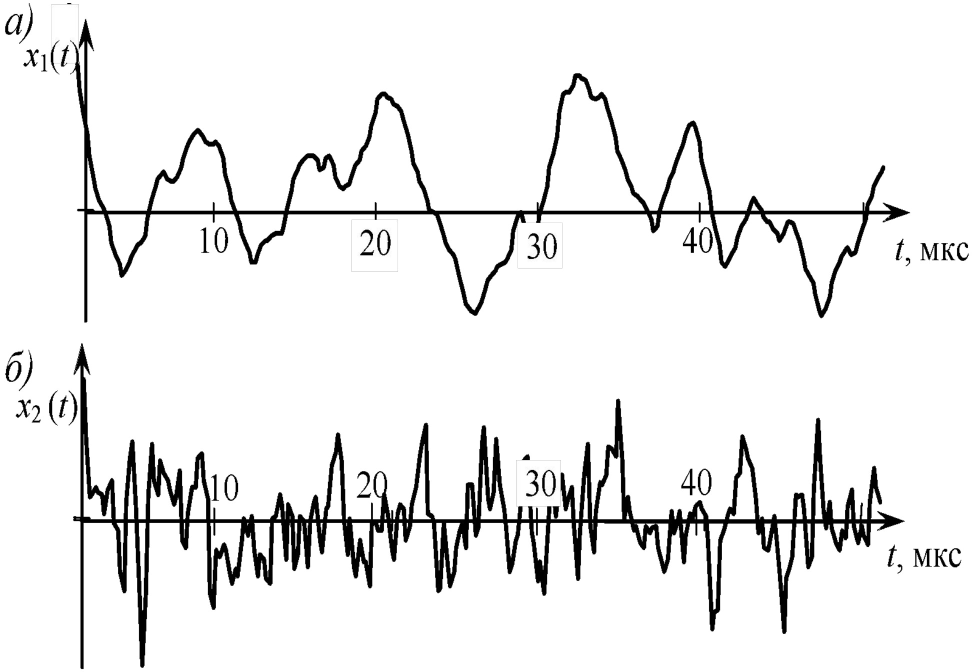
1. $\boldsymbol{R_x(-\tau) = R_x(\tau)}$.

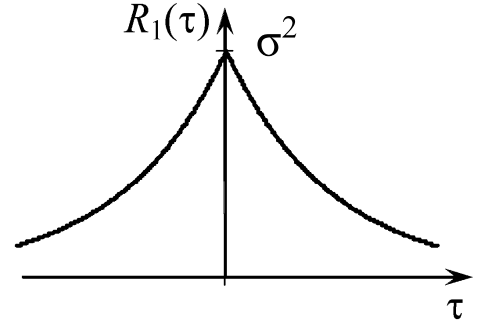
2. $\boldsymbol{R_x(0) = \sigma^2}$.

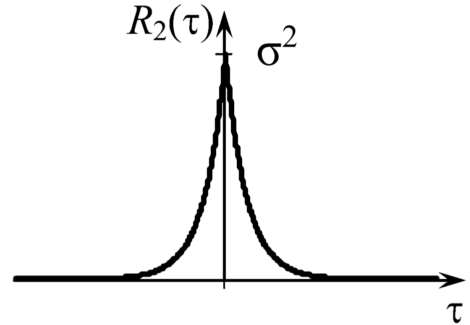
3. $\boldsymbol{R_x(\tau) \le R_x(0)}$.

Нормированная корреляционная функция

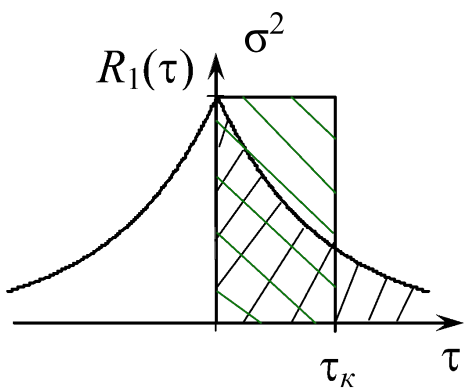
$$r(\tau) = \frac{R(\tau)}{\sigma^2}$$







Время (интервал) корреляции стационарного случайного процесса



$$\sigma^2 \cdot \tau_к = \int_0^\infty |R(\tau)| \, d\tau$$

$$\boxed{\tau_к = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty |R(\tau)| \, d\tau}$$

Корреляционная функция гармонического сигнала со случайной равномерно распределенной фазой

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad p(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \text{ при } -\pi < \varphi < \pi$$

$$R_x(t_1, t_2) = \overline{(x_1 - \overline{x_1})(x_2 - \overline{x_2})} \qquad \overline{f(\xi)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, p(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$\overline{x} = \overline{A\cos(\omega_0 t + \varphi)} = \int_{-\pi}^{\pi} A\cos(\omega_0 t + \varphi)\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\varphi = 0$$

$$R_x(t_1, t_2) = \overline{x_1 x_2} = \int_{-\pi}^{\pi} A\cos(\omega_0 t_1 + \varphi)\, A\cos(\omega_0 t_2 + \varphi)\, p(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Корреляционная функция гармонического сигнала со случайной равномерно распределенной фазой

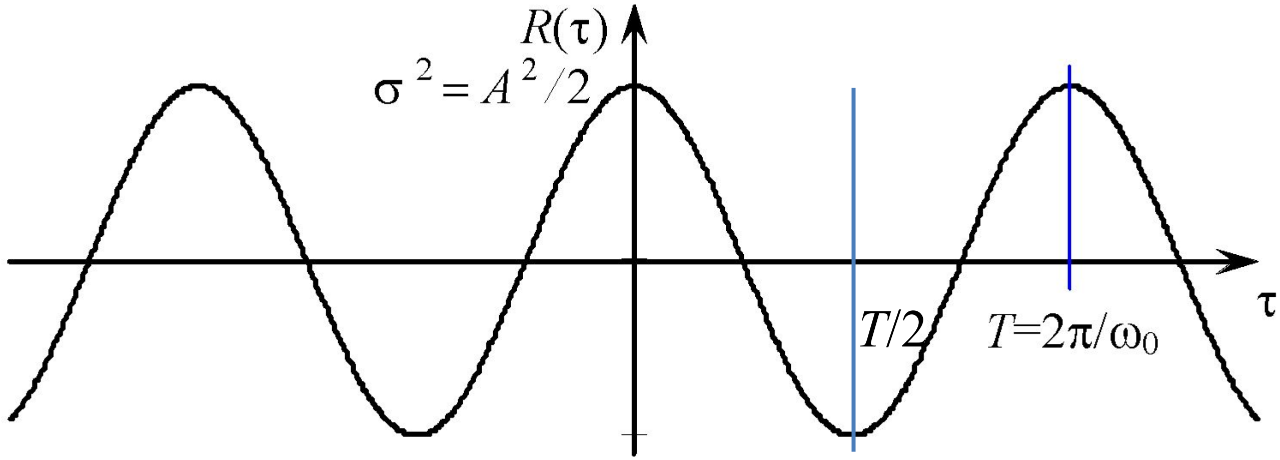
$$R_x(t_1,t_2) = \frac{A^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\left(\omega_0(t_1+t_2)+2\varphi\right)+\cos\left(\omega_0(t_2-t_1)\right)\right]\frac{1}{2\pi}\,d\varphi =$$

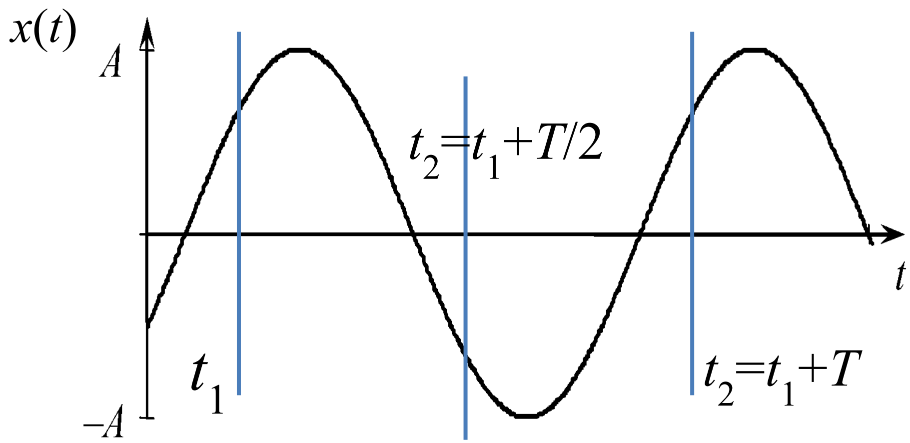
$$= \frac{A^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\omega_0(t_1+t_2)+2\varphi\right)\frac{1}{2\pi}\,d\varphi + \frac{A^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\omega_0(t_2-t_1)\right)\frac{1}{2\pi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos\left(\omega_0(t_2-t_1)\right) \qquad t_2-t_1=\tau$$

$$\boxed{R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)}$$

$$\boxed{R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 \tau)}$$





$$\mathrm{T} = t_2 - t_1$$

Взаимная корреляционная функция

Характеризует корреляционную связь двух случайных процессов:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \overline{(x_1 - \overline{x_1})(y_2 - \overline{y_2})} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \overline{x_1})(y_2 - \overline{y_2})\, p(x_1, y_2)\, dx_1 dy_2$$

$$x_1 = x(t_1), \quad y_2 = y(t_2)$$

Случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$ называют ***стационарно связанными***, если взаимно корреляционная функция зависит только от разности $\tau = t_2 - t_1$

Если случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$ **независимы**, то взаимно корреляционная функция равна нулю при любых значениях аргументов

$$R_{xy}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\overline{x_1})(y_2-\overline{y_2})p_1(x_1)p_2(y_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_2=$$

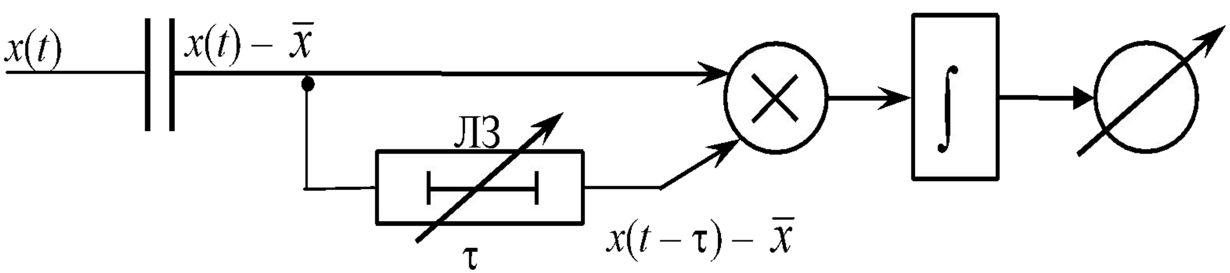
$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\overline{x_1})p_1(x_1)\mathrm{d}x_1\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(y_2-\overline{y_2})p_2(y_2)\mathrm{d}y_2=$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{\infty}x_1p_1(x_1)\mathrm{d}x_1-\overline{x_1}\int_{-\infty}^{\infty}p_1(x_1)\mathrm{d}x_1\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}y_2p_2(y_2)\mathrm{d}y_2-\overline{y_2}\int_{-\infty}^{\infty}p_2(y_2)\mathrm{d}y_2\right)=$$

$$=\left(\overline{x_1}-\overline{x_1}\right)\left(\overline{y_2}-\overline{y_2}\right)=0$$

Экспериментальное определение корреляционной функции эргодического случайного процесса

$$R_y(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left(x(t) - \bar{x}\right)\left(x(t+\tau) - \bar{x}\right) \mathrm{d}t$$



Спектральная плотность мощности (спектр мощности, энергетический спектр)

эргодического случайного процесса с $\bar{x} = 0$

$$\dot{S}_T^{(i)}(\omega) = \int_0^T x_T^{(i)}(t)\, e^{-j\omega t}\, \mathrm{d}t \qquad W_T(\omega) = \dot{S}_T^{(i)}(\omega)\, \overset{*}{\dot{S}}{}_T^{(i)}(\omega)$$

Энергия реализации

$$E_T = \int_0^T \left(x_T^{(i)}(t)\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\dot{S}_T^{(i)}(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega$$

Средняя мощность реализации

$$\frac{E_T}{T} = \overline{\left(x_T^{(i)}(t)\right)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_T(\omega)}{T}\, \mathrm{d}\omega$$

Совершим предельный переход $T \to \infty$ (проведем усреднение по реализациям)

$$\overline{\left(x(t)\right)^2} = \sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{W_T(\omega)}{T}\, \mathrm{d}\omega$$

Спектральная плотность мощности случайного процесса

$$\boxed{W(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{W_T(\omega)}{T}}$$

Свойства энергетического спектра

1. $W(\omega) \geq 0$

2. ***Теорема Винера - Хинчина***

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \qquad R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

3. $W(-\omega) = W(\omega)$

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\left(\cos(\omega\tau) - j\sin(\omega\tau)\right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\cos(\omega\tau)\, d\tau$$

4. Связь СПМ и дисперсии случайного процесса

$$\sigma^2 = R_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega)\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} W(\omega)\, d\omega$$

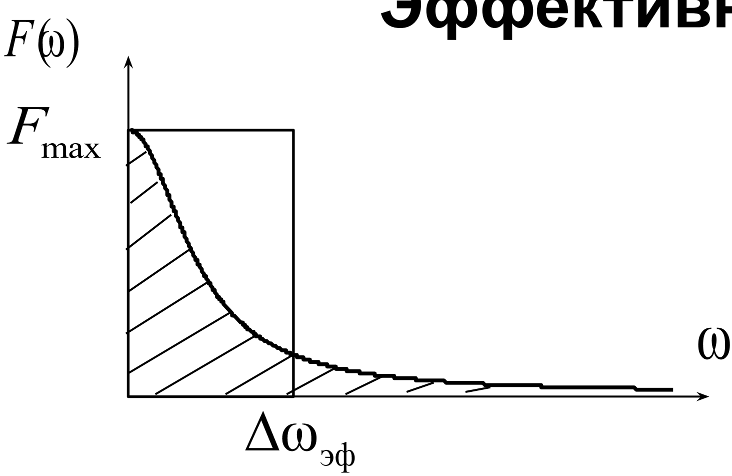
Односторонний спектр мощности (энергетический спектр)

$$\boxed{F(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} W(\omega), & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}}$$

$$F(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R_x(\tau)\cos(\omega\tau)\,d\tau \qquad R_x(\tau) = \int_0^\infty F(\omega)\cos(\omega\tau)\,d\omega$$

$$\boxed{\sigma^2 = \int_0^\infty F(\omega)\,d\omega}$$

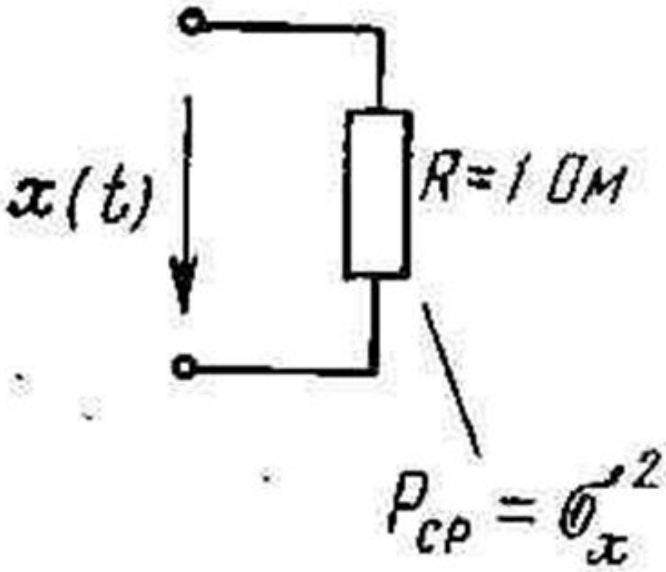
Эффективная ширина спектра

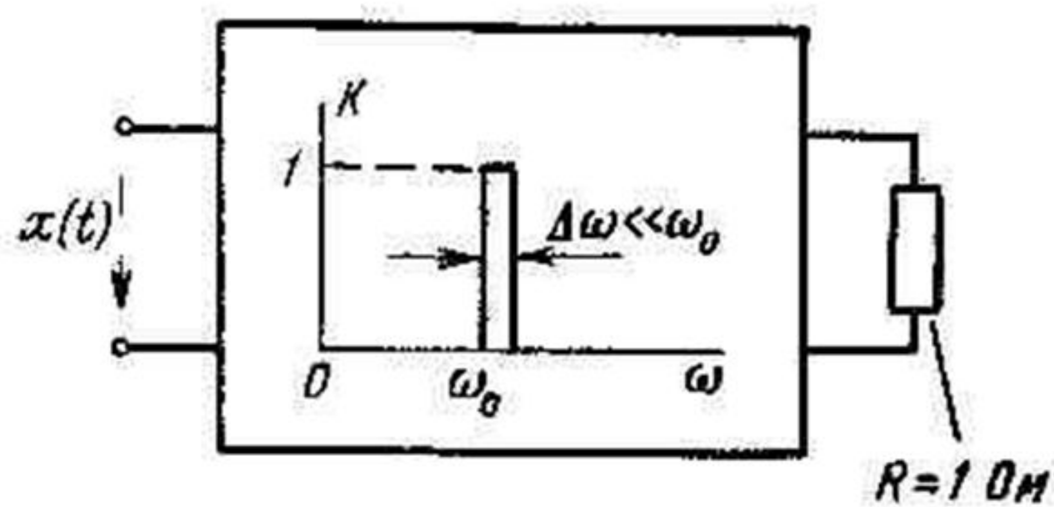


$$\boxed{\Delta\omega_{эф} = \frac{1}{F_{max}}\int_0^\infty F(\omega)\,d\omega}$$

$$\boxed{\Delta\omega_{эф}\cdot\tau_к = \frac{\pi}{2}}$$

Физический смысл одностороннего спектра мощности (энергетического спектра)



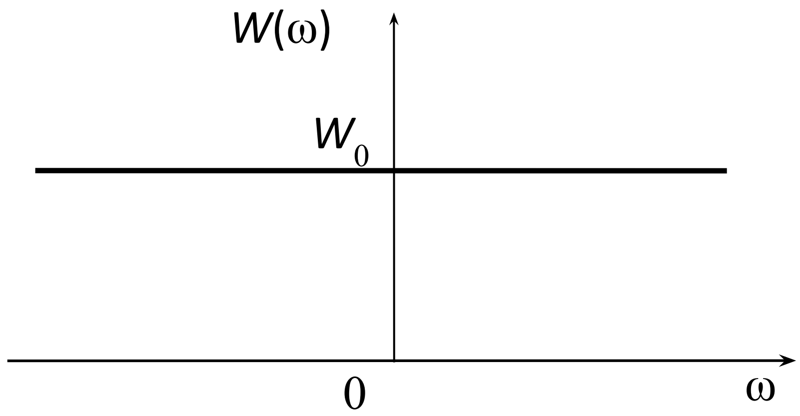


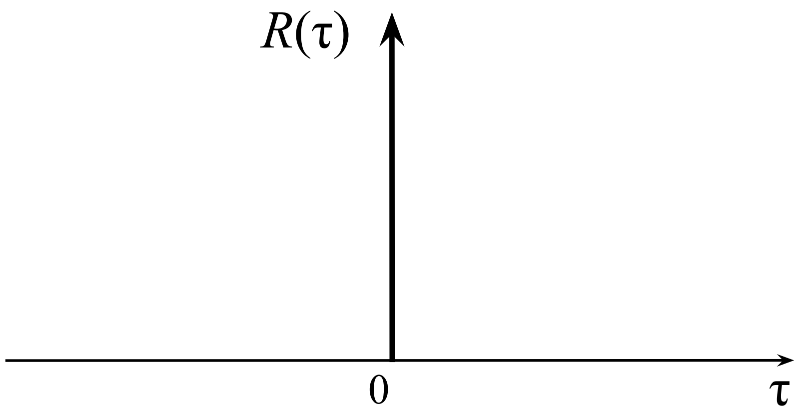
$$F(\omega) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{P_{cp}(\omega; \omega + \Delta\omega)}{\Delta\omega}$$

$$P_{cp}(\omega_1; \omega_2) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} F(\omega)\, d\omega$$

Примеры случайных процессов

Белый шум



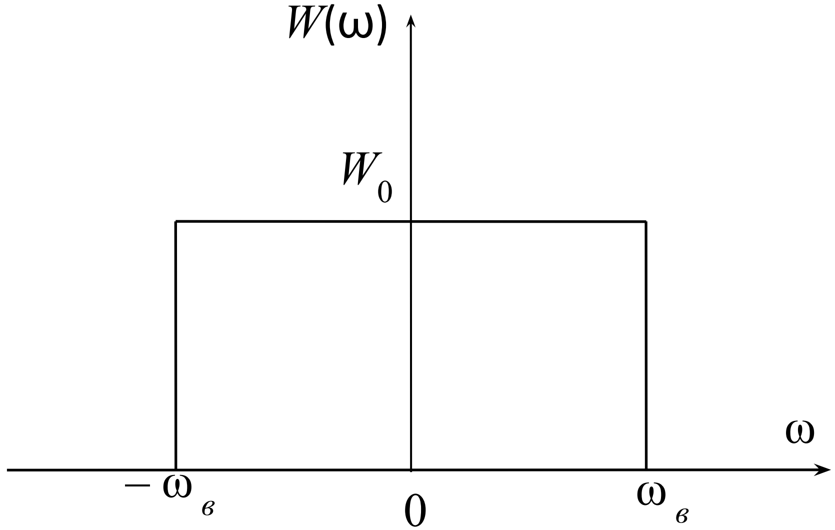


$$W(\omega) = W_0$$

$$R(\tau) = W_0\,\delta(\tau)$$

$$\sigma^2 = \infty$$

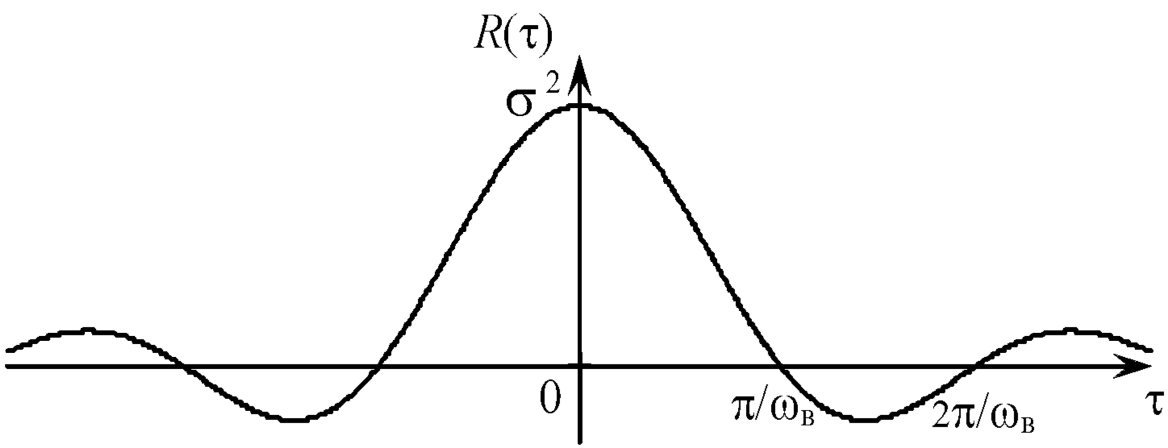
Белый шум с ограниченным спектром



$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_в}^{\omega_в} W_0 e^{j\omega\tau}\, d\omega =$$

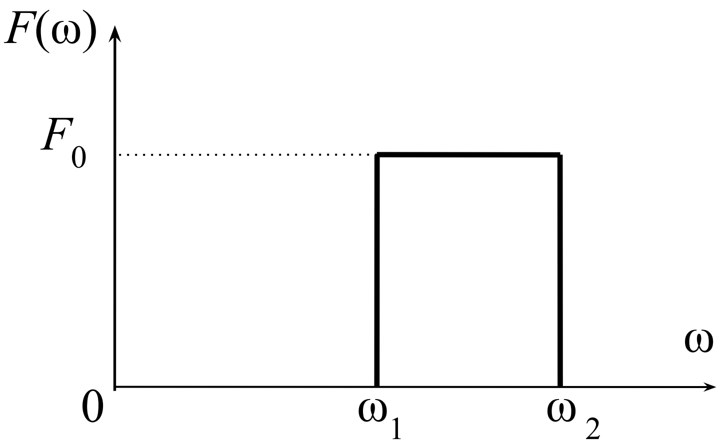
$$= \frac{W_0\left(e^{j\omega_в\tau} - e^{-j\omega_в\tau}\right)}{2\pi \cdot j\tau} = \frac{W_0 \sin(\omega_в\tau)}{\pi\tau}$$

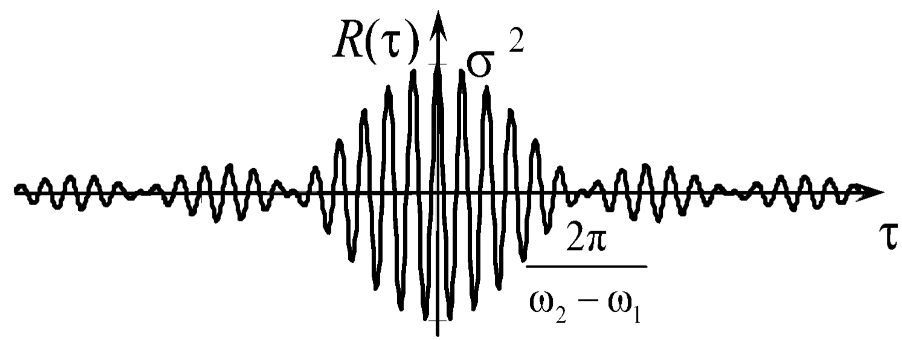
$$R(\tau) = \frac{W_0\omega_B}{\pi}\cdot\frac{\sin(\omega_B\tau)}{\omega_B\tau}$$



$$\sigma^2 = \frac{W_0\omega_в}{\pi} = F_0\omega_в$$

Шум с равномерным спектром в полосе частот от ω_1 до ω_2



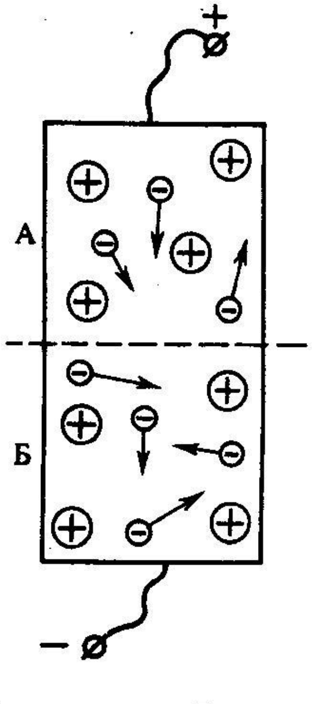


$$R(\tau) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} F_0 \cos(\omega\tau)\, d\omega = \frac{F_0}{\tau}\left(\sin(\omega_2\tau) - \sin(\omega_1\tau)\right)$$

$$R(\tau) = F_0(\omega_2 - \omega_1) \cdot \frac{\sin\left[\dfrac{(\omega_2-\omega_1)\tau}{2}\right]}{\dfrac{(\omega_2-\omega_1)\tau}{2}} \cdot \cos\left[\frac{(\omega_1+\omega_2)\tau}{2}\right]$$

Источники шумов в радиотехнических устройствах

Тепловой шум



$$\boxed{F(\omega) = \frac{2}{\pi} kTR}$$

формула Найквиста

$\boldsymbol{k} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град — постоянная Больцмана,

$\boldsymbol{T}$ — абсолютная температура, в градусах Кельвина,

$\boldsymbol{R}$ — сопротивление проводника, Ом.

Дисперсия в полосе частот

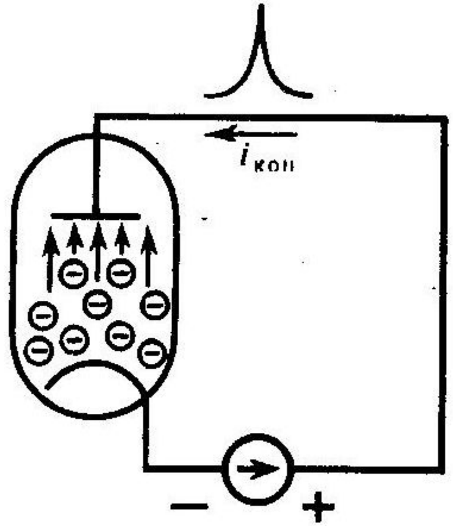
$$\sigma^2 = \frac{2}{\pi} kTR \cdot \Delta\omega = 4kTR \cdot \Delta f$$

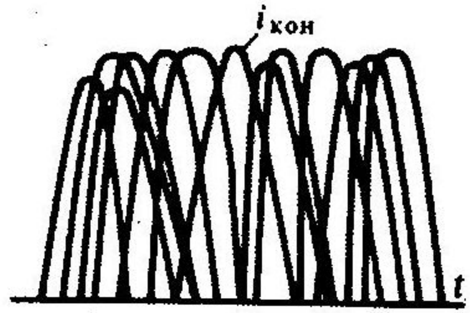
Пример: дисперсия теплового шума, создаваемого резистором $R = 1$ кОм в полосе частот $\Delta f = 1$ МГц при комнатной температуре:

$$\sigma^2 = 4 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 293 \cdot 10^3 \cdot 10^6 = 1{,}6 \cdot 10^{-11}\ \text{В}^2$$

$$U_{\text{эфф}} = \sigma = 4 \cdot 10^{-6}\ \text{В} = 4\ \text{мкВ}.$$

Дробовой шум





Каждый электрон при движении создает короткий импульс тока, а все вместе – случайную последовательность импульсов.

Количество импульсов тока за произвольное время наблюдения *T* подчиняется закону распределения Пуассона:

$$P(n) = \frac{(\nu T)^n}{n!} e^{-\nu T}$$

ν – среднее число импульсов за 1 с

Средний ток (постоянная составляющая тока) равен $i_0 = \nu e$

Для закона Пуассона $\sigma_n^2 = \bar{n} = \nu T$

Фактическое значение тока за время *T* равно $i = \dfrac{ne}{T}$

Дисперсия тока равна

$$\sigma_i^2 = \sigma_n^2 \frac{e^2}{T^2} = \frac{\bar{n} e^2}{T^2} = \frac{\nu T e^2}{T^2} = \frac{\nu e^2}{T} = \frac{i_0 e}{T}$$

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд электрона,

T – время усреднения тока

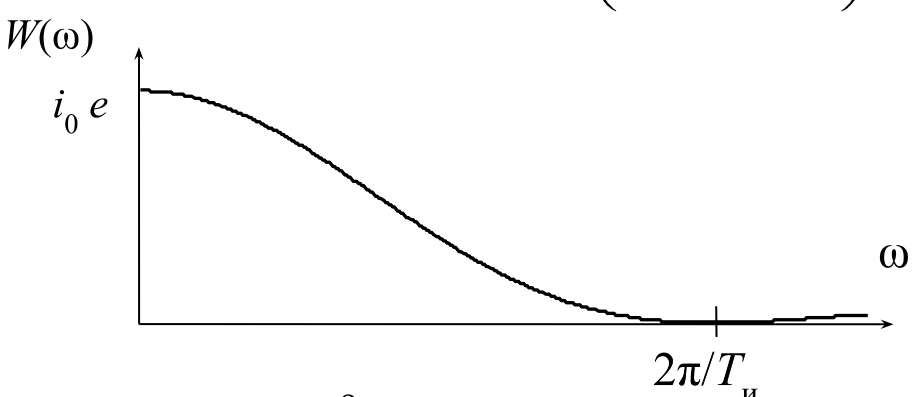
Спектр мощности дробового шума

Предположим для определенности, что импульс тока, создаваемый одним пролетающим электроном, имеет прямоугольную форму

Энергетический спектр одного импульса

$$\left|\dot{S}_e(\omega)\right|^2 = e^2\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega T_и}{2}\right)}{\frac{\omega T_и}{2}}\right)^2$$

$$W(\omega) = \nu e^2\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega T_и}{2}\right)}{\frac{\omega T_и}{2}}\right)^2 = i_0 e\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega T_и}{2}\right)}{\frac{\omega T_и}{2}}\right)^2$$



$$\boxed{F(\omega) = \frac{i_0 e}{\pi}}$$ формула Шотки

$$T_и \sim 10^{-9}\ \text{с}$$

<u>Пример</u>: дисперсия дробового шума диода в режиме насыщения при токе i_0 = 100 мА и полосе частот 1 МГц:

$$\sigma_i^2 = \frac{i_0 e}{\pi} \cdot \Delta\omega = \frac{0{,}1 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{\pi} 2\pi \cdot 10^6 = 3{,}2 \cdot 10^{-14} A^2,$$

Эффективное значение шумового тока $\sigma_i = 1{,}79 \cdot 10^{-7} \approx 0{,}18$ мкА.

При сопротивлении нагрузки 1 кОм эффективное значение напряжения будет равным $U_{\text{эфф}} = 1{,}79 \cdot 10^{-4}$ В = 179 мкВ

В транзисторах существует несколько источников шума.

Основными из них являются следующие:

- тепловой шум сопротивления базы, как электрода с самым большим сопротивлением;
- дробовой шум эмиттерного перехода;
- дробовой шум коллекторного перехода;
- шум токораспределения: носители, прошедшие через эмиттерный переход, могут попадать как на коллектор, так и на базу (этот процесс является случайным и вносит свой вклад в шум транзистора);
- шум $1/f$, или фликкер-эффект. Спектр мощности этого шума зависит от частоты как $1/f$ и поэтому он проявляется на самых низких частотах.