



ЛЕКЦИЯ №4

*Простейшие задачи аналитической
геометрии на плоскости.
Уравнения прямой на плоскости.*

Расстояние между точками на плоскости

Пусть на плоскости даны две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Найдем расстояние между двумя точками.

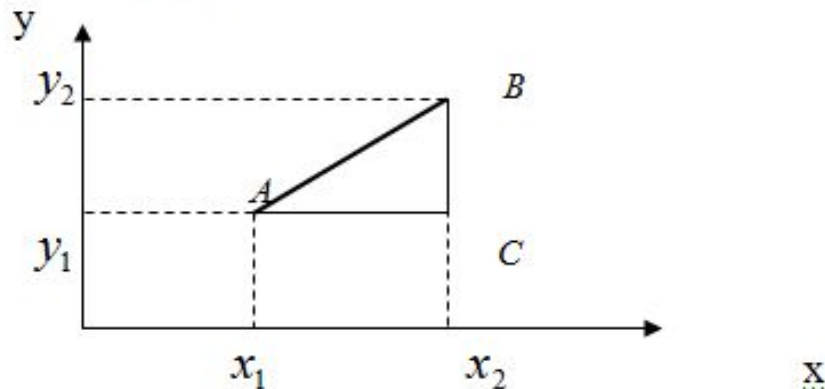


Рис.1

Из треугольника ABC имеем (рис.1): $AB^2 = AC^2 + CB^2$

Так как

$$AC = x_2 - x_1, \quad CB = y_2 - y_1,$$

то, обозначив $|AB| = d$ получим

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1.1)$$

Деление отрезка в данном отношении

Даны точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Пусть точка $C(x; y)$ делит отрезок в отношении λ т.е. $\frac{AC}{CB} = \lambda$.

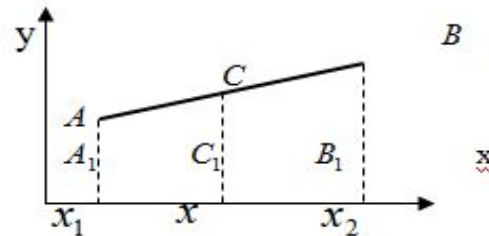


Рис.2

На основании теоремы о пропорциональности отрезков прямых, заключенных между параллельными прямыми (рис.2) имеем:

$$\frac{A_1B_1}{C_1B_1} = \frac{AC}{CB} = \lambda, \text{ где } A_1C_1 = x - x_1; \quad C_1B_1 = x_2 - x$$

Тогда будем иметь: $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$.

Решив это уравнение, получим: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ (1.2)

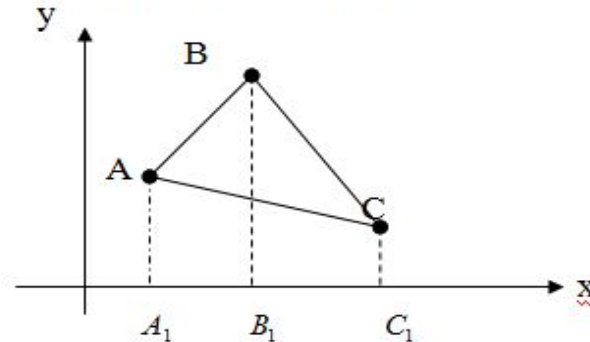
Аналогично рассуждая найдем, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ (1.3)

Если точка C является серединой отрезка, то её координаты можно вычислить по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (1.4) \quad |$$

Вычисление площади треугольника

Пусть на плоскости даны две точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$.
Найдем площадь S треугольника ABC .



Построим проекции точек A , B и C на ось Ox , получим точки A_1 , B_1 и C_1 .

Из рисунка видно, что площадь искомого треугольника будет равна:

$$S_{ABC} = S_{AA_1B_1B} + S_{B_1BCC_1} - S_{A_1ACC_1}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } S_{ABC} &= \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_1) + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_2) - \frac{y_1 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_1) = \\ &= \frac{1}{2} (x_2 y_1 - x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_2 + x_3 y_2 - x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_2 y_3 - x_3 y_1 + x_1 y_1 - x_3 y_3 + x_1 y_3) = \\ &= \frac{1}{2} (x_3(y_2 - y_1) - x_1(y_2 - y_1) - x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_3 - y_1)) = \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}. \quad (1.5)$$

Если при вычислении значение определителя получается равным нулю, то это означает, что точки A, B и C лежат на одной прямой. Если значение определителя получается отрицательным, то следует взять его модуль.

Уравнение линии

Уравнением линии на плоскости XOY называется такое уравнение $F(x, y) = 0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y в уравнении линии называются **текущими координатами** точек линии.

Простейшей из линий является прямая.

Чтобы составить уравнение прямой линии в декартовых координатах нужно каким-то образом задать условие, определяющее положение ее относительно координатных осей.

Углом наклона прямой к оси Ox называется угол φ , на который надо повернуть эту ось, чтобы она совпала с данной прямой.

Припишем углу φ знак плюс при повороте оси Ox против часовой стрелки, знак минус при повороте Ox по ходу часовой стрелки.

Тангенс угла наклона прямой к оси Ox называется **угловым коэффициентом прямой**.

$$k = \operatorname{tg} \varphi \quad (2.1)$$

Угловой коэффициент характеризует направление прямой по отношению осей координат.

В частности, если $\varphi = 0$, то и $k = 0$. В этом случае прямая параллельна оси Ox , если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $k = \operatorname{tg} \varphi$ не существует, т.е. прямая перпендикулярна оси Ox .

Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом

Пусть дана некоторая прямая, составляющая угол φ с осью Ox , и отсекающая на оси Oy отрезок, по величине равный b . Возьмем на данной прямой произвольную точку $M(x, y)$, точка $N(0; b)$ - точка пересечения прямой с осью Oy .

Зная координаты точек $N(0; b)$ и $M(x, y)$, найдем угловой коэффициент прямой, выразив его через координаты этих точек.

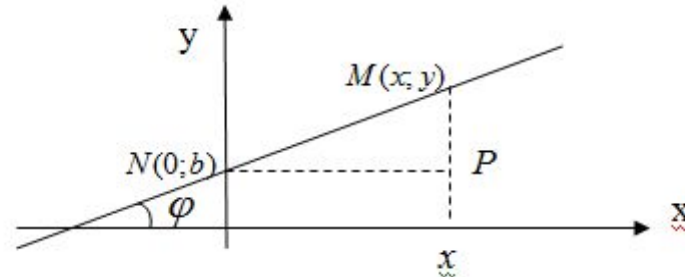


Рис.4

Из прямоугольного треугольника MNP (рис.4) получим $\operatorname{tg} \angle MNP = \frac{MP}{NP}$.

Так как $\angle MNP = \varphi$, $MP = y - b$, $NP = x$, то

$$\frac{y - b}{x} = k, \quad y - b = kx$$

или

$$y = kx + b \quad (2.2)$$

Уравнение прямой вида (2.2) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Если прямая параллельна оси ОХ, то угол наклона прямой к оси ОХ равен нулю $\varphi = 0$, значит $k = \operatorname{tg} 0 = 0$. Тогда уравнение (2.2) примет вид

$$y = b. \quad (2.3)$$

Любая точка этой прямой имеет ординату, равную b .

Если прямая параллельна оси ОУ, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$, значит $k = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ не существует. В этом случае уравнение прямой будет иметь вид:

$$x = a, \quad (2.4)$$

где a – абсцисса точки пересечения прямой с осью ОХ.

Любая точка этой прямой имеет абсциссу, равную a .

Если прямая проходит через начало координат, то $b = 0$. Тогда уравнение прямой будет иметь вид:

$$y = kx \quad (2.5)$$

Пример 1. Составить уравнение прямой, образующей с осью ОХ угол $\frac{\pi}{3}$ и пересекающей ось ОУ в точке $(0; -6)$.

Решение. Здесь $\varphi = \frac{\pi}{3}$, значит $k = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Величина отрезка, отсекаемого на оси ОУ равна $b = -6$.

Следовательно, искомое уравнение получим в виде:

$$y = \sqrt{3}x - 6.$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку, в данном направлении

Пусть дана точка на прямой $M_1(x_1; y_1)$ и угол наклона φ этой прямой к оси ОХ. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ на прямой, которая проходит через точку M_1 .

Уравнение этой прямой будем искать в виде (2.2) $y = kx + b$, где неизвестное определится из условия прохождения прямой через точку M_1 , т.е. $y_1 = kx_1 + b$, отсюда $b = y_1 - kx_1$.

Подставим найденное значение b в уравнение (2.2), получим:

$$y = kx + y_1 - kx_1$$

или

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (2.6)$$

Это и есть уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1; y_1)$ в данном направлении или уравнением пучка прямых.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(-5; 6)$, и наклоненной к оси ОХ под углом $\varphi = 135^\circ$.

Решение. Здесь $x_1 = -5$, $y_1 = 6$. Находим угловой коэффициент прямой: $k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$.

Используя формулу (2.6) будем иметь:

$$y - 6 = -(x + 5) \quad \text{или} \quad x + y - 1 = 0.$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть даны точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Составим уравнение прямой, проходящей через эти две точки.

Уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M_1(x_1; y_1)$ имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

где неизвестный коэффициент k определим из условия прохождения прямой M_1M_2 через точку $M_2(x_2; y_2)$, т.е. координаты точки M_2 должны удовлетворять уравнению (2.6):

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

отсюда

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (2.7).$$

Подставляя (2.7) в (2.6), получим:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (2.8)$$

Это и есть *искомое уравнение прямой, проходящей через две данные точки.*

Пример 1. Составить уравнение прямой линии, проходящей через точки $M_1(1; 2)$ и $M_2(-1; 1)$.

Решение. Здесь $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $x_2 = -1$, $y_2 = 1$. Подставим эти значения в (2.8):

$$\frac{y - 2}{1 - 2} = \frac{x - 1}{-1 - 1}, \text{ отсюда } x - 2y + 3 = 0.$$

Пример 2. Составить уравнение медианы BE в треугольнике ABC, если $A(-1; 3)$, $B(1; 2)$, $C(1; -1)$.

Решение. Как BE – медиана, то точка E является серединой отрезка AC. Поэтому координаты точки E найдем по формулам (1.4)

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

Т.е. точка E имеет координаты: $E(0;1)$.

Для составления уравнение медианы воспользуемся теперь уравнением прямой, проходящей через две точки

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Получим:

$$\frac{y-2}{1-2} = \frac{x-1}{0-1}, \quad \frac{y-2}{-1} = \frac{x-1}{-1}, \quad -1 \cdot (y-2) = -1 \cdot (x-1).$$

Окончательно уравнение медианы получим в виде:

$$x - y + 1 = 0$$

Угол между двумя прямыми

Пусть две прямые заданы своими уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Будем называть одну из них первой (какую угодно), другую – второй.

Обозначим через α_1 угол наклона первой прямой к оси ОХ, через α_2 - угол наклона второй прямой. Для определенности будем считать, что $\alpha_2 > \alpha_1$.

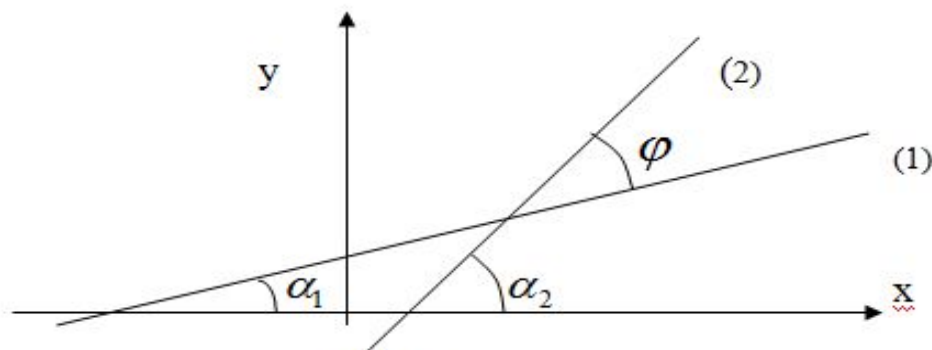


Рис.5

В этом случае угол между прямыми (1) и (2) будет равен $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$
Тогда имеем:

$$| \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}$$

где $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$, и $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$, следовательно

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (2.9)$$

Это есть формула для определения угла между двумя прямыми.

Условие параллельности и перпендикулярности прямых

При решении различных задач часто возникают вопросы об установлении параллельности или перпендикулярности двух прямых на плоскости.

Очевидно, что две прямые параллельны тогда и только тогда, когда углы наклона к оси Ox двух прямых равны друг другу, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2$, следовательно $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$.

Отсюда:

$$| k_1 = k_2 \quad (2.10)$$

Это и есть *условие параллельности двух прямых* на плоскости.

Если данные прямые перпендикулярны, т.е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тогда $tg\varphi$ теряет арифметический смысл, в этом смысле знаменатель правой части (2.9) должен быть равен нулю $1 + k_1k_2 = 0$.

Следовательно, признаком перпендикулярности двух прямых является равенство:

$$k_1k_2 = -1, \quad \text{или} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad (2.11)$$

Пример 1. Найти угол между прямыми $y = 2x - 3$ и $3x + y - 2 = 0$.

Решение. Если перенумеровать прямые в том порядке, как они заданы, то угловой коэффициент первой прямой $k_1 = 2$, а для второй прямой $k_2 = -3$.

Тогда по формуле (2.9) получим:

$$|\operatorname{tg} \varphi = \frac{-3 - 2}{1 + (-3)2} = 1.$$

Значит, угол между данными прямыми равен $\varphi = 45^\circ$.

Пример 2. Составить уравнение прямой линии, проходящей через точку $M(1; 2)$ параллельно прямой $2x - 3y + 1 = 0$.

Решение. Угловой коэффициент данной прямой $k_1 = \frac{2}{3}$. Из условия параллельности прямых (2.10) угловой коэффициент прямой, для которой нужно составить уравнение будет также равен $k_2 = k_1 = \frac{2}{3}$. Используя уравнение (2.6) получим:

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x - 1) \quad \text{или} \quad 3y - 6 = 2x - 2$$

Окончательно будем иметь $2x - 3y + 4 = 0$.

Общее уравнение прямой

Все уравнения прямой описываются уравнениями первой степени относительно переменных x и y , поэтому общее уравнение прямой можно записать в виде:

$$Ax + By + C = 0 \quad (2.12).$$

Преобразуем это уравнение к виду уравнения прямой в угловом коэффициентом: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

Т.е. угловой коэффициент прямой, заданной в общем виде, можно вычислить по формуле: $k = -\frac{A}{B}$

Рассмотрим три частных случая, когда уравнение первой степени будет неполным:

1) $C = 0$, тогда (2.12) примет вид $Ax + By = 0$

Это уравнение определяет прямую, проходящую через начало координат.

2) $B = 0$, уравнение (2.12) примет вид

$$Ax + C = 0 \text{ или } x = a, \text{ где } a = -\frac{C}{A}$$

Это уравнение определяет прямую, параллельную оси OY .

В частности, если $a = 0$, то уравнение $x = 0$ определяет прямую, которая совпадает с осью OY .

3) $A = 0$, тогда общее уравнение прямой будет иметь вид

$$By + C = 0 \text{ или } y = b, \text{ где } b = -\frac{C}{B}.$$

Это уравнение прямой параллельной оси OX .

В случае, если $b = 0$, то уравнение $y = 0$ является уравнением оси OX

Уравнение прямой «в отрезках»

Пусть дано общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0, \text{ где } A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$Ax + By = -C,$$

и разделим обе части этого уравнения на $(-C)$
тогда будем иметь:

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1.$$

Введя обозначение $-\frac{C}{A} = a, -\frac{C}{B} = b,$

окончательно получим:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (2.13).$$

Уравнение (2.13) называется *уравнением прямой «в отрезках»*.

Числа a и b имеют простой геометрический смысл – это величины отрезков, которые прямая (2.13) отсекает на осях координат: a – величина отрезка, отсекаемого на оси OX , b – величина отрезка, отсекаемого на оси OY .

Пример. Пусть дана прямая $3x - 4y - 12 = 0$. Составить для этой прямой уравнение прямой «в отрезках» и построить эту прямую.

Решение. Из данного уравнения получим $3x - 4y = 12$, разделим это уравнение на 12 и получим:

$$\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1.$$

На осях ОХ и ОУ данная прямая отсекает отрезки $a = 4$ (на оси ОХ) и $b = -3$ (на оси ОУ). Т.е. точки пересечения прямой с осями координат $A(4,0)$ и $B(0,-3)$.

Для построения прямой соединим эти точки (рис.6).

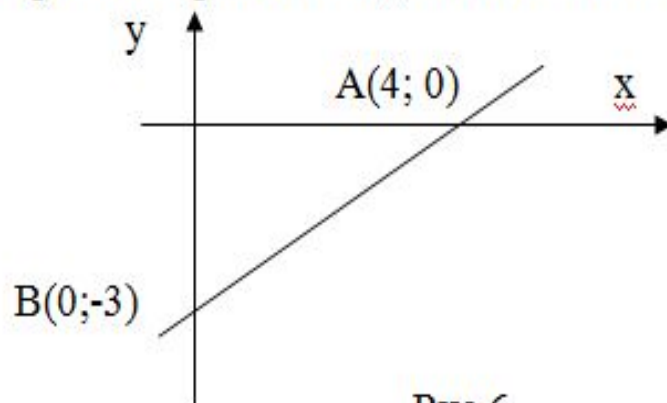
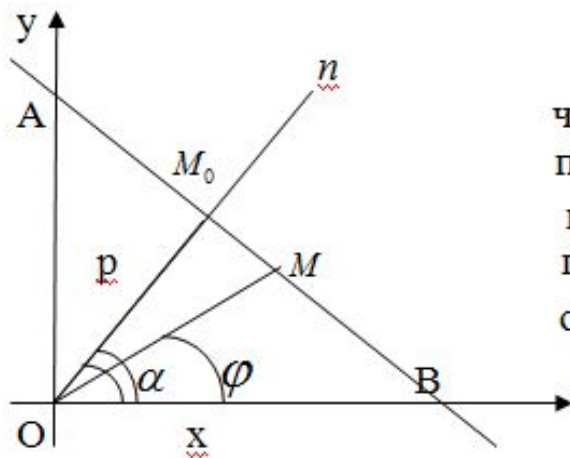


Рис.6

Нормальное уравнение прямой



Пусть дана прямая АВ. проведём через начало координат прямую n , перпендикулярную к АВ и будем называть её *нормалью*. M_0 -точка пересечения нормали и прямой АВ, обозначим $OM_0 = p$,
 α - угол наклона OM_0 у оси ОХ.

Уравнение вида

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

называется *нормальным уравнением прямой*.

Чтобы привести общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ необходимо это уравнение умножить на нормирующий множитель

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Знак μ выбирается противоположным знаку С. Если $C = 0$, то для μ можно выбрать любой знак.

Расстояние от точки до прямой

Если прямая AB задана общим уравнением прямой $Ax + By + C = 0$, то расстояние от точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямой AB вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Если прямая AB задана нормальным уравнением прямой $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, то расстояние от точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямой AB вычисляется по формуле:

$$d = |x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p|$$

Пример: Даны прямая $3x - 4y + 20 = 0$ и точка $M_1(4; 3)$. Найти расстояние от точки M_1 от данной прямой.

Решение: 1 метод: используя формулу (2.25), получим:

$$d = \frac{|3 \cdot 4 + (-4) \cdot 3 + 20|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{20}{5} = 4.$$

2 метод: Приведём данное уравнение к нормальному виду. Для этого определим нормирующий множитель μ , $A=3, B=4$, тогда

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = -\frac{1}{5},$$

знак минус взят потому, что $C = 20 > 0$.

Умножим данное уравнение на μ и получим: $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 4 = 0$.

Используя формулу (2.24), получим:

$$d = \left| 4 \cdot \left(-\frac{3}{5} \right) + 3 \cdot \frac{4}{5} - 4 \right| = 4.$$

Контрольные вопросы к лекции №4

1. Написать формулу расстояния между двумя точками.
2. Деление отрезка в данном отношении. Координаты середины отрезка.
3. Вычисление площади треугольника.
4. Определение углового коэффициента прямой.
5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
6. Уравнение пучка прямых.
7. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
8. Общее уравнения прямой. Уравнение прямой в отрезках.
9. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой.
10. Угол между прямыми.
11. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.