Лекция 3: Формула полной вероятности и формула Байеса. Формула Бернулли

Полная группа событий

- в результате данного испытания обязательно появится хотя бы одно из них.

Теорема

Если событие А может произойти только вместе с одной из гипотез $H_1, H_2 \ldots H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, то вероятность события А

$$P(A) = P(H_1)P_{H1}(A) + P(H_2)P_{H2}(A) + \ldots + +P(H_n)P_{Hn}(A)$$

Формула полной вероятности

Пример

В цехе работают **20** станков.

Из них **10** марки А, **6** марки В, и **4** марки С.

Вероятности того, что деталь будет без брака для этих станков соответственно равны **0,9**, **0,8** и **0,7**.

Какова вероятность того, что наугад выбранная деталь будет браком?

Пример

События

A = «Наугад выбранная деталь будет с браком»

H1 = «Деталь обработана на станке марки A»

H2 = «Деталь обработана на станке марки B»

H3 = «Деталь обработана на станке марки C»

Пример

Всего в цехе 20 станков

$P(H_1) = 10/20 = ½=0,5$

$P(H_2) = 6/20 = 3/10 = 0,3$

$P(H_3) = 4/20 = 1/5 = 0,2$

Условные вероятности

$P_{H1}(A) = 1 – 0,9 = 0,1$

$P_{H2}(A) = 1 – 0,8 = 0,2$

$P_{H3}(A) = 1 – 0,7 = 0,3$

Пример

По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H1}(A) +$$

$$+ P(H_2) \cdot P_{H2}(A) +$$

$$+ P(H_3) \cdot P_{H3}(A) =$$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 =$$

$$= 0{,}05 + 0{,}06 + 0{,}06 = 0{,}17$$

Формула Байеса

- ***(по имени английского математика, который их вывел. Опубликованы в 1764 году. Формулы Байеса (Бейса) позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие А.***

Теорема

Если событие А может произойти только вместе с одной из гипотез $H_1, H_2 \ldots H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, то вероятность гипотез после испытания, когда событие А уже имело место

$$P_A(H_i) = P(H_i)P_{Hi}(A) / P(A)$$

Формула Байеса

Пример

$P(H_2) = 0,3$

$P_{H2}(A) = 0,2$

$P(A) = 0,17$

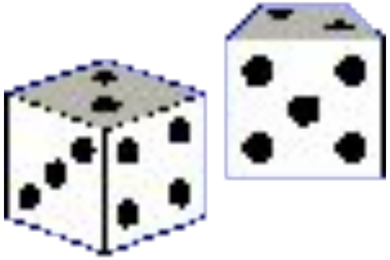
По формуле Байеса

$P_A(H_2) = P(H_2) \cdot P_{H2}(A) / P(A) =$

$= 0,3 \cdot 0,2 / 0,17 = 0,06 / 0,17 =$

$= 0,35$

Схема Бернулли



Якоб Бернулли

(27 декабря 1654 - 16 августа 1705)

профессор математики

Базельского университета (с 1687).

Теорема Бернулли

- Вероятность $P_n(k)$ наступления ровно k успехов n независимых повторениях одного и того же испытания находится по формуле

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$,

где p – вероятность «успеха»,

q = 1- p - вероятность «неудачи» в отдельном опыте.

Формула называется формулой Бернулли.

- Рассмотрим частные случаи формулы Бернулли. Вероятность того, что успех наступит во всех n испытаниях, равна:
-

$$P_n(n) = C_n^n \cdot p^n \cdot q^{n-n} = 1! \cdot p^n \cdot q^0 = p^n$$

- А вероятность того, что успех не наступит ни разу, равна:

$$P_n(0) = C_n^0 \cdot p^0 \cdot q^{n-0} = 1! \cdot p^0 \cdot q^n = q^n$$

Пример (решить самостоятельно)

В цехе работают **20** станков.

Из них **10** марки А, **6** марки В, и **4** марки С. Вероятность того, что деталь будет без брака для этих станков соответственно равны **0,9**, **0,8** и **0,7**.

Наугад выбрали деталь. Она оказалась с браком.

Какова вероятность того, что она была изготовлена на станке марки В?

- *Пример: Найти вероятность того, что четырехзначный номер первого встречного автомобиля содержит две цифры 5.*

$$P_4(2) = C_4^2(1/10)^2(9/10)^2$$

$$= 6 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}81 = 0{,}0486$$

При больших значениях n,k подсчет проводится по приближенной формуле (локальная теорема Муавра-Лапласа)