

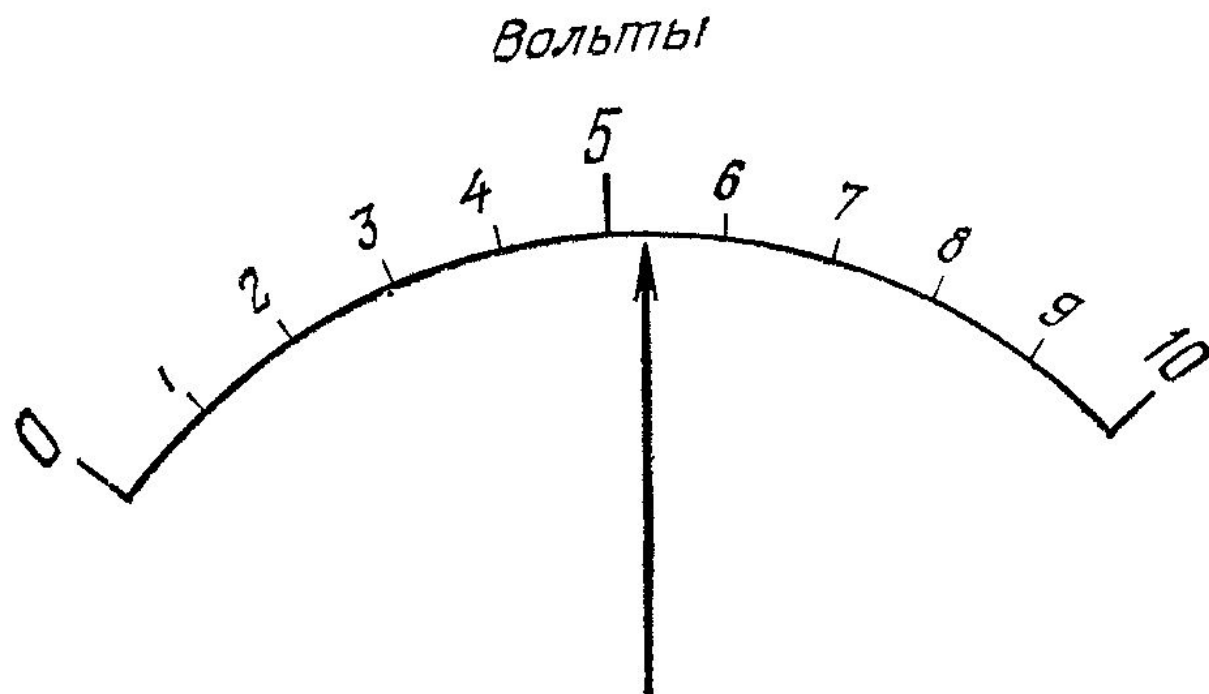
Измерительные приборы. Виды и предназначение.

Измерительные приборы. Контрольно-измерительные устройства.
Классификация приборов.
Оптические, механические,
электронные.

Приведение и использование погрешностей



Измерение длины линейкой.



Считывание со шкалы вольтметра.

наилучшая оценка длины = 36 мм,
вероятный интервал 35,5—36,5 мм

$$l = 36 \text{ мм}$$

означает

$$35,5 \text{ мм} \leq l \leq 36,5 \text{ мм}.$$

наилучшая оценка напряжения = 5,3 В,
вероятный интервал 5,2—5,4 В.

2,3; 2,4; 2,5; 2,4,

наилучшая оценка = среднее = 2,4 с,

вероятный интервал 2,3—2,5 с.

измеренное значение времени $= 2,4 \pm 0,1$ с.

(измеренная величина x) $= x_{\text{нанл}} \pm \delta x$.

Число δx называется погрешностью или ошибкой измерения в измерении x .

Абсолютная погрешность — понимают разность между точным (истинным) значением величины $x_{ист}$ и ее приближенным (измеренным) значением $x_{измер}$:

$$\Delta x = x_{ист} - x_{измер} \quad \Delta x = |x_{ист} - x_{измер}| \quad \Delta x = |x_{сред} - x_{измер}|$$

Абсолютная погрешность является оценкой абсолютной ошибки измерения, поэтому абсолютная погрешность измеряется в тех же единицах измерения, что и сама величина. Абсолютную погрешность применяют для сравнения точности измерения величин *одного порядка и одной размерности*.

Относительная погрешность — погрешность измерения, выраженная отношением абсолютной погрешности измерений Δx к истинному значению $x_{ист}$ измеряемой величины:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{ист}} = \frac{|x_{ист} - x_{измер}|}{x_{ист}}$$

Относительная погрешность является *безразмерной величиной*, либо измеряется в *процентах*. Поэтому относительная погрешность позволяет *сравнивать разнородные величины*.

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{ист}} \cdot 100\%$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{сред}} \cdot 100\%$$

Приведённая погрешность — погрешность, выраженная отношением абсолютной погрешности средства измерений к условно принятому значению величины, постоянному во всем диапазоне измерений или в части диапазона. Вычисляется по формуле

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{норм}}} \cdot 100\%$$

где $x_{\text{норм}}$ — нормирующее значение, которое зависит от типа шкалы измерительного прибора и определяется по его градуировке:

1. Если шкала прибора односторонняя, то есть нижний предел измерений равен нулю, то $x_{\text{норм}}$ определяется равным верхнему пределу измерений;
2. Если шкала прибора двухсторонняя, то нормирующее значение равно ширине диапазона измерений прибора.

Приведённая погрешность является *безразмерной величиной*, либо измеряется в процентах.

Значащие цифры

(измеренное значение g) = $9,82 \pm 0,02385 \text{ м/с}^2$.

Правило приведения погрешностей

В начальной учебной лаборатории экспериментальные погрешности обычно должны округляться до одной значащей цифры.

(измеренное значение g) = $9,82 \pm 0,02 \text{ м/с}^2$.

Правило приведения результатов

Последняя значащая цифра в любом приводимом результате обычно должна быть того же порядка величины (находиться в той же десятичной позиции), что и погрешность.

Например, результат 92,81 с погрешностью 0,3 должен быть округлен до

$$92,8 \pm 0,3.$$

Если же ошибка равна 3, то тот же результат следует представить как

$$93 \pm 3,$$

а если ошибка равна 30, то как

$$90 \pm 30.$$

Погрешность в любой измеренной величине имеет ту же размерность, что и сама измеренная величина.

Например, результат

$$\text{измеренный заряд} = (1,61 \pm 0,05) \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

гораздо проще прочесть и понять в такой форме записи, чем в виде

$$\text{измеренный заряд} = 1,61 \cdot 10^{-19} \pm 5 \cdot 10^{-21} \text{ Кл.}$$

Различие

различие = разность между двумя измеренными значениями одной и той же величины.

Важно иметь в виду, что различие может быть значимым или незначимым. Если два студента измеряют одно и то же сопротивление и получают результаты

$$40 \pm 5 \text{ Ом}$$

и

$$42 \pm 8 \text{ Ом},$$

то различие в 2 Ом меньше, чем погрешности их результатов, так что два эти измерения, очевидно, согласуются. В этом случае мы бы сказали, что различие является *незначимым*. С другой стороны, если бы два результата были

$$35 \pm 2 \text{ Ом}$$

и

$$45 \pm 1 \text{ Ом},$$

то оказалось бы, что два измерения явно расходятся, и различие в 10 Ом было бы *значимым*.

Сравнение двух измеренных значений

начальный импульс $p = 1,49 \pm 0,04$ кг · м/с

и

конечный импульс $p' = 1,56 \pm 0,06$ кг · м/с.

наибольшее вероятное значение $= (p_{\text{наил}} - p'_{\text{наил}}) + (\delta p + \delta p')$

наименьшее вероятное значение $= (p_{\text{наил}} - p'_{\text{наил}}) - (\delta p + \delta p')$.

$$p - p' = -0,07 \pm 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Погрешность разности

Если величины x и y измерены с погрешностями δx и δy и если измеренные значения x и y используются для расчета разности $q = x - y$, то погрешность в q есть сумма погрешностей в x и y :

$$\delta q \approx \delta x + \delta y.$$

Относительные погрешности

Погрешность δx в измерении

$$(\text{измеренное значение } x) = x_{\text{наил}} \pm \delta x$$

показывает надежность или точность измерения.

Качество измерения характеризуется не только самой погрешностью δx , но также и отношением δx к $x_{\text{наил}}$, такую погрешность называют относительной погрешностью или точностью.

$$\text{относительная погрешность} = \frac{\delta x}{|x_{\text{наил}}|}$$

длина $l = 50 \pm 1$ см

имеет относительную погрешность

$$\frac{\delta l}{|l_{\text{наил}}|} = \frac{1}{50} = 0,02$$

длина $l = 50$ см ± 2 %.

Погрешность в произведении

Погрешность в произведении

Если величины x и y измерены с малыми относительными погрешностями $\delta x / |x_{\text{наил}}|$ и $\delta y / |y_{\text{наил}}|$ и если измеренные величины x и y используются для вычисления произведения $q = xy$, то *относительная погрешность q равна сумме относительных погрешностей x и y :*

$$\frac{\delta q}{|q_{\text{наил}}|} \approx \frac{\delta x}{|x_{\text{наил}}|} + \frac{\delta y}{|y_{\text{наил}}|}.$$

Если, например, у нас были следующие измеренные значения для m и v :

$$m = 0,53 \pm 0,01 \text{ кг}$$

и

$$v = 9,1 \pm 0,3 \text{ м/с,}$$

то наилучшая оценка для $p = mv$ равна

$$p_{\text{наил}} = m_{\text{наил}}v_{\text{наил}} = (0,53) \cdot (9,1) = 4,82 \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$$

$$\frac{\delta m}{|m_{\text{наил}}|} = \frac{0,01}{0,53} = 0,02 = 2 \%$$

$$\frac{\delta v}{|v_{\text{наил}}|} = \frac{0,3}{9,1} = 0,03 = 3 \%$$

Относительная погрешность в p есть сумма

$$\frac{\delta p}{|p_{\text{наил}}|} = 2 \% + 3 \% = 5 \%$$

Погрешности в косвенных измерениях

Если измеряются две величины x и y и вычисляется их сумма $x+y$ или их разность $x-y$, то погрешность и в сумме и разности определяется как сумма $\delta x + \delta y$ погрешностей x и y .

Погрешности в суммах и разностях

Если несколько величин x, \dots, z измерены с погрешностями $\delta x, \dots, \delta z$ и используются для вычисления

$$q = x + \dots + z - (u + \dots + w),$$

то погрешность в рассчитанной величине q есть сумма

$$\delta q \approx \delta x + \dots + \delta z + \delta u + \dots + \delta w$$

всех исходных погрешностей.

Пример

В качестве простого примера применения правила предположим, что экспериментатор смешивает жидкости из двух фляг, предварительно измерив по отдельности массы этих наполненных и затем пустых фляг и получив в результате

$M_1 =$ масса первой фляги и ее содержимого $= 540 \pm 10$ г;

$m_1 =$ масса первой пустой фляги $= 72 \pm 1$ г;

$M_2 =$ масса второй фляги и ее содержимого $= 940 \pm 20$ г;

$m_2 =$ масса второй пустой фляги $= 97 \pm 1$ г.

Затем он рассчитывает полную массу жидкости как

$$M = M_1 - m_1 + M_2 - m_2 = (540 - 72 + 940 - 97) \text{ г} = 1311 \text{ г}.$$

В соответствии с правилом погрешность в его результате есть сумма всех четырех погрешностей:

$$\delta M \approx \delta M_1 + \delta m_1 + \delta M_2 + \delta m_2 = (10 + 1 + 20 + 1) \text{ г} = 32 \text{ г}.$$

Таким образом, его конечный результат (надлежащим образом округленный) имеет вид

$$\text{полная масса жидкости} = 1310 \pm 30 \text{ г}.$$

Если измеряются две величины x и y и вычисляется их произведение $x \cdot y$ или их частное x/y , то погрешность и в произведении и в частном определяется как сумма относительных погрешностей x и y .

Погрешность в произведениях и частных

Если несколько величин x, \dots, ω измерены с малыми погрешностями $\delta x, \dots, \delta \omega$ и измеренные значения используются для расчета

$$q = \frac{x \times \dots \times z}{u \times \dots \times \omega},$$

то относительная погрешность рассчитанной величины q равна сумме

$$\begin{aligned} \frac{\delta q}{|q|} \approx & \frac{\delta x}{|x|} + \dots + \frac{\delta z}{|z|} + \\ & + \frac{\delta u}{|u|} + \dots + \frac{\delta \omega}{|\omega|} \end{aligned}$$

относительных погрешностей в x, \dots, ω .

Пример

При съемке местности иногда приходится определять недоступную непосредственному измерению длину l (такую, как высота большого дерева) при помощи измерений трех других длин l_1, l_2, l_3 , которые дают

$$l = \frac{l_1 l_2}{l_3}.$$

Предположим, что мы выполняем такой эксперимент и получаем результаты (в метрах)

$$l_1 = 50 \pm 0,5; \quad l_2 = 1,5 \pm 0,03; \quad l_3 = 5,0 \pm 0,2.$$

Наша наилучшая оценка для l равна

$$l_{\text{наил}} = \frac{50 \cdot 1,5}{5} = 15 \text{ м.}$$

относительная погрешность этого результата равна сумме относительных погрешностей в l_1 , l_2 , l_3 , которые равны соответственно 1, 2 и 4%. Таким образом,

$$\frac{\delta l}{l} \approx \frac{\delta l_1}{l_1} + \frac{\delta l_2}{l_2} + \frac{\delta l_3}{l_3} = (1 + 2 + 4) \% = 7\%,$$

и наш окончательный результат имеет вид

$$l = 15 \pm 1 \text{ м.}$$

Измеренная величина умножается на точное число

Если величина x измеряется с погрешностью δx и используется для вычисления произведения

$$q = Bx,$$

в котором B не имеет погрешности, то погрешность в q равна $|B|$, умноженному на погрешность в x :

$$\delta q = |B| \delta x.$$

Измеряем толщину T 100 листов бумаги и получаем результат

$$\text{толщина 100 листов} = T = 30 \pm 3 \text{ мм},$$

$$\text{толщина одного листа} = t = \frac{1}{100} \times T = 0,3 \pm 0,03 \text{ мм}.$$

Погрешность при возведении в степень

Если величина x измеряется с погрешностью δx и измеренное значение используется для вычисления степени этого числа

$$q = x^n,$$

то относительная погрешность в q в n раз больше относительной погрешности в x ,

$$\frac{\delta q}{|q|} = n \frac{\delta x}{|x|}.$$

Пример

Предположим, что студент определяет ускорение свободного падения g , измеряя время t падения камня с высоты h . После нескольких измерений времени он находит

$$t = 1,6 \pm 0,1 \text{ с}$$

и измеряет высоту h как

$$h = 14,1 \pm 0,1 \text{ м.}$$

Поскольку h определяется известной формулой $h = (1/2)gt^2$, то он вычисляет g как

$$g = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 \cdot 14,1 \text{ м}}{(1,6 \text{ с})^2} = 11 \text{ м/с}^2.$$

$$\frac{\delta h}{h} = \frac{0,1}{14,1} = 0,7 \%$$

$$\frac{\delta t}{t} = \frac{0,1}{1,6} = 6,3 \%.$$

В соответствии с правилом относительная погрешность в t^2 в 2 раза больше, чем в t . Следовательно, применяя правило для произведений и частных к формуле $g = 2h/t^2$, мы получим для относительной погрешности

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta h}{h} + 2 \frac{\delta t}{t} = 0,7 \% + 2 \cdot (6,3 \%) = 13,3 \%$$

$$\delta g = (11 \text{ м/с}^2) \cdot \frac{13,3}{100} = 1,46 \text{ м/с}^2.$$

$$g = 11 \pm 1 \text{ м/с}^2.$$

Независимые погрешности в сумме

$$q = x + y \quad (\text{измеренное значение } x) = x_{\text{наил}} \pm \delta x$$

$$x_{\text{наил}} + y_{\text{наил}} + \delta x + \delta y. \quad x_{\text{наил}} + y_{\text{наил}} - \delta x - \delta y.$$

$$\delta q \approx \delta x + \delta y.$$

измерения x и y выполняются независимо и если они оба подчиняются нормальному распределению, то погрешность в $q = x + y$ дается выражением

$$\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}.$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} < a + b$$

Погрешность в суммах и разностях

Предположим, что x, \dots, w измерены с погрешностями $\delta x, \dots, \delta w$ и что измеренные значения используются для вычисления

$$q = x + \dots + z - (u + \dots + w).$$

Если известно, что погрешности в x, \dots, w *независимы и случайны*, то погрешность в q равна квадратичной сумме

$$\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + \dots + (\delta z)^2 + (\delta u)^2 + \dots + (\delta w)^2}$$

исходных погрешностей. В любом случае δq никогда не больше, чем их обычная сумма

$$\delta q \leq \delta x + \dots + \delta z + \delta u + \dots + \delta w.$$

Погрешности в произведениях и частях

Предположим, что x, \dots, w измерены с погрешностями $\delta x, \dots, \delta w$ и что измеренные значения используются для вычисления

$$q = \frac{x \times \dots \times z}{u \times \dots \times w}.$$

Если погрешности в x, \dots, w *независимы и случайны*, то относительная погрешность в q равна квадратичной сумме исходных относительных погрешностей

$$\frac{\delta q}{|q|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta z}{z}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta u}{u}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta w}{w}\right)^2}.$$

В любом случае она никогда не больше, чем их обычная сумма

$$\frac{\delta q}{|q|} \leq \frac{\delta x}{|x|} + \dots + \frac{\delta z}{|z|} + \frac{\delta u}{|u|} + \dots + \frac{\delta w}{|w|}.$$

Предположим, что мы желаем определить коэффициент полезного действия электрического мотора постоянного тока, используя этот мотор для того, чтобы поднять массу m на высоту h . Совершенная работа равна mgh , а электрическая энергия, подведенная к мотору, равна VIt , где V — приложенное напряжение, I — ток и t — время, в течение которого работал мотор. В этом случае коэффициент полезного действия равен

$$\begin{aligned} \text{коэффициент полезного действия } e &= \\ &= \frac{\text{работа, совершенная мотором}}{\text{энергия, подведенная к мотору}} = \frac{mgh}{VIt} \end{aligned}$$

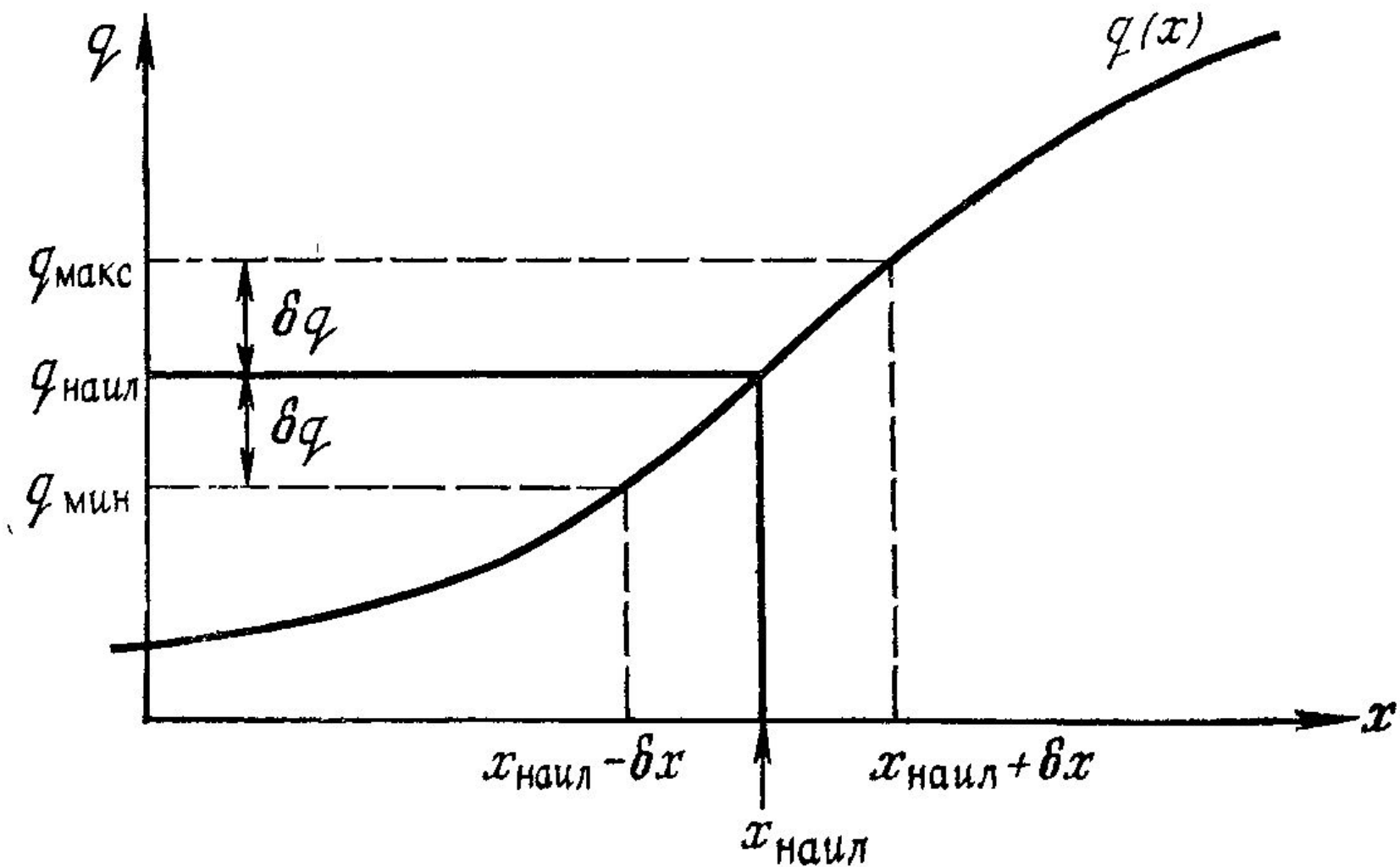
(относительная погрешность m , h , V и I) = 1 %

и что время t имеет погрешность 5 %

(относительная погрешность t) = 5 %.

$$\frac{\delta e}{e} \approx \frac{\delta m}{m} + \frac{\delta h}{h} + \frac{\delta V}{V} + \frac{\delta I}{I} + \frac{\delta t}{t} = (1 + 1 + 1 + 1 + 5) \% = 9 \%$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta e}{e} &= \sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\delta I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\delta t}{t}\right)^2} = \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2} \% = \sqrt{29} \% \approx 5 \% \end{aligned}$$



Если величина x измерена как $x_{\text{наил}} \pm \delta x$, то наилучшая оценка $q(x)$ есть $q_{\text{наил}} = q(x_{\text{наил}})$. Наибольшее и наименьшее вероятные значения $q(x)$ соответствуют значениям $x_{\text{наил}} \pm \delta x$ величины x .

$$n = 1/\sin \theta.$$

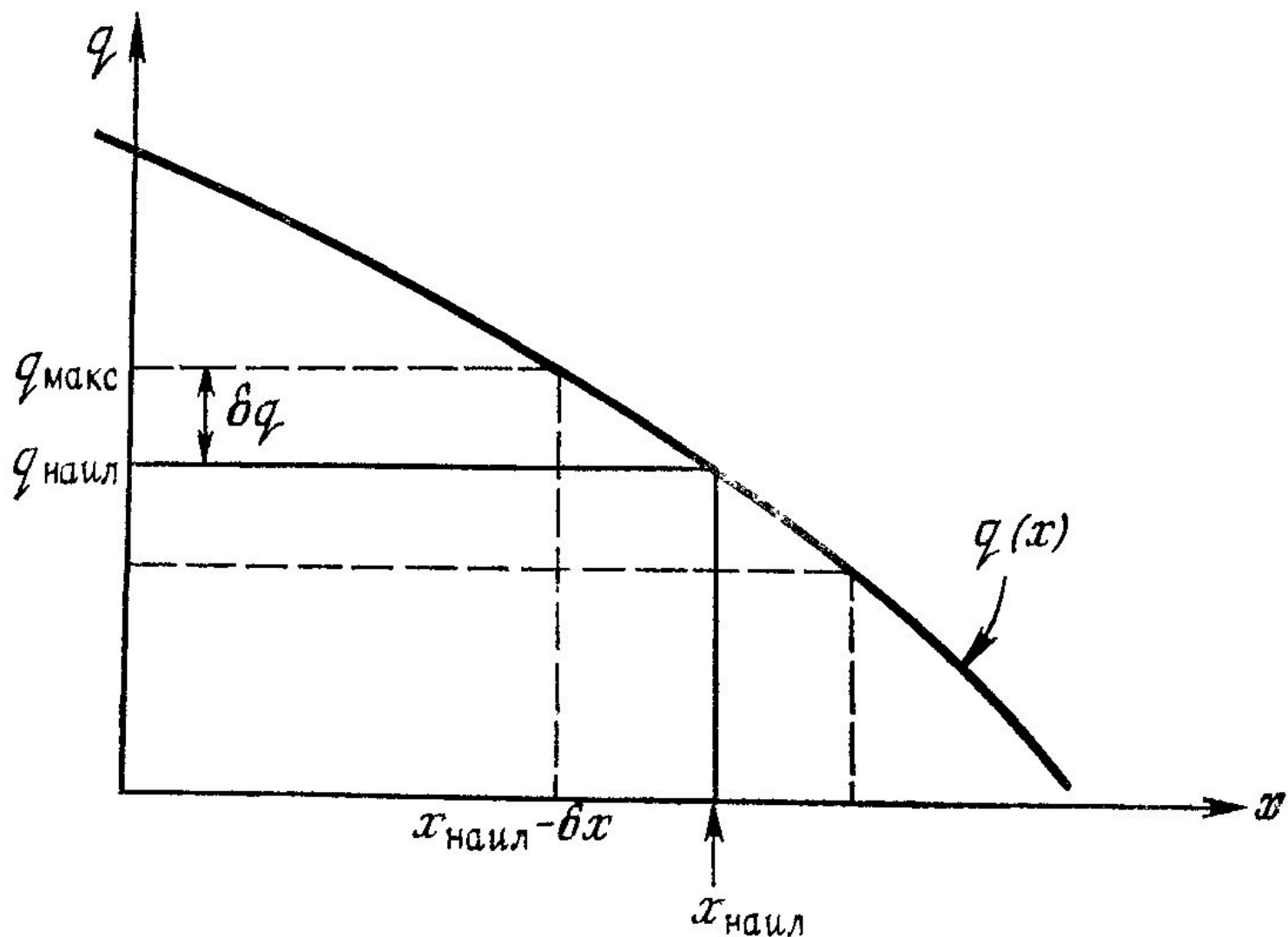
$$q(x) = 1/\sin x \text{ или } q(x) = \sqrt{x}$$

$$\delta q = q(x_{\text{наил}} + \delta x) - q(x_{\text{нанл}}).$$

$$q(x + u) - q(x) = \frac{dq}{dx} u.$$

$$\delta q = \frac{dq}{dx} \delta x.$$

Итак, чтобы найти погрешность δq , мы должны вычислить производную dq/dx и умножить ее на погрешность δx .



Если наклон графика $q(x)$ отрицателен, то максимальное вероятное значение q соответствует минимальному значению x , и наоборот.

В этом случае максимальное вероятное значение $q_{\text{макс}}$, очевидно, соответствует минимальному значению $x_{\text{наил}} - \delta x$ величины x , так что

$$\delta q = - \frac{dq}{dx} \delta x.$$

Погрешность в произвольной функции одной переменной

Если величина x измерена с погрешностью δx и используется для вычисления функции $q(x)$, то погрешность δq равна

$$\delta q = \left| \frac{dq}{dx} \right| \delta x.$$

В качестве простого примера применения этого правила предположим, что мы измерили угол θ

$$\theta = 20 \pm 3 \text{ град}$$

и хотим найти $\cos \theta$. Наша наилучшая оценка для $\cos \theta$ составляет $\cos 20^\circ = 0,94$,

тогда в соответствии с правилом погрешность равна

$$\delta (\cos \theta) = \left| \frac{d \cos \theta}{d\theta} \right| \delta\theta = |\sin \theta| \delta\theta \text{ (в рад).}$$

$$\delta\theta = 3^\circ \text{ в виде } \delta\theta = 0,05 \text{ рад}$$

$$\delta (\cos \theta) = (\sin 20^\circ) \times 0,05 = 0,34 \times 0,05 = 0,02.$$

$$\cos \theta = 0,94 \pm 0,02.$$

Степенная функция

$$q(x) = x^n$$

$$\delta q = \left| \frac{dq}{dx} \right| \delta x = |nx^{n-1}| \delta x.$$

Если разделить обе части этого равенства на $|q| = |x^n|$, то получим

$$\frac{\delta q}{|q|} = |n| \frac{\delta x}{|x|}$$

т. е. относительная погрешность в $q = x^n$ в $|n|$ раз больше, чем в x .

$$n = 1/2, \text{ то } q = \sqrt{x} \quad \frac{\delta q}{|q|} = \frac{1}{2} \frac{\delta x}{|x|}$$

Погрешность в степенной функции

Если величина x измерена с погрешностью δx и используется для вычисления степенной функции $q = x^n$ (где n — фиксированное известное число), то относительная погрешность в q в $|n|$ раз больше, чем в x :

$$\frac{\delta q}{|q|} = |n| \frac{\delta x}{|x|}.$$

Измерение g с помощью математического маятника $T = 2\pi \sqrt{l/g}$, $g = 4\pi^2 l/T^2$.

$$\frac{\delta(T^2)}{T^2} = 2\frac{\delta T}{T} \quad \frac{\delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\delta l}{l}\right)^2 + \left(2\frac{\delta T}{T}\right)^2}$$

$$l = 92,95 \pm 0,1 \text{ см},$$

$$T = 1,936 \pm 0,004 \text{ с}.$$

$$g_{\text{наил}} = \frac{4\pi^2 (92,95 \text{ см})}{(1,936 \text{ с})^2} = 979 \text{ см/с}^2.$$

$$\frac{\delta l}{l} = 0,1 \% \quad \text{и} \quad \frac{\delta T}{T} = 0,2 \%$$

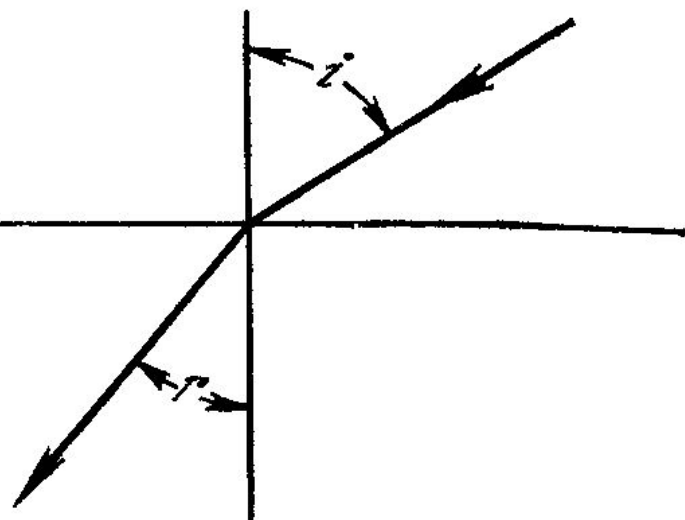
$$\frac{\delta g}{g} = \sqrt{(0,1)^2 + (2 \cdot 0,2)^2} \% = 0,4 \%$$

$$\delta g = 0,004 \cdot 979 \text{ cm/c}^2 = 4 \text{ cm/c}^2.$$

$$g = 979 \pm 4 \text{ cm/c}^2.$$

Определение показателя преломления из закона Снелла

$$n = \sin i / \sin r. \quad \begin{array}{l} \text{Воздух} \\ \text{Стекло} \end{array}$$



$$\frac{\delta n}{n} = \sqrt{\left(\frac{\delta \sin i}{\sin i}\right)^2 + \left(\frac{\delta \sin r}{\sin r}\right)^2}$$

i , град (± 1)	r , град (± 1)	$\sin i$	$\sin r$	n	$\frac{\delta \sin i}{ \sin i }$, %	$\frac{\delta \sin r}{ \sin r }$, %	$\frac{\delta n}{n}$, %
20	13	0,342	0,225	1,52	5	8	9
40	23,5	0,643	0,399	1,61	2	4	5

$$\delta \sin \theta = \left| \frac{d \sin \theta}{d\theta} \right| \delta\theta = |\cos \theta| \delta\theta \text{ (в рад).}$$

$$\frac{\delta \sin \theta}{|\sin \theta|} = |\operatorname{ctg} \theta| \delta\theta \text{ (в рад).}$$

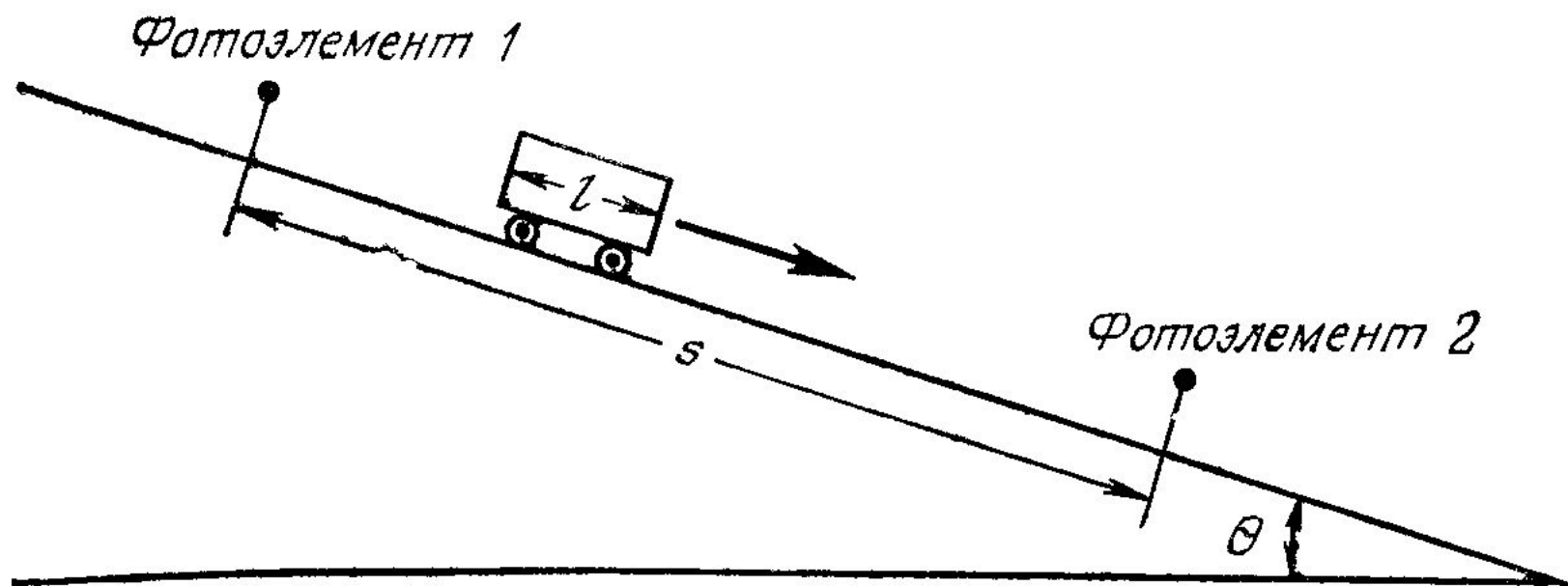
Ускорение тележки, скатывающейся по наклонной плоскости

Рассмотрим тележку, скатывающуюся по наклонной плоскости с углом наклона θ . Ожидаемое ускорение равно $g \sin \theta$, и если измерить θ , то легко можно вычислить ожидаемое ускорение и его погрешность

Мы можем измерить фактическое ускорение a , определяя времена, за которые тележка проходит каждый из двух фотоэлементов, соединенных с часами. Если тележка имеет длину l и за время t_1 проходит первый фотоэлемент, то ее скорость равна $v_1 = l/t_1$. Аналогично $v_2 = l/t_2$.

Если расстояние между фотоэлементами равно s , то в соответствии с известной формулой $v_2^2 = v_1^2 + 2as$ находим

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} = \left(\frac{l^2}{2s} \right) \left(\frac{1}{t_2^2} - \frac{1}{t_1^2} \right)$$



$$\begin{aligned}l &= 5,0 \pm 0,05 \text{ см} \quad (1 \%), \\s &= 100,0 \pm 0,2 \text{ см} \quad (0,2 \%), \\t_1 &= 0,054 \pm 0,001 \text{ с} \quad (2 \%), \\t_2 &= 0,031 \pm 0,001 \text{ с} \quad (3 \%).\end{aligned}$$

$l^2/2s = 0,125$ см. Поскольку относительные погрешности в l и s равны соответственно 1 и 0,2%, аналогичная величина для $l^2/2s$ есть

$$\sqrt{(2 \times 1)^2 + (0,2)^2} \% = 2 \%.$$

$$l^2/2s = 0,125 \text{ см} \pm 2 \%.$$

Так как относительная погрешность в t_1 составляет 2%, то аналогичная величина для $1/t_1^2$ составляет 4%. Таким образом, поскольку $t_1 = 0,054$ с,

$$1/t_1^2 = 343 \pm 14 \text{ с}^{-2}.$$

Аналогично относительная погрешность в $1/t_2^2$ составляет 6%,

и

$$1/t_2^2 = 1041 \pm 62 \text{ с}^{-2}.$$

Вычитая эти значения (и складывая ошибки квадратично) находим

$$\frac{1}{t_2^2} - \frac{1}{t_1^2} = 698 \pm 64 \text{ с}^{-2} \text{ (9 \%)}.$$

Перемножая эти значения (и складывая квадратично относительные погрешности), получаем

$$a = (0,125 \text{ см} \pm 2 \%) \cdot (698 \text{ с}^{-2} \pm 9 \%) = 87,3 \text{ см/с}^2 \pm 9 \%,$$

$$a = 87 \pm 8 \text{ см/с}^2.$$

Этот результат можно было бы сравнить с ожидаемым ускорением $g \sin \theta$, если бы оно было рассчитано.

Общая формула для вычисления погрешностей в косвенных измерениях

Предположим, что x, \dots, z измерены с погрешностями $\delta x, \dots, \delta z$ и что измеренные значения используются для вычисления функции $q(x, \dots, z)$. Если погрешности в x, \dots, z независимы и случайны, то погрешность в q равна

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x} \delta x\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial q}{\partial z} \delta z\right)^2}.$$

В любом случае она никогда не больше, чем обычная сумма

$$\delta q \leq \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \delta x + \dots + \left|\frac{\partial q}{\partial z}\right| \delta z.$$