Из истории развития прикладной теории цифровых автоматов

- Перед Второй Мировой Войной (1939-1945 гг.) и 10 лет спустя, цифровые устройства были главным образом основаны на релейных схемах. Строгое доказательство того, что Булева алгебра может использоваться для анализа релейных схем, было выдвинуто советским физиком Шестаковым В. И. в 1935 г.. Американский инженер Шеннон К. Э. и японский ученый Накашима привели аналогичные доказательства в 1936-1938 г.. Шестаков В. И. показал, что релейные схемы способны моделировать функции алгебры логики. Причем истинность и ложность высказываний моделируется замкнутыми или открытыми контактами электрической цепи.
- Развитие электроники и микроэлектроники стимулировало создание и развитие теории цифровых автоматов. Наиболее важным достижением 60-х годов было создание эффективной модели цифрового автомата с памятью. Модель конечного автомата стала фундаментальной частью методов синтеза в теории автоматов с памятью. Таким образом, теория релейных устройств переросла в теорию дискретных (цифровых) автоматов.
- Автоматы, широко применяемые в практике, подразделяются на два класса: автоматы Мили и автоматы Мура, названные так в честь американских ученых, исследовавших впервые эти типы автоматов.
- Существенное влияние на теорию цифрового автоматов оказало изобретение компьютера. Академик Глушков В. М. внес большой вклад в развитие теории автоматов, особенно в применении к ЭВМ. Многочисленные теоретические работы в области автоматического синтеза устройств ЭВМ связаны с его именем.
- Практика проектирования поставила новые сложные задачи не только в области теории цифровых автоматов, но и в теории алгоритмов, теории информации и теории систем. Все это привело к дальнейшему развитию цифровых автоматов и перерастанию её в раздел технической кибернетики.
- Следует отметить, что советские ученые занимают ведущие позиции в мире в области теории конечных автоматов. Так, первая монография по релейно-контактным схемам написана Гавриловым М. А., первая машина для автоматического анализа и синтеза схем разработана Пархоменко П. П. и Рогинским В. Н., логический язык для проектирования алгоритмов синтеза впервые в мире разработан Закревским А. Д. К подобным работам относятся исследования по

Теория цифровых автоматов

- **В области теории цифровых автоматов** В.М. Глушков построил необходимые математические средства и показал, как компоненты ЭВМ, схемы и программы могут быть представлены через алгебраические выражения, что обеспечило возможность построения и трансформации моделей компонентов ЭВМ. Эти результаты были внедрены при проектировании ЭВМ в Институте кибернетики АН УССР и в других организациях. В.М. Глушков создал школу в области теории проектирования ЭВМ, ядро которой составили **Ю.В.Капитонова**, **А.А. Летичевский** и др.
- В 1961 г. была издана знаменитая монография В. М. Глушкова «**Синтез цифровых автоматов**», переведенная позже на английский язык и изданная в США и других странах.
- В 1964 г. за цикл работ по теории автоматов В. М. Глушков был удостоен Ленинской премии. В 1964 г. В. М. Глушков был избран действительным членом АН СССР по Отделению математики (математика, в том числе вычислительная математика).
- Использование понятия «автомат» в качестве математической абстракции структуры и процессов, происходящих внутри вычислительных машин, открыло совершенно новые возможности в технологии создания компьютеров. Современные системы автоматизации проектирования ЭВМ повсеместно используют эти идеи.

Автомат – дискретный преобразователь информации, который на основе входных сигналов, поступающих в дискретные моменты времени, и с учетом своего состояния вырабатывает выходные сигналы и изменяет свое состояние.

Под автоматом будем понимать некоторую математическую модель.

Вопросы практической реализации не рассматриваются. В связи с этим при построении автоматов будем иметь в виду, что **автомат функционирует в абстрактном времени и все переходы происходят мгновенно**.

В зависимости от законов функционирования различают 3 вида автоматов

1. Автоматы первого рода, или автоматы Мили.
2. Автоматы второго рода.
3. Правильные автоматы второго рода, или автоматы Мура.

На практике наибольшее распространение получили автоматы Мили и автоматы Мура.

Задание автоматов

Автоматы могут быть заданы следующими способами:

1. В виде графа.

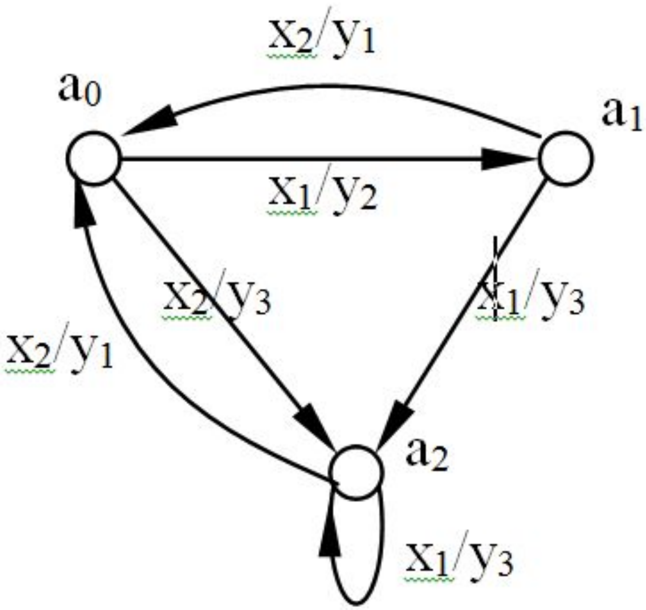


Рис. 1 Автомат Мили

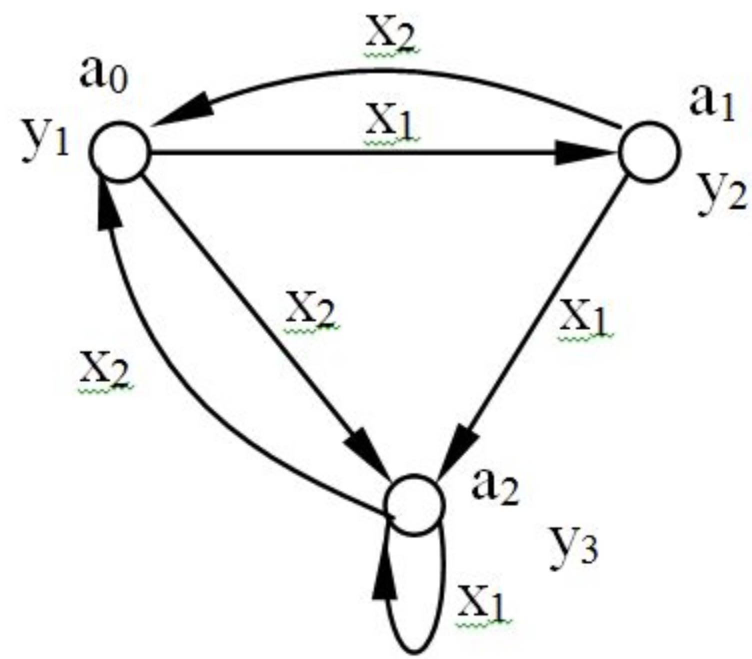


Рис.2 Автомат Мура

При построении автомата Мили каждая дуга, соединяющая вершины a_i и a_j, имеет обозначение x_k/y_m. Это означает следующее: находясь, в состоянии a_i автомат, отрабатывая входной сигнал x_k, выдает выходной сигнал y_m и переходит в состояние a_j.

Так как в автомате Мура выходной сигнал y_m зависит только от текущего состояния a_j, то каждая дуга, соединяющая вершины a_i и a_j, имеет обозначение x_k.

Так как в автомате Мура выходной сигнал y_m зависит только от текущего состояния a_j, то каждая дуга, соединяющая вершины a_i и a_j, имеет обозначение x_k.

2 способ. В виде таблиц перехода и выхода (автомат Мили); отмеченной таблицы перехода (автомат Мура).

Автомат Мили описывается с помощью двух таблиц: таблицы перехода и таблицы выхода:

Таблица переходов (ТП)

	a_0	a_1	a_2
x_1	a_1	a_2	a_2
x_2	a_2	a_0	a_0

Таблица выходов (ТВ)

	a_0	a_1	a_2
x_1	y_2	y_3	y_3
x_2	y_3	y_1	y_1

Автомат Мура описывается с помощью отмеченной таблицы перехода (ТП)

	y_1	y_2	y_3
	a_0	a_1	a_2
x_1	a_1	a_2	a_2
x_2	a_2	a_0	a_0

ПРИМЕР.

Синтезировать автомат, на вход которого подаются монеты номинальной стоимостью 1, 2 и 5 рублей, а на выходе автомат выдает билет, если сумма набранных монет составляет 5 рублей, если сумма меньше 5 рублей, то автомат ничего не выдает, если сумма больше 5 рублей, то автомат возвращает деньги.

Определим входной, выходной алфавиты и множество внутренних состояний:

входной алфавит - монеты номинальной стоимостью 1, 2 и 5 рублей;

выходной алфавит $Y=\{Н, Б, В\}$ - на выходе возможны выходные символы: $Н$ – ничего; $Б$ – билет; $В$ – возврат.

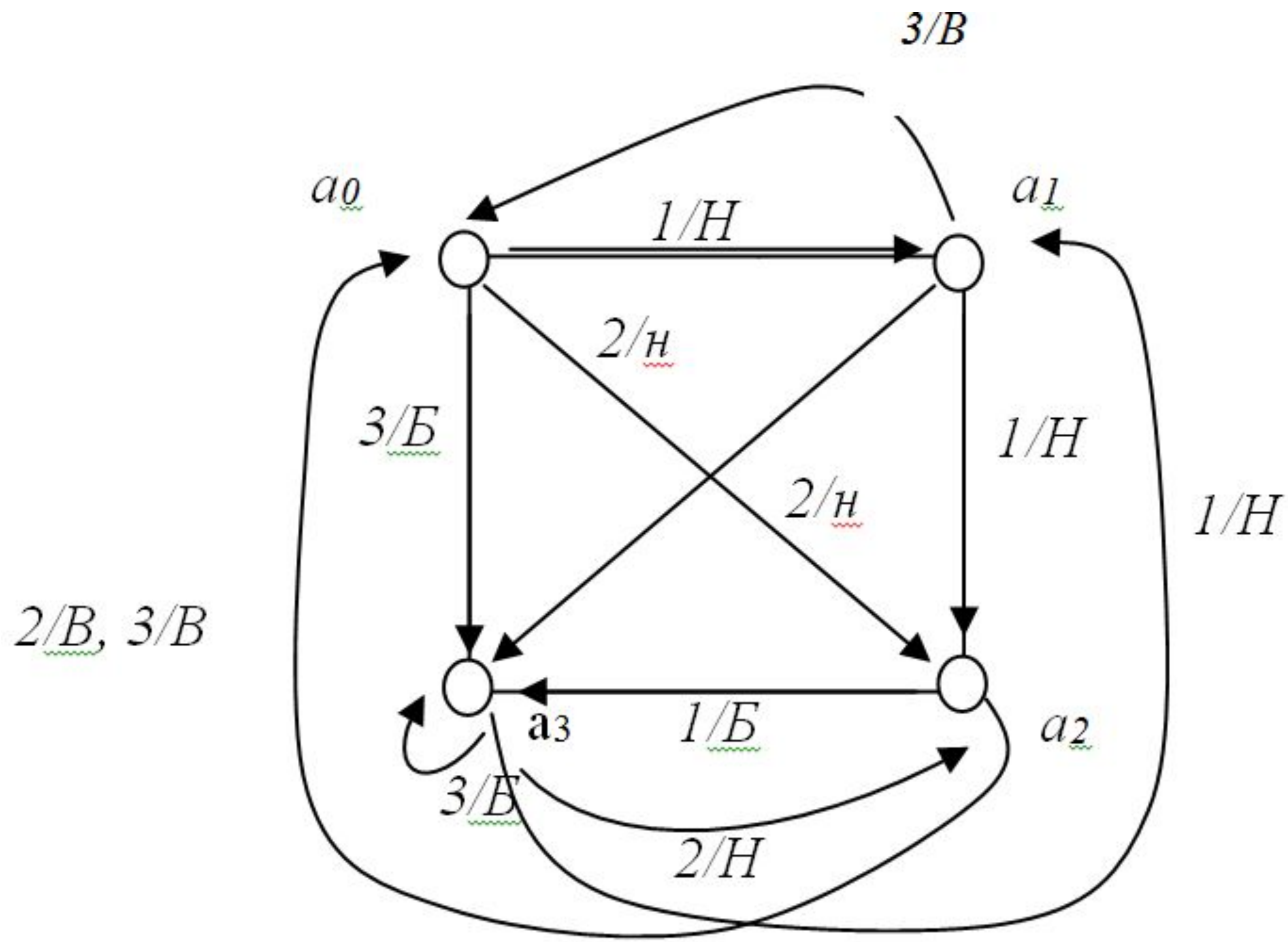
$A=\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ множество внутренних состояний ,

где a_0 – начальное состояние автомата « в автомате ничего нет»;

a_1 – «в автомате 1 рубль»; a_2 – «в автомате 2 рубля»;

a_3 – «в автомате 5 рублей».

Граф автомата Мили имеет вид



Таблицы перехода и выхода представлены в виде:

Таблица переходов (ТП)

	a_0	a_1	a_2	a_3
1	a_1	a_2	a_3	a_1
2	a_2	a_3	a_0	a_2
3	a_3	a_0	a_0	a_3

Таблица выходов (ТВ)

	a_0	a_1	a_2	a_3
1	Н	Н	Б	Н
2	Н	Б	В	Н
3	Б	В	В	Б

3. Автоматная матрица

	a_0	a_1	a_2	a_3
a_0		*1/Н*	*2/Н*	*3/Б*
a_1	*3/В*		*1/Н*	*2/Н*
a_2	*2/В,3/В*			*1/Б*
a_3		*1/Н*	*2/Н*	*3/Б*

Неопределенным состоянием называется несуществующее состояние.

Частичным автоматом называется автомат, в котором некоторые состояния в таблице перехода не определены. Для дальнейшего исследования неопределенное состояние некоторым образом доопределяют.

Минимизация автоматов

Входным словом называется совокупность сигналов, поступающих на вход.

Выходным словом называются совокупность сигналов на выходе.

Два автомата называются ***эквивалентными*,** если они имеют одинаковый входной и выходной алфавит, и на одинаковые входные слова выдают одинаковые выходные слова.

Два состояния ***одноэквивалентными*** , если на одинаковое входное слово выдается одинаковый выходной сигнал.

Два состояния ***k-эквивалентными***, если на одинаковое входное слово длиной в k-единиц выдается одинаковый выходной сигнал длиной в k-единиц.

Эквивалентными состояниями называются k-эквивалентные состояния для любых k.

Эквивалентные состояния объединяются в ***класс эквивалентности***.

Минимальный автомат – это автомат, состоящий из наименьшего числа состояний, каждое из которых является классом эквивалентности исходного автомата.

Алгоритм минимизации автомата Мили

1. По таблице выхода находятся состояния с одинаковыми выходными сигналами. Данные состояния объединяются в класс одноэквивалентных состояний. Проводится перекодировка.
2. По таблице перехода определяются классы двухэквивалентных состояний: для любого класса выделяется состояние, которое на одинаковый входной сигнал переходит в одинаковое состояние. Объединяем двухэквивалентные состояния в классы двухэквивалентных состояний. Проводится перекодировка.
3. Алгоритм выполняется, пока в классах k-эквивалентных состояний не находятся одинаковые состояния.
4. Вводятся новые состояния, соответствующие классам эквивалентных состояний.
5. С учетом новых состояний переписываются таблицы перехода и выхода.

ПРИМЕР

Пусть задан автомат Мили

Таблица выходов

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	1	0	1	0	1	0	1	1	0
x_2	0	1	0	1	0	1	0	0	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	0	1

Таблица переходов

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	2	1	2	3	6	8	6	4	7
x_2	2	4	2	2	4	9	2	4	9
x_3	5	4	5	2	3	6	8	7	7

Определяем класс одноэквивалентных состояний по таблице выхода

Таблица выходов

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	1	0	1	0	1	0	1	1	0
x_2	0	1	0	1	0	1	0	0	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	0	1
	а	*в*	*а*	*в*	*а*	*в*	*а*		*в*

Выделяются два класса одноэквивалентных состояний $a=\{1,3,5,7,8\}$ и $b=\{2,4,6,9\}$. Перегруппируем таблицу перехода по классам одноэквивалентных состояний

Таблица переходов

	а					*в*			
	1	3	5	7	8	2	4	6	9
x_1	2	2	6	6	4	1	3	8	7
x_2	2	2	4	2	4	4	2	9	9
x_3	5	5	3	8	7	4	2	6	7

Перекодируем состояния по полученным классам

Таблица переходов

	а					*в*			
	1	3	5	7	8	2	4	6	9
x_1	*2/в*	*2/в*	*6/в*	*6/в*	*4/в*	*1/а*	*3/а*	*8/а*	*7/а*
x_2	*2/в*	*2/в*	*4/в*	*2/в*	*4/в*	*4/в*	*2/в*	*9/в*	*9/в*
x_3	*5/а*	*5/а*	*3/а*	*8/а*	*7/а*	*4/в*	*2/в*	*6/в*	*7/а*

Выделяем внутри каждого из классов одинаковые состояния, тем самым определяя классы двухэквивалентных состояний

Таблица переходов

	а					*в*			
	1	3	5	7	8	2	4	6	9
x_1	*2/в*	*2/в*	*6/в*	*6/в*	*4/в*	*1/а*	*3/а*	*8/а*	*7/а*
x_2	*2/в*	*2/в*	*4/в*	*2/в*	*4/в*	*4/в*	*2/в*	*9/в*	*9/в*
x_3	*5/а*	*5/а*	*3/а*	*8/а*	*7/а*	*4/в*	*2/в*	*6/в*	*7/а*
	а					*в*			*с*

Определим новые классы двухэквивалентных состояний a={1,3,5,7,8}, b={2,4,6}, c={9}, перекодируем по новым состояниям и выделим классы трехэквивалентных состояний

Таблица переходов

	a					*в*			*c*
	1	3	5	7	8	2	4	6	9
x_1	2/в	2/в	6/в	6/в	4/в	1/a	3/a	8/a	7/a
x_2	2/в	2/в	4/в	2/в	4/в	4/в	2/в	9/c	9/c
x_3	5/a	5/a	3/a	8/a	7/a	4/в	2/в	6/в	7/a
	a					*в*		*c*	*d*

Классы трехэквивалентных состояний a={1,3,5,7,8}, b={2,4}, c={6}, d={9} перекодируем по новым состояниям и выделим классы четырехэквивалентных состояний

Таблица переходов

	a					*в*		*c*	*d*
	1	3	5	7	8	2	4	6	9
x_1	2/в	2/в	6/c	6/c	4/в	1/a	3/a	8/a	7/a
x_2	2/в	2/в	4/в	2/в	4/в	4/в	2/в	9/d	9/d
x_3	5/a	5/a	3/a	8/a	7/a	4/в	2/в	6/c	7/a
	a		*в*		*a*	*c*		*d*	*e*

Перегруппируем таблицу перехода по новым классам a={1,3,8}, b={5,7}, c={2,4}, d={6}, e={9}, перекодируем по новым состояниям.

Таблица переходов

	a			*в*		*c*		*d*	*e*
	1	3	8	5	7	2	4	6	9
x_1	*2/c*	*2/c*	*4/c*	*6/d*	*6/ d*	*1/a*	*3/a*	*8/a*	*7/b*
x_2	*2/c*	*2/c*	*4/c*	*4/c*	*2/c*	*4/c*	*2/c*	*9/e*	*9/e*
x_3	*5/в*	*5/в*	*7/в*	*3/a*	*8/a*	*4/c*	*2/c*	*6/d*	*7/b*
	a			*в*		*c*		*d*	*e*

Так как внутри из каждого класса дальнейшее разбиение на классы не осуществляется, это означает, что найдены классы эквивалентных состояний**:.** ***a*={1,3,8}, *b*={5,7}, *c*={2,4}, *d*={6}, *e*={9}.**

Минимизированный автомат Мили в новых состояниях имеет вид

Таблица переходов

	a	*b*	*c*	*d*	*e*
x_1	*c*	*d*	*a*	*a*	*b*
x_2	*c*	*c*	*c*	*e*	*e*
x_3	*в*	*c*	*c*	*d*	*b*

Таблица выходов

	a	*b*	*c*	*d*	*e*
x_1	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*
x_2	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*
x_3	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*

Особенности минимизации автомата Мура

Автомат Мура минимизируется аналогично минимизации автомата Мили за исключением первого шага. Выделение класса одноэквивалентных состояний осуществляется по строке выходов отмеченной таблицы переходов автомата Мура.

Минимизация частичных автоматов

Для того, чтобы провести минимизацию частичных автоматов неопределенное состояние доопределяется самостоятельно. Далее минимизация автоматов осуществляется по вышеизложенному алгоритму.

Переход от автомата Мили к автомату Мура

Автоматы Мили и автоматы Мура отличаются функцией выхода.

Автомат Мили: $y(t) = \varphi(a(t-1), x(t))$

Автомат Мура: $y(t) = \varphi(a(t))$

То есть произвольному состоянию a_i автомата Мили и входному сигналу x_j соответствует состояние b_{ij} автомата Мура: $a_i x_j \to b_{ij}$

При этом начальные состояния автоматов Мили и Мура совпадают: $a_0 = b_0$

Таким образом, можно перекодировать таблицу перехода автомата Мили и составить отмеченную таблицу переходов автомата Мура.

Пусть задан автомат Мили

Таблица переходов (ТП)

	a_0	a_1	a_2
x_1	a_1	a_2	a_2
x_2	a_2	a_0	a_0

Таблица выходов (ТВ)

	a_0	a_1	a_2
x_1	y_2	y_3	y_3
x_2	y_3	y_1	y_1

Перекодируем матрицу перехода автомата Мили:

	$a_0 = b_0$	a_1	a_2
x_1	a_1/b_{01}	a_2/b_{11}	a_2/b_{21}
x_2	a_2/b_{02}	a_0/b_{12}	a_0/b_{22}

Составляем таблицу перехода автомата Мура

	b_0	b_{01}	b_{02}	b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}
x_1	b_{01}	b_{11}	b_{21}	b_{21}	b_{01}	b_{21}	b_{01}
x_2	b_{02}	b_{12}	b_{22}	b_{22}	b_{02}	b_{22}	b_{02}

При составлении таблицы перехода автомата Мили рассуждаем следующим образом: состояние автомата Мура b_{01} соответствует состоянию автомата Мили a_1, следовательно, столбец состояния автомата Мура b_{01} совпадает со столбцом состояния автомата Мили a_1.

Так как в автомате Мура произвольному состоянию b_{ij} соответствует некоторый выходной сигнал, то строка выхода отмеченной таблицы перехода автомата Мура однозначно определяется таблицей выхода автомата Мили (состоянию b_{01} соответствует выходной сигнал y_2; - b_{02} - y_3)

		y_2	y_3	y_3	y_1	y_3	y_1
	b_0	b_{01}	b_{02}	b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}
x_1	b_{01}	b_{11}	b_{21}	b_{21}	b_{01}	b_{21}	b_{01}
x_2	b_{02}	b_{12}	b_{22}	b_{22}	b_{02}	b_{22}	b_{02}

Выходной сигнал, соответствующий состоянию b_0 , выбирается произвольно.

	y_2	y_2	y_3	y_3	y_1	y_3	y_1
	b_0	b_{01}	b_{02}	b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}
x_1	b_{01}	b_{11}	b_{21}	b_{21}	b_{01}	b_{21}	b_{01}
x_2	b_{02}	b_{12}	b_{22}	b_{22}	b_{02}	b_{22}	b_{02}

Если автомат Мили содержит *m*-состояний и *n* входных символов, то количество состояний автомата Мура определяется по формуле:

$$k = m \times n + 1$$

Переход от автомата Мура к автомату Мили

Переход от автомата Мура к автомату Мили заключается в построении таблицы выходов. Построение состоит в подстановке выходных сигналов, отмечающих состояния в отмеченной таблице переходов, вместо состояний, в которые автомат переходит.

Тем самым, если говорить в терминах графов, выходные сигналы от состояний переносятся на дуги, которые в эти состояния заходят.

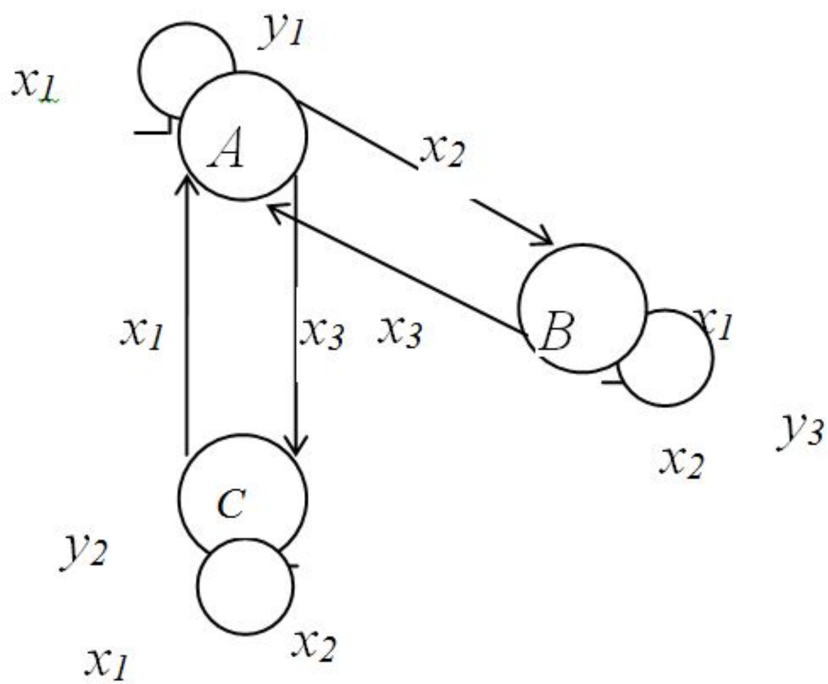
А таблица переходов автомата Мили получается из отмеченной таблицы переходов автомата Мура отбрасыванием строки выходов.

ПРИМЕР

Пусть задан автомат Мура в виде отмеченной таблицы перехода

	y_1	y_3	y_2
	A	B	C
x_1	A	B	A
x_2	B	B	C
x_3	C	A	C

Данный автомат может быть
представлен в виде графа:



Автомат Мили будет иметь вид: в виде таблиц перехода и выхода

Таблица переходов

	A	B	C
x_1	A	B	A
x_2	B	B	C
x_3	C	A	C

Таблица выходов

	A	B	C
x_1	y_1	y_3	y_1
x_2	y_3	y_3	y_2
x_3	y_2	y_1	y_2

в виде графа