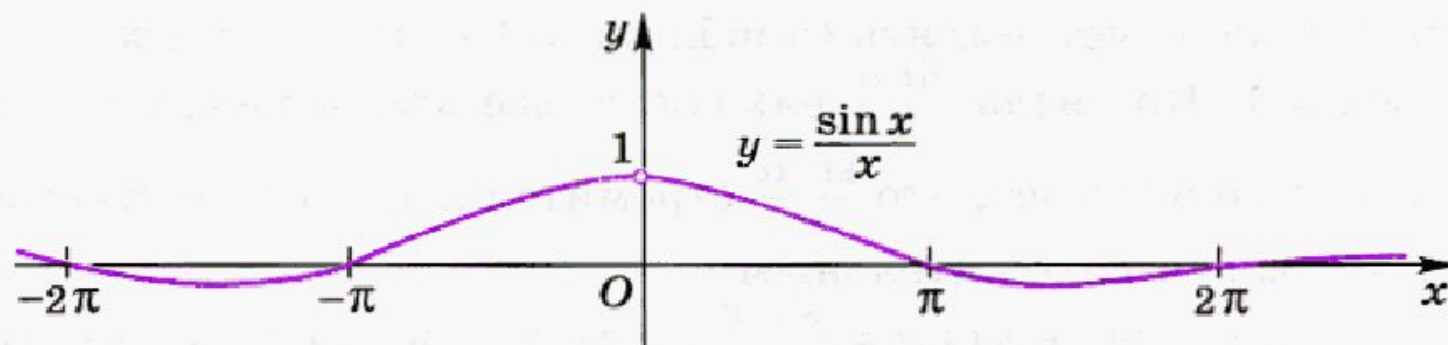


# Односторонние пределы

11 класс

Рассмотрим функцию  $y = \frac{\sin x}{x}$ . Она определена для всех  $x \neq 0$ , ее график изображен на рисунке 62.



■ Рис. 62

Посмотрим, как изменяются значения функции при  $x \rightarrow 0$ .

$x$	0,50	0,10	0,05
$y = \frac{\sin x}{x}$	0,9589	0,9983	0,9996

Как видно из таблицы, значения функции  $y = \frac{\sin x}{x}$  стремятся к 1, когда независимая переменная  $x$  стремится к нулю, оставаясь положительной.

Тот факт, что функция  $y = \frac{\sin x}{x}$  стремится к 1, когда  $x$  стремится к 0, оставаясь положительным, записывают так:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad (1)$$

и говорят, что предел функции  $y = \frac{\sin x}{x}$ , когда  $x$  стремится к нулю, принимая положительные значения, равен 1.

Но если  $x \rightarrow 0$ , принимая отрицательные значения, то указанный предел все равно существует и равен 1. Это получается из равенства (1) посредством замены переменной  $x = -u$ , в силу которой если  $x \rightarrow 0$ ,  $x < 0$ , то  $u \rightarrow 0$ ,  $u > 0$  и

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin(-x)}{(-x)} = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{\sin u}{u} = 1. \quad (2)$$

Равенство (2) означает, что предел функции  $y = \frac{\sin x}{x}$  равен 1, когда  $x$  стремится к нулю, оставаясь отрицательным.

Рассмотрим функцию  $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$  для таких значений  $x$ , что  $0 < |x| < 1$ . Можно показать, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

где  $e$  — иррациональное число, приближенно равное 2,71828... .

Рассмотрим теперь функцию  $y = f(x)$ . Пусть она определена в некоторой правой окрестности точки  $a$ , т. е. пусть она определена для каждого  $x$ , удовлетворяющего неравенствам  $a < x < a + \delta$ , при некотором  $\delta > 0$ . Говорят, что эта функция имеет **правый предел** в точке  $a$ , равный  $A$ , если из того, что  $x$  стремится к  $a$ , оставаясь в правой окрестности точки  $a$ , следует, что соответствующие значения  $f(x)$  стремятся к  $A$ . Это записывают так:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = A.$$

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой **левой окрестности** точки  $a$ , т. е. пусть она определена для каждого  $x$ , удовлетворяющего неравенствам  $a - \delta < x < a$  при некотором  $\delta > 0$ . Говорят, что эта функция имеет **левый предел** в точке  $a$ , равный  $B$ , если из того, что  $x$  стремится к  $a$ , оставаясь в левой окрестности  $a$ , следует, что соответствующие значения  $f(x)$  стремятся к  $B$ . Это записывают так:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = B.$$

В этих определениях  $A$  и  $B$  могут быть или любыми числами, или  $+\infty$ , или  $-\infty$ .

Отметим еще, что правый и левый пределы функции в точке  $a$  могут и не совпадать.

**ПРИМЕР 2.** У функции  $y = \frac{1}{x}$  правый предел в точке  $0$  равен  $+\infty$ , а левый предел равен  $-\infty$ .

**ПРИМЕР 3.** У функции  $y = \operatorname{tg} x$  левый предел в точке  $\frac{\pi}{2}$  равен  $+\infty$ , а правый предел равен  $-\infty$ .

Если существуют левый и правый пределы функции  $y = f(x)$  в точке  $a$  и оба они равны  $A$ , то говорят, что эта функция имеет предел в точке  $a$ , равный  $A$ , и пишут:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

В этом случае само собой разумеется, что функция  $y = f(x)$  определена в некоторой (полной) окрестности  $a - \delta < x < a + \delta$  точки  $a$  за исключением, быть может, самой точки  $a$ .

# Первый замечательный

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

# Второй замечательный

предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$



Говорят, что функция  $y = f(x)$  имеет предел при  $x \rightarrow a$ , равный числу  $A$ , если она определена в некоторой окрестности точки  $a$ , исключая, быть может, саму точку  $a$ , и если для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдется такое положительное число  $\delta$ , что для любого  $x$ , такого, что  $0 < |x - a| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . При этом пишут:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .