Односторонние пределы

11 класс

Рассмотрим функцию $y = \frac{\sin x}{x}$. Она определена для всех $x \neq 0$, ее график изображен на рисунке 62.

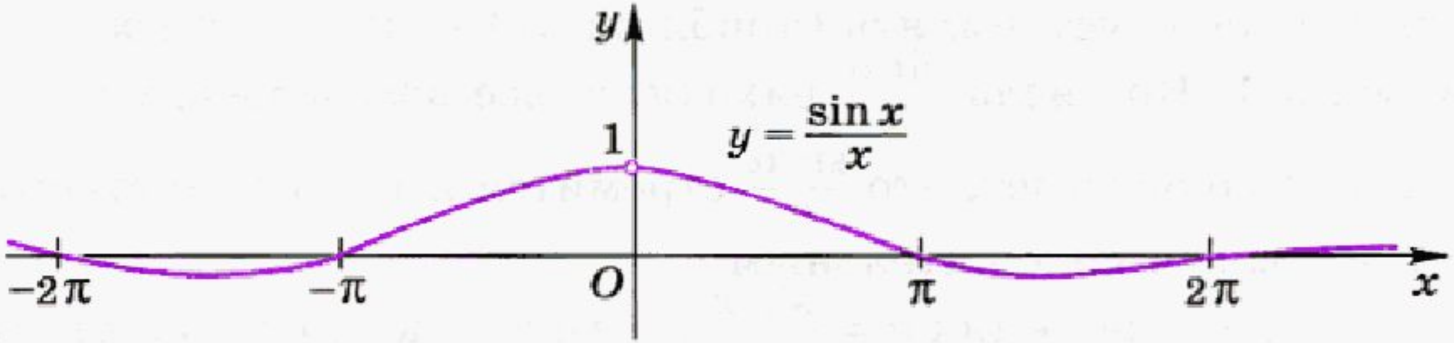

Рис. 62

Посмотрим, как изменяются значения функции при $x \to 0$.

x	0,50	0,10	0,05
$y = \frac{\sin x}{x}$	0,9589	0,9983	0,9996

Как видно из таблицы, значения функции $y = \frac{\sin x}{x}$ стремятся к 1, когда независимая переменная x стремится к нулю, оставаясь положительной.

Тот факт, что функция $y = \frac{\sin x}{x}$ стремится к 1, когда x стремится к 0, оставаясь положительным, записывают так:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad (1)$$

и говорят, что **предел функции $y = \frac{\sin x}{x}$, когда x стремится к нулю, принимая положительные значения, равен 1.**

Но если $x \to 0$, принимая отрицательные значения, то указанный предел все равно существует и равен 1. Это получается из равенства (1) посредством замены переменной $x = -u$, в силу которой если $x \to 0$, $x < 0$, то $u \to 0$, $u > 0$ и

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sin(-x)}{(-x)} = \lim_{\substack{u \to 0 \\ u > 0}} \frac{\sin u}{u} = 1. \qquad (2)$$

Равенство (2) означает, что предел функции $y = \frac{\sin x}{x}$ равен 1, когда x стремится к нулю, оставаясь отрицательным.

Рассмотрим функцию $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ для таких значений x, что $0 < |x| < 1$. Можно показать, что

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

где e — иррациональное число, приближенно равное 2,71828... .

Рассмотрим теперь функцию $y = f(x)$. Пусть она определена в некоторой **правой окрестности точки** a, т. е. пусть она определена для каждого x, удовлетворяющего неравенствам $a < x < a + \delta$, при некотором $\delta > 0$. Говорят, что эта функция имеет **правый предел в точке** a, равный A, если из того, что x стремится к a, оставаясь в правой окрестности точки a, следует, что соответствующие значения $f(x)$ стремятся к A. Это записывают так:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = A.$$

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой **левой окрестности точки** a, т. е. пусть она определена для каждого x, удовлетворяющего неравенствам $a - \delta < x < a$ при некотором $\delta > 0$. Говорят, что эта функция имеет **левый предел в точке** a, равный B, если из того, что x стремится к a, оставаясь в левой окрестности a, следует, что соответствующие значения $f(x)$ стремятся к B. Это записывают так:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = B.$$

В этих определениях A и B могут быть или любыми числами, или $+\infty$, или $-\infty$.

Отметим еще, что правый и левый пределы функции в точке a могут и не совпадать.

ПРИМЕР 2. У функции $y = \frac{1}{x}$ правый предел в точке 0 равен $+\infty$, а левый предел равен $-\infty$.

ПРИМЕР 3. У функции $y = \operatorname{tg} x$ левый предел в точке $\frac{\pi}{2}$ равен $+\infty$, а правый предел равен $-\infty$.

Если существуют левый и правый пределы функции $y = f(x)$ в точке a и оба они равны A, то говорят, что эта функция имеет **предел** в точке a, равный A, и пишут:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

В этом случае само собой разумеется, что функция $y = f(x)$ определена в некоторой (полной) окрестности $a - \delta < x < a + \delta$ точки a за исключением, быть может, самой точки a.

Первый замечательный

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет **предел** при $x \to a$, равный числу A, если она определена в некоторой окрестности точки a, исключая, быть может, саму точку a, и если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что для любого x, такого, что $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом пишут: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.