

**Лекция 3:
Формула полной
вероятности и формула
Байеса. Формула Бернулли**

Полная группа событий

- в результате данного испытания обязательно появится хотя бы одно из них.

Теорема

Если событие A может произойти только вместе с одной из гипотез H_1, H_2, \dots, H_n , образующих полную группу попарно несовместных событий, то вероятность события A

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n)P_{H_n}(A)$$

Формула полной вероятности

Пример

В цехе работают **20** станков.

Из них **10** марки А, **6** марки В, и **4** марки С.

Вероятности того, что деталь будет без брака для этих станков соответственно равны **0,9**, **0,8** и **0,7**.

Какова вероятность того, что наугад выбранная деталь будет браком?

Пример

События

A = «Наугад выбранная деталь будет с браком»

H1 = «Деталь обработана на станке марки A»

H2 = «Деталь обработана на станке марки B»

H3 = «Деталь обработана на станке марки C»

Пример

Всего в цехе 20 станков

$$P(H_1) = 10/20 = 1/2 = 0,5$$

$$P(H_2) = 6/20 = 3/10 = 0,3$$

$$P(H_3) = 4/20 = 1/5 = 0,2$$

Условные вероятности

$$P_{H_1}(A) = 1 - 0,9 = 0,1$$

$$P_{H_2}(A) = 1 - 0,8 = 0,2$$

$$P_{H_3}(A) = 1 - 0,7 = 0,3$$

Пример

По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + \\ &\quad + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \\ &\quad + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) = \\ &= 0,5 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,3 = \\ &= 0,05 + 0,06 + 0,06 = 0,17 \end{aligned}$$

Формула Байеса

- *(по имени английского математика, который их вывел. Опубликованы в 1764 году. Формулы Байеса (Бейса) позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие А.*

Теорема

Если событие A может произойти только вместе с одной из гипотез H_1, H_2, \dots, H_n , образующих полную группу попарно несовместных событий, то вероятность гипотез после испытания, когда событие A уже имело место

$$P_A(H_i) = P(H_i)P_{H_i}(A) / P(A)$$

Формула Байеса

Пример

$$P(H_2) = 0,3$$

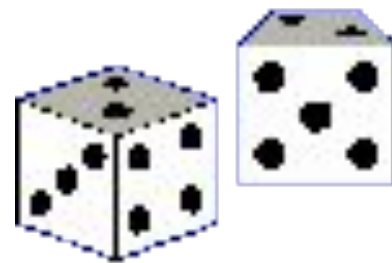
$$P_{H_2}(A) = 0,2$$

$$P(A) = 0,17$$

По формуле Байеса

$$\begin{aligned} P_A(H_2) &= P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) / P(A) = \\ &= 0,3 \cdot 0,2 / 0,17 = 0,06 / 0,17 = \\ &= 0,35 \end{aligned}$$

Схема Бернулли





Якоб Бернулли

(27 декабря 1654 - 16 августа 1705)

профессор математики

Базельского университета (с 1687).

Теорема Бернулли

Вероятность $P_n(k)$ наступления ровно k успехов в n независимых повторениях одного и того же испытания находится по формуле

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$



где p – вероятность «успеха»,

$q = 1 - p$ – вероятность «неудачи» в отдельном опыте.

Формула называется формулой Бернулли.

- Рассмотрим частные случаи формулы Бернулли. Вероятность того, что успех наступит во всех n испытаниях, равна:

$$P_n(n) = C_n^n \cdot p^n \cdot q^{n-n} = 1! \cdot p^n \cdot q^0 = p^n$$

- А вероятность того, что успех не наступит ни разу, равна:

$$P_n(0) = C_n^0 \cdot p^0 \cdot q^{n-0} = 1! \cdot p^0 \cdot q^n = q^n$$



Пример (решить самостоятельно)

В цехе работают **20** станков.

Из них **10** марки А, **6** марки В, и **4** марки С. Вероятность того, что деталь будет без брака для этих станков соответственно равны **0,9**, **0,8** и **0,7**.

Наугад выбрали деталь. Она оказалась с браком.

Какова вероятность того, что она была изготовлена на станке марки В?

- Пример: Найти вероятность того, что четырехзначный номер первого встречного автомобиля содержит две цифры 5.*

$$P_4(2) = C_4^2 (1/10)^2 (9/10)^2$$

$$= 6 \cdot 0,01 \cdot 0,81 = 0,0486$$

При больших значениях n, k подсчет проводится по приближенной формуле (локальная теорема Муавра-Лапласа)