ЛЕКЦИЯ №*4*

Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости.

Уравнения прямой на плоскости.

Расстояние между точками на плоскости

Пусть на плоскости даны две точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Найдем расстояние между двумя точками.

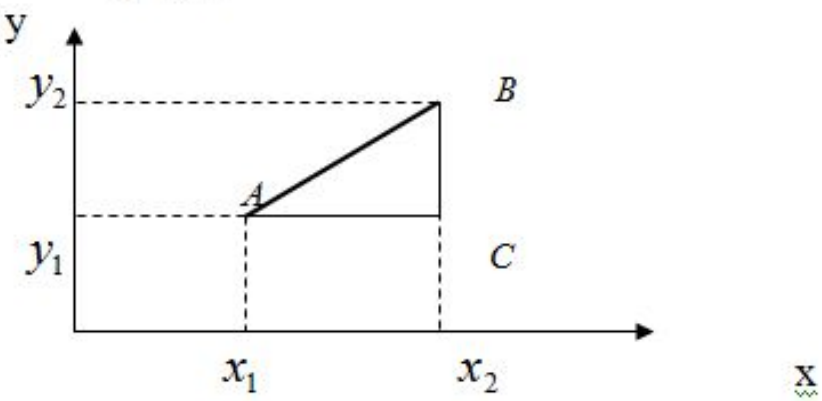


Рис.1

Из треугольника ABC имеем (рис.1): $AB^2 = AC^2 + CB^2$

Так как

$$AC = x_2 - x_1, \quad CB = y_2 - y_1 ,$$

то, обозначив $|AB| = d$ получим

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} . \qquad (1.1)$$

Деление отрезка в данном отношении

Даны точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Пусть точка $C(x;y)$ делит отрезок в отношении λ т.е. $\frac{AC}{CB}=\lambda$.

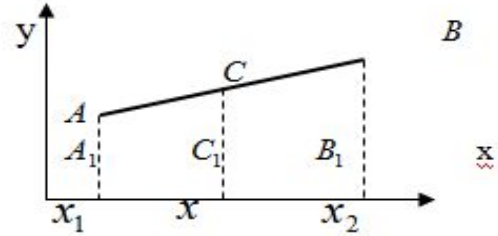


Рис.2

На основании теоремы о пропорциональности отрезков прямых, заключенных между параллельными прямыми (рис.2) имеем:

$$\frac{A_1B_1}{C_1B_1}=\frac{AC}{CB}=\lambda \text{, где } A_1C_1=x-x_1;\quad C_1B_1=x_2-x$$

Тогда будем иметь: $\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$.

Решив это уравнение, получим: $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$ (1.2)

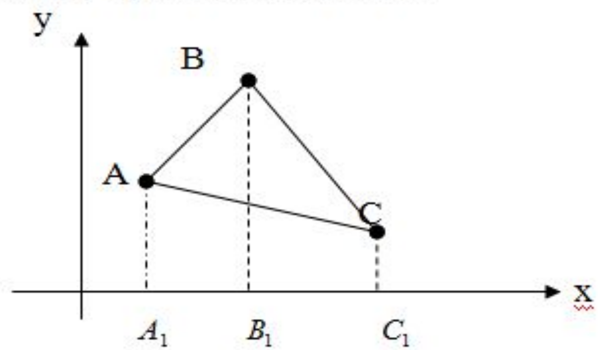
Аналогично рассуждая найдем, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ (1.3)

Если точка С является серединой отрезка, то её координаты можно вычислить по формулам:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad (1.4)$$

Вычисление площади треугольника

Пусть на плоскости даны две точки $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ и $C(x_3;y_2)$.
Найдем площадь S треугольника ABC.



Построим проекции точек А, В и С на ось ОХ, получим точки A_1, B_1 и C_1.

Из рисунка видно, что площадь искомого треугольника будет равна:

$$S_{ABC} = S_{AA_1B_1B} + S_{B_1BCC_1} - S_{A_1ACC_1}$$

Тогда $S_{ABC} = \frac{y_1+y_2}{2}\cdot(x_2-x_1) + \frac{y_2+y_3}{2}\cdot(x_3-x_2) - \frac{y_1+y_3}{2}\cdot(x_3-x_1) =$

$$= \frac{1}{2}\left(x_2y_1 - x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 + x_3y_2 - x_2y_2 + x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_1 + x_1y_1 - x_3y_3 + x_1y_3\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_3(y_2-y_1) - x_1(y_2-y_1) - x_2(y_3-y_1) + x_1(y_3-y_1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left((y_2-y_1)(x_3-x_1) - (y_3-y_1)(x_2-x_1)\right) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3-x_1 & x_2-x_1 \\ y_3-y_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3-x_1 & x_2-x_1 \\ y_3-y_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}. \qquad (1.5)$$

Если при вычислении значение определителя получается равным нулю, то это означает, что точки А,В и С лежат на одной прямой. Если значение определителя получается отрицательным, то следует взять его модуль.

Уравнение линии

Уравнением линии на плоскости XOY называется такое уравнение $F(x;y)=0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y в уравнении линии называются ***текущими координатами*** точек линии.

Простейшей из линий является прямая.

Чтобы составить уравнение прямой линии в декартовых координатах нужно каким-то образом задать условие, определяющее положение ее относительно координатных осей.

Углом наклона прямой к оси Ох называется угол φ, на который надо повернуть эту ось, чтобы она совпала с данной прямой.

Припишем углу φ знак плюс при повороте оси Ох против часовой стрелки, знак минус при повороте Ох по ходу часовой стрелки.

Тангенс угла наклона прямой к оси Ох называется ***угловым коэффициентом прямой.***

$$k = tg\,\varphi \qquad (2.1)$$

Угловой коэффициент характеризует направление прямой по отношению осей координат.

В частности, если $\varphi=0$, то и $k=0$. В этом случае прямая параллельна оси Ох, если $\varphi=\frac{\pi}{2}$, то $k=tg\,\varphi$ не существует, т.е. прямая перпендикулярна оси Ох.

Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом

Пусть дана некоторая прямая, составляющая угол φ с осью Ох, и отсекающая на оси Оу отрезок, по величине равный b. Возьмем на данной прямой произвольную точку $M(x;y)$, точка $N(0;b)$ - точка пересечения прямой с осью Оу.

Зная координаты точек $N(0;b)$ и $M(x;y)$, найдем угловой коэффициент прямой, выразив его через координаты этих точек.

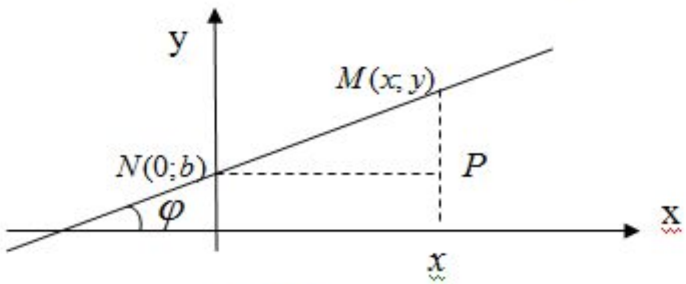


Рис.4

Из прямоугольного треугольника NMP (рис.4) получим $tg\angle MNP = \dfrac{MP}{NP}$.

Так как $\angle MNP = \varphi$, $MP = y - b$, $NP = x$, то

$$\frac{y-b}{x} = k, \quad y - b = kx$$

или

$$y = kx + b \qquad (2.2)$$

Уравнение прямой вида (2.2) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

Если прямая параллельна оси ОХ, то угол наклона прямой к оси ОХ равен нулю $\varphi = 0$, значит $k = tg0 = 0$. Тогда уравнение (2.2) примет вид

$$y = b. \qquad (2.3)$$

Любая точка этой прямой имеет ординату, равную b.

Если прямая параллельна оси ОУ, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$, значит $k = tg\frac{\pi}{2}$ не существует. В этом случае уравнение прямой будет иметь вид:

$$x = a, \qquad (2.4)$$

где a – абсцисса точки пересечения прямой с осью ОХ.

Любая точка этой прямой имеет абсциссу, равную a.

Если прямая проходит через начало координат, то $b = 0$. Тогда уравнение прямой будет иметь вид:

$$y = kx \qquad (2.5)$$

Пример 1. Составить уравнение прямой, образующей с осью ОХ угол $\frac{\pi}{3}$ и пересекающей ось ОУ в точке (0;-6).

Решение. Здесь $\varphi = \frac{\pi}{3}$, значит $k = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Величина отрезка, отсекаемого на оси ОУ равна $b = -6$.

Следовательно, искомое уравнение получим в виде:

$$y = \sqrt{3}x - 6.$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку, в данном направлении

Пусть дана точка на прямой $M_1(x_1; y_1)$ и угол наклона φ этой прямой к оси ОХ. Возьмем произвольную точку $M(x; y)$ на прямой, которая проходит через точку M_1.

Уравнение этой прямой будем искать в виде (2.2) $y = kx + b$, где неизвестное определится из условия прохождения прямой через точку M_1, т.е. $y_1 = kx_1 + b$, отсюда $b = y_1 - kx_1$.

Подставим найденное значение b в уравнение (2.2), получим:

$$y = kx + y_1 - kx_1$$

или

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (2.6)$$

Это и есть *уравнение прямой, проходящей через данную точку* $M_1(x_1; y_1)$ *в данном направлении* или *уравнением пучка прямых.*

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (-5,6), и наклоненной к оси ОХ под углом $\varphi = 135^0$.

Решение. Здесь $x_1 = -5$, $y_1 = 6$. Находим угловой коэффициент прямой: $k = tg135^0 = -1$.

Используя формулу (2.6) будем иметь:

$$y - 6 = -(x + 5) \qquad \text{или} \qquad x + y - 1 = 0.$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть даны точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$. Составим уравнение прямой, проходящей через эти две точки.

Уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M_1(x_1;y_1)$ имеет вид
$$y-y_1=k(x-x_1)$$
где неизвестный коэффициент k определим из условия прохождения прямой M_1M_2 через точку $M_2(x_2;y_2)$, т.е. координаты точки M_2 должны удовлетворять уравнению (2.6):
$$y_2-y_1=k(x_2-x_1)$$
отсюда
$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (2.7).$$
Подставляя (2.7) в (2.6), получим:
$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (2.8)$$
Это и есть искомое *уравнение прямой, проходящей через две данные точки.*

<u>Пример 1.</u> Составить уравнение прямой линии, проходящей через точки $M_1(1;\ 2)$ и $M_2(-1;\ 1)$.

<u>Решение.</u> Здесь $x_1=1$, $y_1=2$, $x_2=-1$, $y_2=1$. Подставим эти значения в (2.8):
$$\frac{y-2}{1-2}=\frac{x-1}{-1-1}, \text{ отсюда } \quad x-2y+3=0.$$

Пример 2. Составить уравнение медианы BE в треугольнике ABC, если $A(-1;3)$, $B(1;2)$, $C(1;-1)$.

Решение. Как BE – медиана, то точка E является серединой отрезка AC. Поэтому координаты точки E найдем по формулам (1.4)

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

Т.е. точка E имеет координаты: $E(0;1)$.

Для составления уравнение медианы воспользуемся теперь уравнением прямой, проходящей через две точки

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Получим:

$$\frac{y-2}{1-2} = \frac{x-1}{0-1}, \quad \frac{y-2}{-1} = \frac{x-1}{-1}, \quad -1\cdot(y-2) = -1\cdot(x-1).$$

Окончательно уравнение медианы получим в виде:

$$x - y + 1 = 0$$

Угол между двумя прямыми

Пусть две прямые заданы своими уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Будем называть одну из них первой (какую угодно), другую – второй.

Обозначим через α_1 угол наклона первой прямой к оси OX, через α_2 - угол наклона второй прямой. Для определенности будем считать, что $\alpha_2 > \alpha_1$.

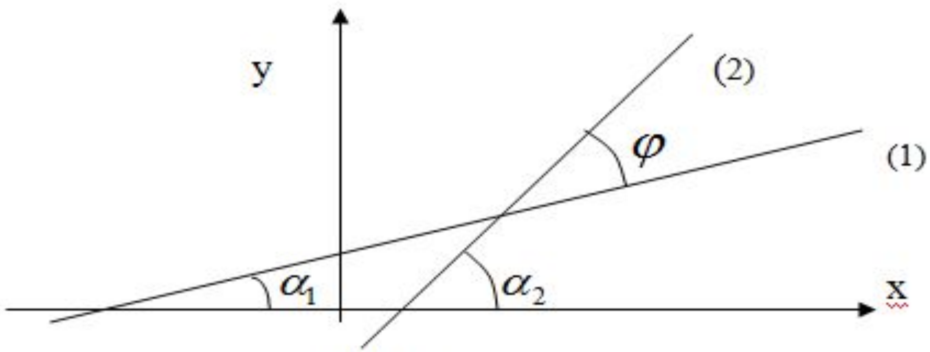


Рис.5

В этом случае угол между прямыми (1) и (2) будет равен $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$
Тогда имеем:

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}$$

где $tg\alpha_1 = k_1$, и $tg\alpha_2 = k_2$, следовательно

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \qquad (2.9)$$

Это есть формула для определения *угла между двумя прямыми.*

Условие параллельности и перпендикулярности прямых

При решении различных задач часто возникают вопросы об установлении параллельности или перпендикулярности двух прямых на плоскости.

Очевидно, что две прямые параллельны тогда и только тогда, когда углы наклона к оси ОХ двух прямых равны друг другу, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2$, следовательно $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$.

Отсюда:

$$k_1 = k_2 \qquad (2.10)$$

Это и есть *условие параллельности двух прямых* на плоскости.

Если данные прямые перпендикулярны, т.е. $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, тогда $tg\varphi$ теряет арифметический смысл, в этом смысле знаменатель правой части (2.9) должен быть равен нулю $1 + k_1k_2 = 0$.

Следовательно, признаком перпендикулярности двух прямых является равенство:

$$k_1k_2 = -1, \quad \text{или} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1} \qquad (2.11)$$

Пример 1. Найти угол между прямыми $y = 2x - 3$ и $3x + y - 2 = 0$.

Решение. Если перенумеровать прямые в том порядке, как они заданы, то угловой коэффициент первой прямой $k_1 = 2$, а для второй прямой $k_2 = -3$.

Тогда по формуле (2.9) получим:

$$tg\varphi = \frac{-3-2}{1+(-3)2} = 1.$$

Значит, угол между данными прямыми равен $\varphi = 45^0$.

Пример 2. Составить уравнение прямой линии, проходящей через точку $M(1;2)$ параллельно прямой $2x - 3y + 1 = 0$.

Решение. Угловой коэффициент данной прямой $k_1 = \dfrac{2}{3}$. Из условия параллельности прямых (2.10) угловой коэффициент прямой , для которой нужно составить уравнение будет также равен $k_2 = k_1 = \dfrac{2}{3}$. Используя уравнение (2.6) получим:

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x - 1) \quad \text{или} \quad 3y - 6 = 2x - 2$$

Окончательно будем иметь $2x - 3y + 4 = 0$.

Общее уравнение прямой

Все уравнения прямой описываются уравнениями первой степени относительно переменных x и y, поэтому общее уравнение прямой можно записать в виде:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (2.12).$$

Преобразуем это уравнение к виду уравнения прямой в угловым коэффициентом: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

Т.е. угловой коэффициент прямой, заданной в общем виде, можно вычислить по формуле: $k = -\frac{A}{B}$

Рассмотрим три частных случая, когда уравнение первой степени будет неполным:

1) C = 0, тогда (2.12) примет вид $Ax + By = 0$

Это уравнение определяет прямую, проходящую через начало координат.

2) B = 0, уравнение (2.12) примет вид

$$Ax + C = 0 \text{ или } x = a\text{, где } a = -\frac{C}{A}$$

Это уравнение определяет прямую, параллельную оси ОУ.

В частности, если $a = 0$, то уравнение $x = 0$ определяет прямую, которая совпадает с осью ОУ.

3) A = 0, тогда общее уравнение прямой будет иметь вид

$$By + C = 0 \quad \text{или} \quad y = b\text{, где } b = -\frac{C}{B}.$$

Это уравнение прямой параллельной оси ОХ.

В случае, если $b = 0$, то уравнение $y = 0$ является уравнением оси ОХ

Уравнение прямой «в отрезках»

Пусть дано общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0 \text{, где } A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$Ax + By = -C,$$

и разделим обе части этого уравнения на (– C),

тогда будем иметь:

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1.$$

Введя обозначение $-\dfrac{C}{A} = a, \ -\dfrac{C}{B} = b$,

окончательно получим:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (2.13).$$

Уравнение (2.13) называется *уравнением прямой «в отрезках»*.

Числа a и b имеют простой геометрический смысл – это величины отрезков, которые прямая (2.13) отсекает на осях координат: a – величина отрезка, отсекаемого на оси ОХ, b – величина отрезка, отсекаемого на оси ОУ.

Пример. Пусть дана прямая $3x-4y-12=0$. Составить для этой прямой уравнение прямой «в отрезках» и построить эту прямую.

Решение. Из данного уравнения получим $3x-4y=12$, разделим это уравнение на 12 и получим:

$$\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1.$$

На осях ОХ и ОУ данная прямая отсекает отрезки $a=4$ (на оси ОХ) и $b=-3$ (на оси ОУ). Т.е. точки пересечения прямой с осями координат А(4,0) и В(0,-3).

Для построения прямой соединим эти точки (рис.6).

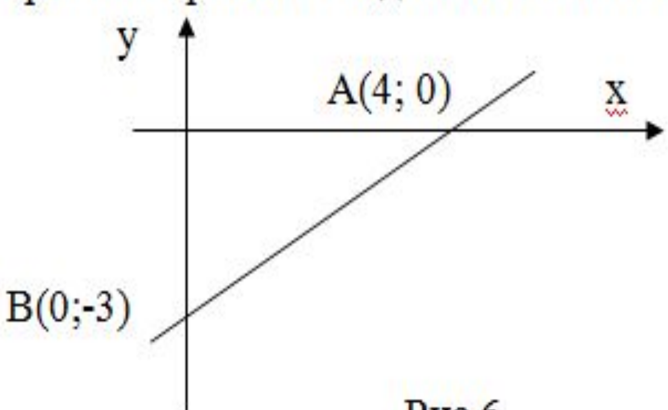
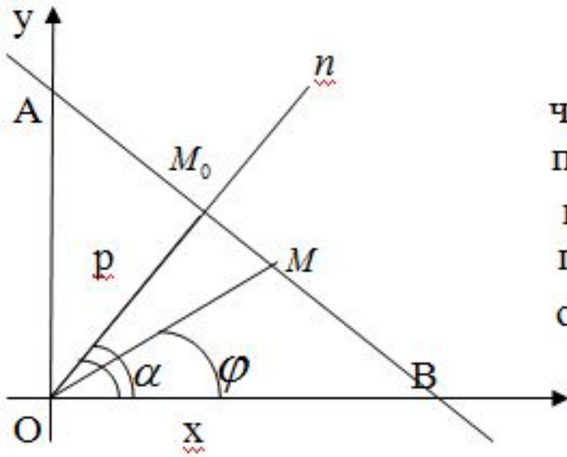


Рис.6

Нормальное уравнение прямой



Пусть дана прямая AB. проведём через начало координат прямую *n*, перпендикулярную к AB и будем называть её *нормалью*. M_0-точка пересечения нормали и прямой AB, обозначим $OM_0 = p$,

α - угол наклона OM_0 у оси OX.

Уравнение вида

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

называется ***нормальным уравнением прямой*** .

Чтобы привести общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ необходимо это уравнение умножить на нормирующий множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Знак μ выбирается противоположным знаку C. Если C = 0, то для μ можно выбрать любой знак.

Расстояние от точки до прямой

Если прямая AB задана общим уравнением прямой $Ax + By + C = 0$, то расстояние от точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямой AB вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Если прямая AB задана нормальным уравнением прямой $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, то расстояние от точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямой AB вычисляется по формуле:

$$d = |x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p|$$

Пример: Даны прямая $3x - 4y + 20 = 0$ и точка $M_1(4;3)$. Найти расстояние от точки M_1 от данной прямой.

Решение: 1 метод: используя формулу (2.25), получим:

$$d = \frac{|3\cdot 4 + (-4)\cdot 3 + 20|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{20}{5} = 4.$$

2 метод: Приведём данное уравнение к нормальному виду. Для этого определим нормирующий множитель μ, $A = 3, B = 4$, тогда

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = -\frac{1}{5},$$

знак минус взят потому, что $C = 20 > 0$.

Умножим данное уравнение на μ и получим: $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 4 = 0$.

Используя формулу (2.24), получим:

$$d = \left|4\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) + 3\cdot\frac{4}{5} - 4\right| = 4.$$

Контрольные вопросы к лекции №4

1. Написать формулу расстояния между двумя точками.
2. Деление отрезка в данном отношении. Координаты середины отрезка.
3. Вычисление площади треугольника.
4. Определение углового коэффициента прямой.
5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
6. Уравнение пучка прямых.
7. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
8. Общее уравнения прямой. Уравнение прямой в отрезках.
9. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой.
10. Угол между прямыми.
11. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.