Лекция 3

1. Вычисление площадей в прямоугольных координатах
2. Вычисление площадей с помощью параметрических уравнений
3. Вычисление площадей в полярных координатах

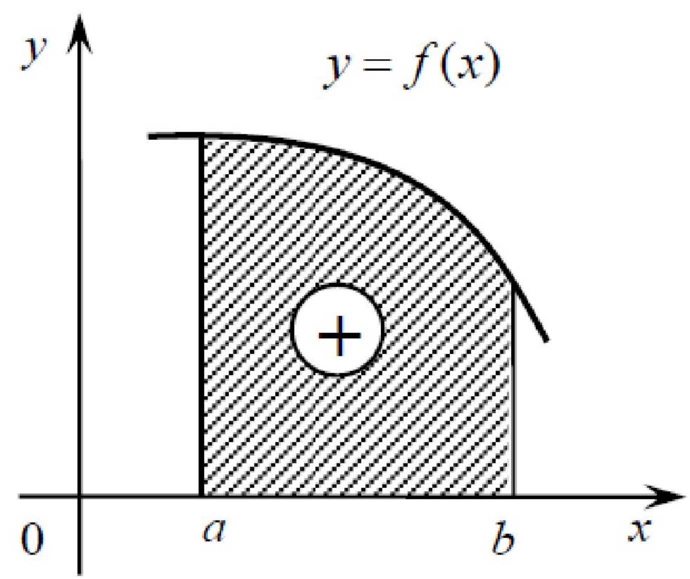
ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

$f(x) \geq 0$

- Если $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a; b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью *Ox* и прямыми $x = a$; $x = b$ вычисляется по

Формуле

$$S = \int_a^b fx dx = \int_a^b y dx$$

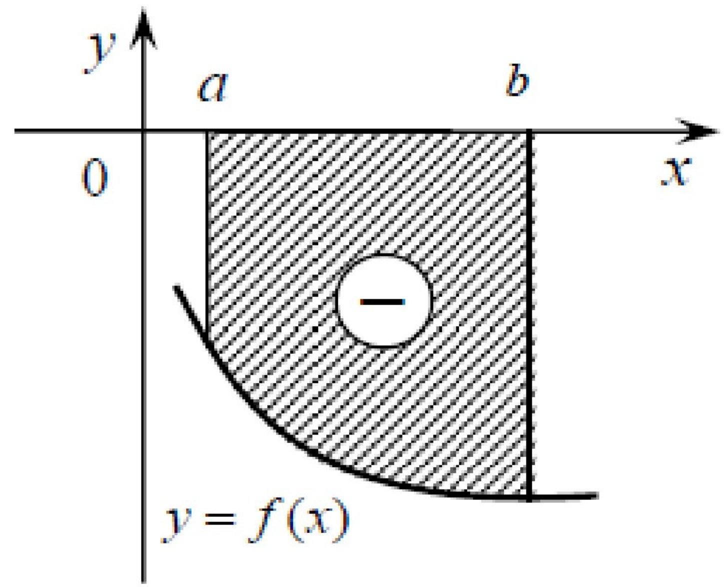


$f(x) \leq 0$

- Если $f(x) \leq 0$ для всех $x \in [a; b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$; $x = b$ вычисляется по

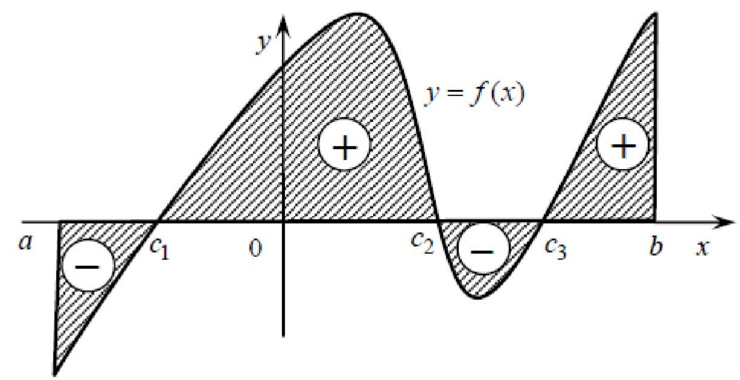
Формуле

$$S = -\int_a^b fxdx = -\int_a^b ydx$$



$f(x)$ меняет на отрезке $[a;b]$ свой знак

- Если функция $f(x)$ меняет на отрезке $[a; b]$ свой знак конечное число раз, то площадь криволинейной трапеции равна алгебраической сумме площадей криволинейных трапеций, взятых с соответствующим знаком:



Формула для вычисления площади

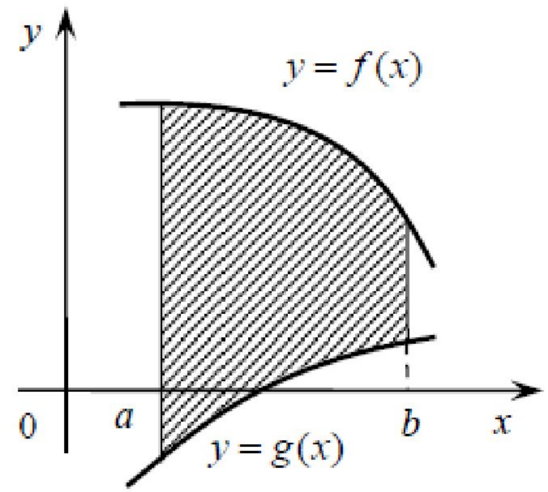
$$S = -\int_{a}^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx - \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx + \int_{c_3}^{b} f(x)dx,$$

или

$$S = \left|\int_{a}^{c_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_2}^{c_3} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_3}^{b} f(x)dx\right|.$$

$\boldsymbol{f(x) \geq g(x)}$

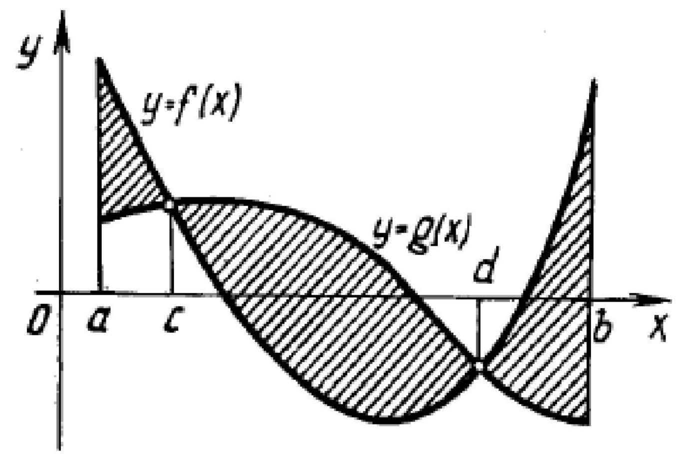
- Если требуется найти площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций: $f(x)$ и $g(x)$, то ее можно рассматривать как разность площадей двух криволинейных трапеций: верхней границей первой из них служит график функции $f(x)$, а второй – $g(x)$, если $f(x) \geq g(x)$ для всех $x \in [a, b]$.



$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx .$$

$f(x) - g(x)$ не сохраняет знак на отрезке $[a; b]$

- В случае если разность $f(x) - g(x)$ не сохраняет знак на отрезке $[a; b]$, этот отрезок разбивают на частичные отрезки, на которых функция $f(x) - g(x)$ сохраняет свой знак.



Формула для вычисления площади

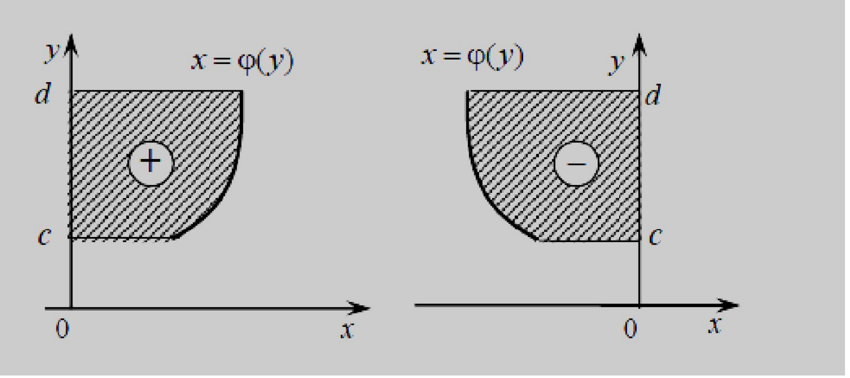
- $$S = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^d (g(x) - f(x))dx +$$
$$+ \int_d^b (f(x) - g(x))dx$$

Площадь криволинейной трапеции вдоль оси *Oy*

- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$,

осью Oy и прямыми
$y = c;\ y = d$ вычисляется по формуле

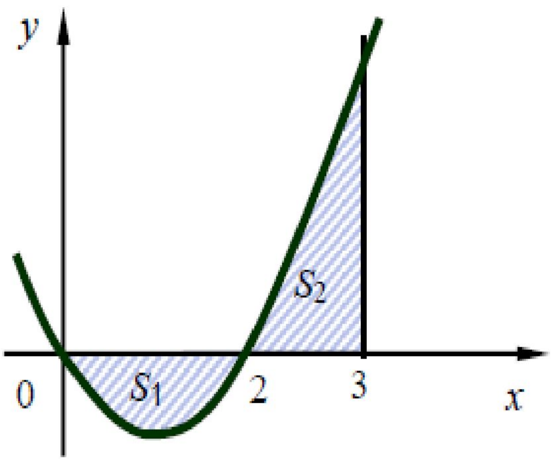
$$S = \pm \int_c^d \varphi(y)dy = \pm \int_c^d x dy$$



ПРИМЕРЫ

Пример 1

- Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью *Ox*, графиком функции $y = x^2 - 2x$ и прямой $x = 3$



Решение

$$S = S_1 + S_2 = \left|\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right)dx\right| + \left|\int_2^3 \left(x^2\right) - 2x)dx\right| = \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_2^3 =$$

$$= \left|\left(\frac{8}{3} - 4\right)\right| + \left|\left(\frac{27}{3} - 4\right)\right| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

Пример 2

- Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \cos x$, осью Ox и прямыми $x = 0, x = 3\pi/2$.

Неверное решение

•

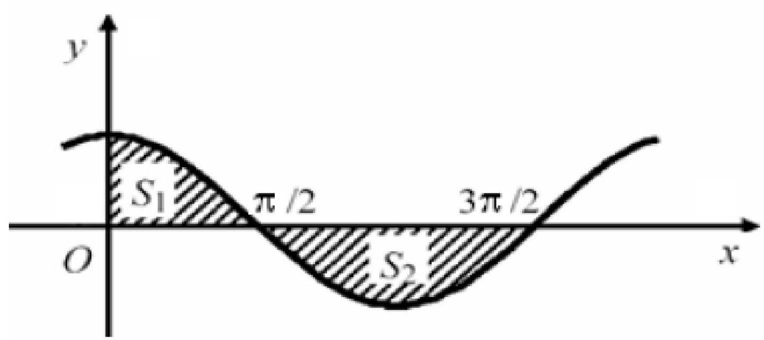
Часто после этого, спохватившись, что площадь фигуры не может быть отрицательной, результат «слегка» подправляют, и пишут: $S = 1$.

Здесь ошибка возникла из-за того, что не было проверено условие $f(x) > 0$, при котором справедлива формула для площади криволинейной трапеции $S = \int_a^b fxdx = \int_a^b ydx$.

На самом же деле, это условие не выполнено!

Правильное решение

- Очевидно, что на отрезке $[0; 3\pi/2]$ имеется область, где этот график функции $y = cosx$ выше оси *Ox* (а именно, на интервале $(0; \pi/2)$. В то же время, на интервале $(\pi/2; 3\pi/2)$ график расположен ниже оси *Ox*. Поэтому для вычисления площади искомую фигуру следует разбить на две части: $S = S_1 + S_2$.



$$S_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

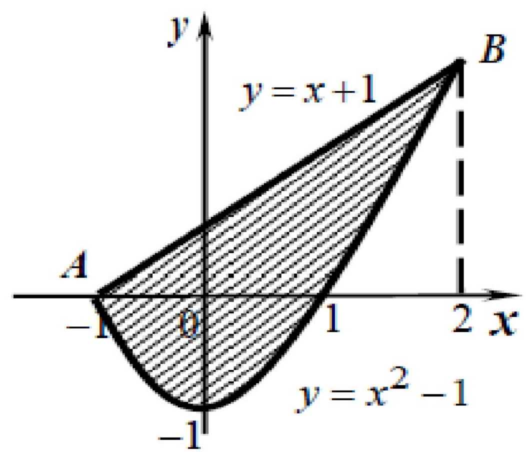
$$S_2 = -\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x dx = \sin x\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = -\sin\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = 2.$$

$$S = S_1 + S_2 = 3.$$

Пример 3

- Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 1$; $y = x + 1$; $x = 2$

Решение. Решив систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$ найдем координаты точки пересечения этих линий: $A(-1; 0)$; $B(2; 3)$



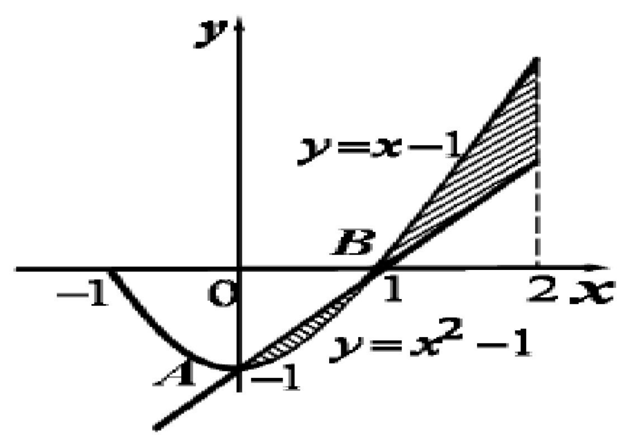
Вычисление площади

$$S = \int_{-1}^{2}\left((x+1)-(x^2-1)\right)dx = \int_{-1}^{2}\left((x-x^2+2)\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{29}{3}.$$

Пример 4

- Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 1$; $y = x - 1$; $x = 2$

Решение. Решив систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$ найдем координаты точки пересечения этих линий: $A(0; -1)$; $B(1; 0)$



Вычисление площади

$$S=\int_0^1\Big((x-1)-(x^2-1)\Big)dx+\int_1^2\Big((x^2-1)-(x-1)\Big)dx=$$

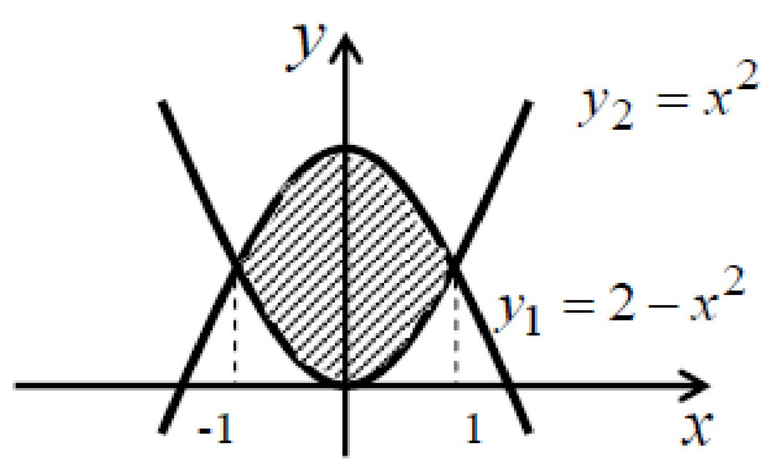
$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right)=1.$$

Пример 5

- Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2; y = 2 - x^2$

Решение. Решив систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$

найдем координаты точки пересечения этих линий: $A(-1; 1); B(1; 1)$



Вычисление площади

$$S=\int_{-1}^{1}\left(\left(2-x^2\right)-x^2\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(2-2x^2\right)dx=2\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx=$$

$$=2\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=2\left(1-\frac{1}{3}-\left(-1-\frac{(-1)^3}{3}\right)\right)=\frac{8}{3}.$$

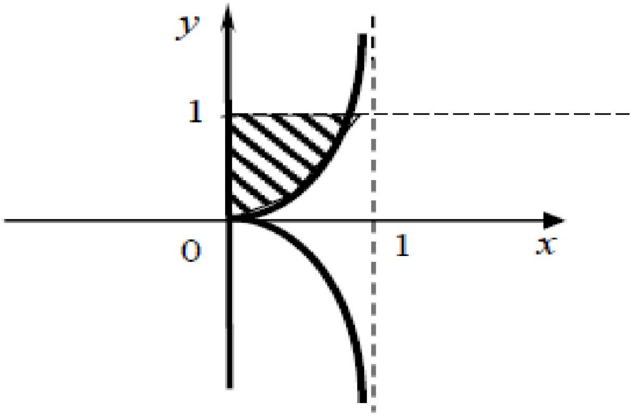
Пример 6

- Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2 = x^3$ прямой $y = 1$ и осью Oy

Решение. Для вычисления площади этой фигуры воспользуемся формулой, когда кривая задана функциональной зависимостью $x = x(y)$.

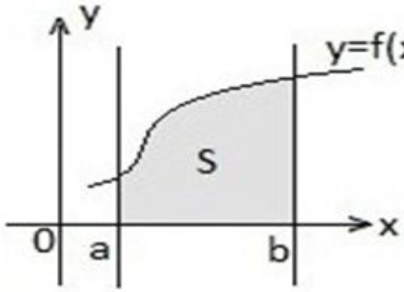
Имеем $x = y^{\frac{2}{3}}$, тогда

$$S = \int_0^1 y^{2/3} dy = \frac{3}{5} y^{5/3} \Big|_0^1 = 0{,}6.$$

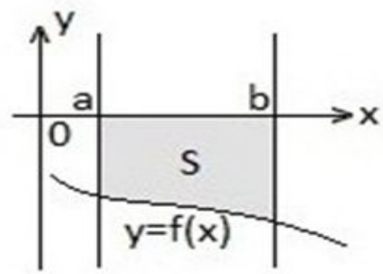


Шпаргалка

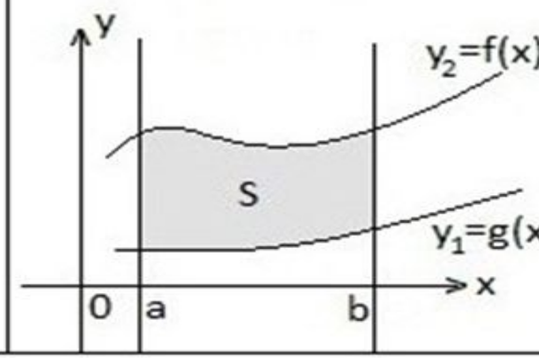
1) $S=\int_a^b f(x)\,dx$



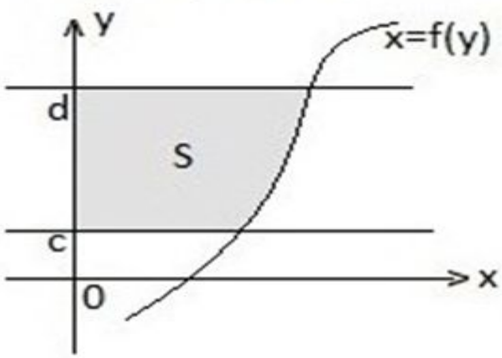
2) $S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$



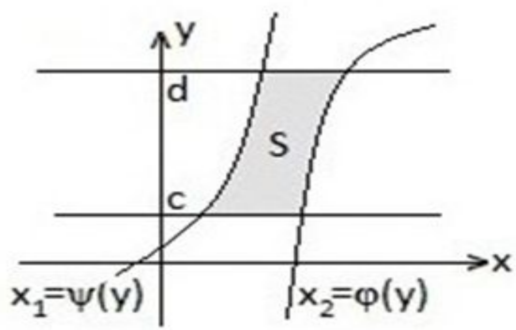
3) $S=\int_a^b (y_2-y_1)\,dx$



4) $S=\int_c^d f(y)\,dy$

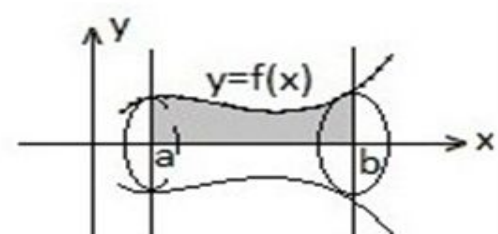


5) $S=\int_c^d (x_2-x_1)\,dy$



6) Объем тела вращения

$V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$



ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР, ОГРАНИЧЕННЫХ ЛИНИЯМИ, ЗАДАННЫМИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

Формула для вычисления площади

- Если криволинейная трапеция ограничена линией, заданной уравнениями в параметрическом виде $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_1 \le t \le t_2$, осью ОХ и прямыми $x = a$; $x = b$, причем $x(t_1) = a$; $x(t_2) = b$, то ее площадь S вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$

Пример

- Вычислить площадь эллипса с полуосями a и b.

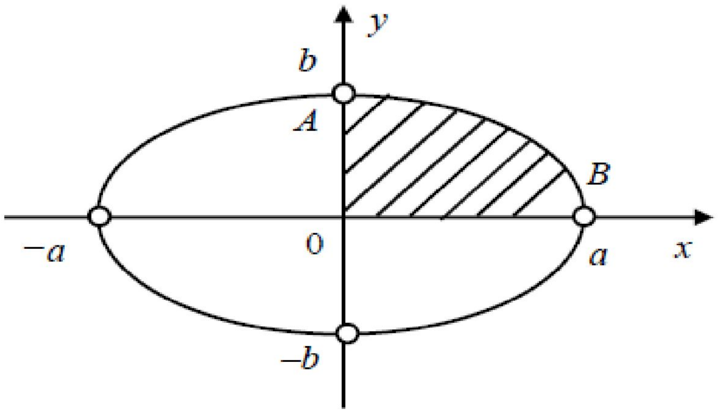
Решение

Запишем параметрические уравнения эллипса:

$$\begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi,$$

В виду симметричности эллипса вычислим площадь его четверти, которая лежит в первом квадранте $S = 4\int_a^b ydx$

Вычисление площади эллипса



$$S=4\int_0^a y\,dx=-4ab\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 t\,dt=2ab\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)\,dt=2ab\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\pi ab.$$

При $a=b=R$ получаем формулу площади круга $S=\pi R^2$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

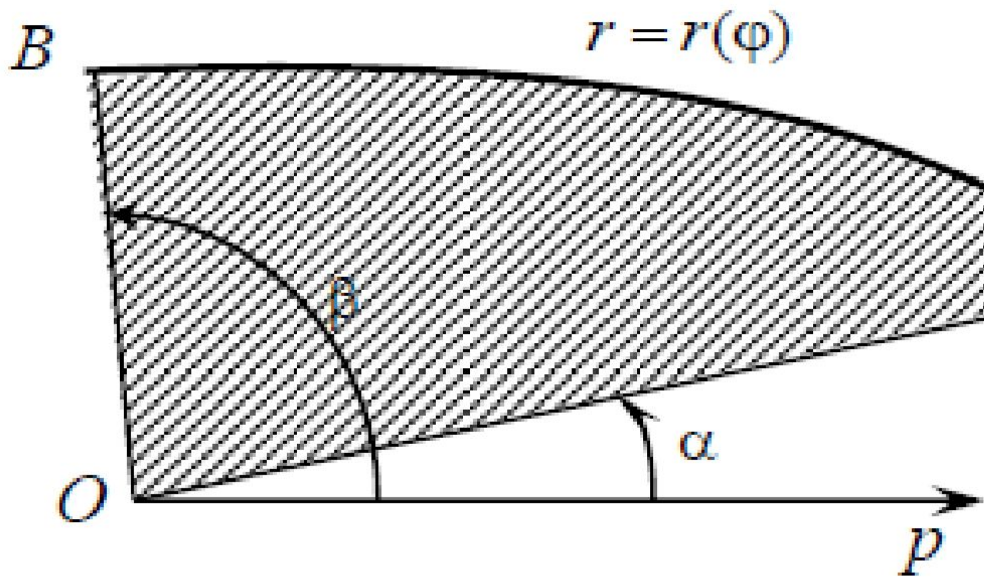
Определение полярной системы координат

- Для описания положения точки P плоскости $x0y$ используются так называемые полярные координаты r и φ, где r – расстояние от точки P до начала координат, называемого полюсом; φ – угол, образованный лучом $0P$ с положительным направлением оси $0x$ (полярной осью).

Площадь правильного криволинейного сектора

- Пусть требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной линией l, заданной в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$. За базовую фигуру в полярной системе координат принимается криволинейный сектор – фигура, ограниченная линией $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$; $\varphi = \beta$. При этом криволинейный сектор будем считать *правильной фигурой*, т. е. такой, что любой луч $\varphi = \varphi_1$; $\alpha \leq \varphi_1 \leq \beta$, исходящий из полюса O, пересекает линию $r = r(\varphi)$ не более чем в одной точке. Будем также предполагать, что функция $r = r(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$.

Правильный криволинейный сектор



Формула для площади правильного криволинейного сектора

- $$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$$

Пример 1

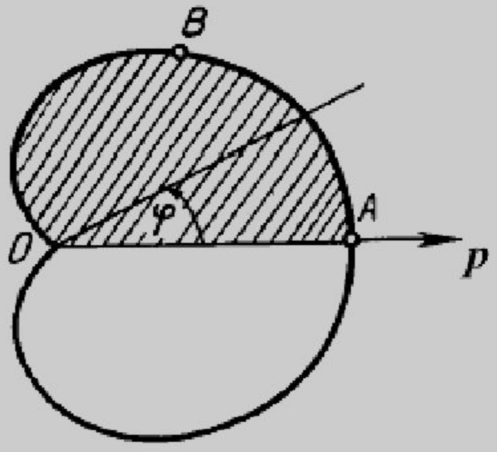
- Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой

$$r = a(1 + \cos\varphi).$$

Кардиоида симметрична относительно полярной оси, следовательно,

искомая площадь равна удвоенной площади сектора ABO.

Решение



$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2(\varphi)d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

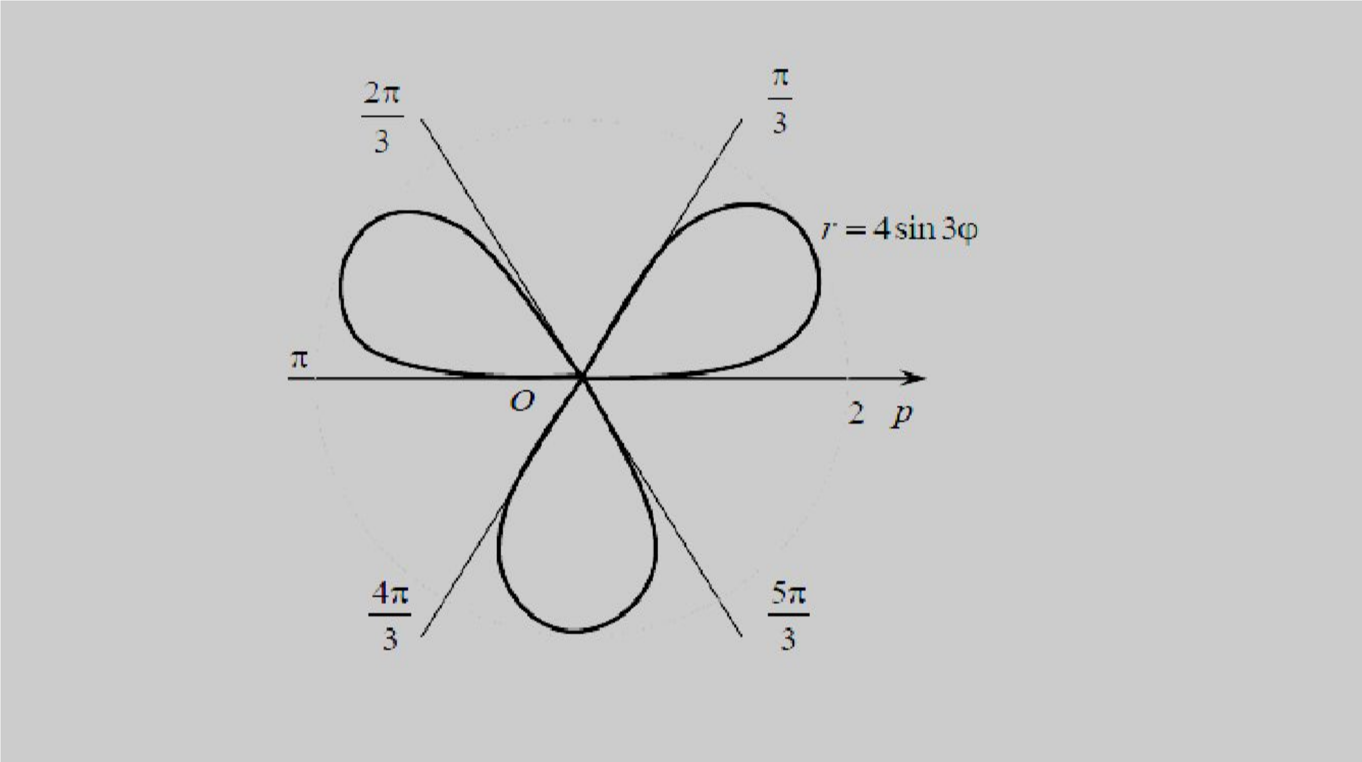
Пример 2

- Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r = 4sin3\varphi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Найдем нули функции: $4\sin3\varphi = 0$, откуда $3\varphi = \pi k$, и $\varphi = \frac{\pi k}{3}$.

Таким образом, на интервале от 0 до 2π функция $r = 4sin3\varphi$ определена на трех участках.

Решение



Решение

Так как функция периодическая, то

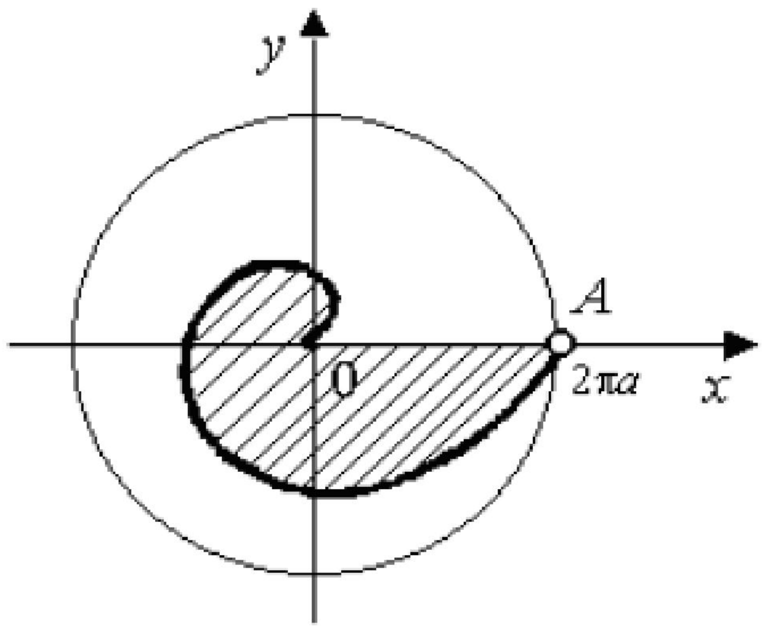
$$S = 3\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}(4\sin 3\varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/3} 16\sin^2 3\varphi\, d\varphi = 24\int_0^{\pi/3}\frac{1-\cos 6\varphi}{2}d\varphi =$$

$$=12\int_0^{\pi/3}(1-\cos 6\varphi)\,d\varphi = 12\left(\varphi - \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/3} = 12\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{6}\sin 2\pi + \frac{1}{6}\sin 0\right) = 4\pi.$$

Пример 3

- Найти площадь одного витка архимедовой спирали $r = a\varphi$.

Решение.



Вычисление площади

$$S = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{6} \varphi^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2,$$

так что площадь витка спирали равна трети площади круга $\left(4\pi^3 a^2\right)$ радиуса $OA = 2\pi a$.