

Унификация записи уравнений движения

- $\vec{w} = \vec{F} / m \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \rightarrow \frac{dp_i}{dt} = F_i$

1) выбор осей \rightarrow для некоторых осей \rightarrow

$$\frac{dp_i}{dt} = 0 \rightarrow p_i = const$$

2) для консервативных сил $F_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i} \rightarrow$

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

Унификация уравнений движения

Упростить запись динамических уравнений движения:

$$dp_k/dt = - \partial U / \partial q_k$$

Здесь **НОВАЯ НУМЕРАЦИЯ**:

q_k - \forall из $3N$ координат системы МТ,

p_k – соответствующая ей проекция импульса.

Еще упрощения:

$$K = \sum K_i = \frac{1}{2} \sum p_i^2 / m_i = \frac{1}{2} \sum (p_{xi}^2 + p_{yi}^2 + p_{zi}^2) / m_i = \frac{1}{2} \sum p_k^2 / m_k$$

Индексы i перебирает все МТ, а k – все координаты.

После дифференцирования по компонентам импульса:

$$\partial K / \partial p_k = \frac{1}{2} \cdot 2 p_k / m_k = v_k = dq_k / dt$$

Уравнения Лагранжа

Комбинация $L = K - U = L(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_N, p_{x1}, \dots, p_{zN})$, кот. наз. *функцией Лагранжа, или лагранжианом*, ее продифференцировать ее по всем аргументам:

$$dL/dq_k = - \partial U/\partial q_k = dp_k/dt \text{ и } dL/dp_k = \partial K/\partial p_k = dq_k/dt$$

Так получаются *уравнения Лагранжа*:

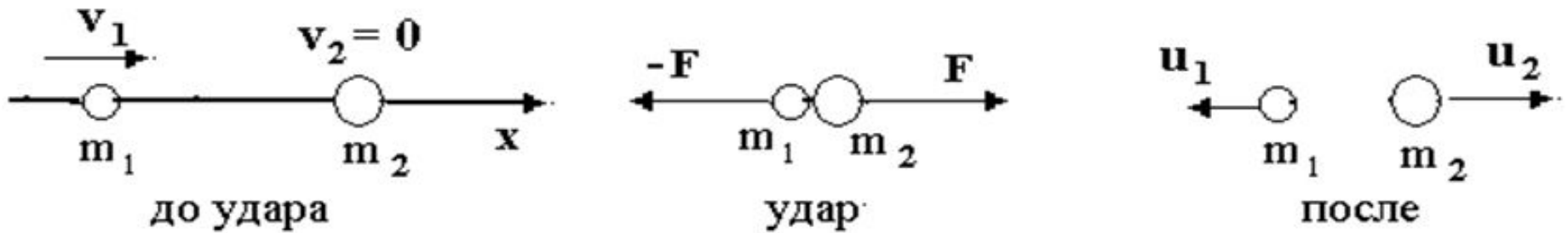
$$\begin{aligned} dp_k/dt &= \partial L/\partial q_k \\ dq_k/dt &= \partial L/\partial p_k \end{aligned}$$

Это не новый закон природы, а новый способ записывать 2 ЗН, но только для частных случаев, когда силы консервативны и они явно не зависят от времени.

Чтобы составить уравнения Лагранжа, нужно знать всего одну функцию, но многих переменных. ДУ получаются 1 порядка. Если L не зависит от q_k (или p_k), то производная по этой переменной равна 0 и, значит, соответствующий импульс (или координата) постоянны.

Задача о столкновении 2 шаров (МТ)

Два шара в какой-то момент оказываются в одной точке. Взаимодействие между ними происходит только в момент столкновения (контактное взаимодействие),



внешних сил нет (система замкнутая).

Выполняется ЗСИ.

Скорости и импульсы тел постоянны до и после столкновения, но $\downarrow\uparrow$ направления и модули при столкновении.

Скорости шаров до и после удара обозначим v и u . Система отсчета: $v_2 = 0$ (до удара), а ось Ox по направлению v_1 .

Центральное упругое соударение

Если удар *центральный* (силы действуют линии центров), то ЗСИ:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

v_1 , u_1 и u_2 – проекции на ось Ox .

В ур-нии 2 неизвестных u_1 и u_2 , требуется второе уравнение.

Если выполняется ЗСЭ, то суммы КЭ шаров до и после удара равны. Такой удар наз. абсолютно упругим.

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2$$

Решение системы (без помощи ДУ):

$$u_1 = (m_1 - m_2) v_1 / (m_1 + m_2) \quad u_2 = 2m_1 v_1 / (m_1 + m_2)$$

Если действуют внешние силы, то их импульсом за короткое время удара пренебрегают, но полученные формулы относятся к скоростям непосредственно до и после удара.

Центральные неупругие соударения

ЗСЭ точно выполняется редко. Часть энергии обычно уходит на нагрев тел (частично упругий удар).

В ЛЧ второго уравнения появляется множитель $q < 1$:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 \cdot q = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$

Выражения для u_1 и u_2 усложнятся, но главная трудность в том, что q заранее не известен.

Второй крайний случай - абсолютно неупругий удар, в результате скорости шаров становятся после удара равными, шары двигаются вместе (слиплись):

$$u_1 = u_2 = u$$

В этом случае: $u = m_1 v_1 / (m_1 + m_2)$

Центральные неупругие соударения

ЗСЭ точно выполняется редко. Часть энергии обычно уходит на нагрев тел (частично упругий удар).

В ЛЧ второго уравнения появляется множитель $q < 1$:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 \cdot q = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2$$

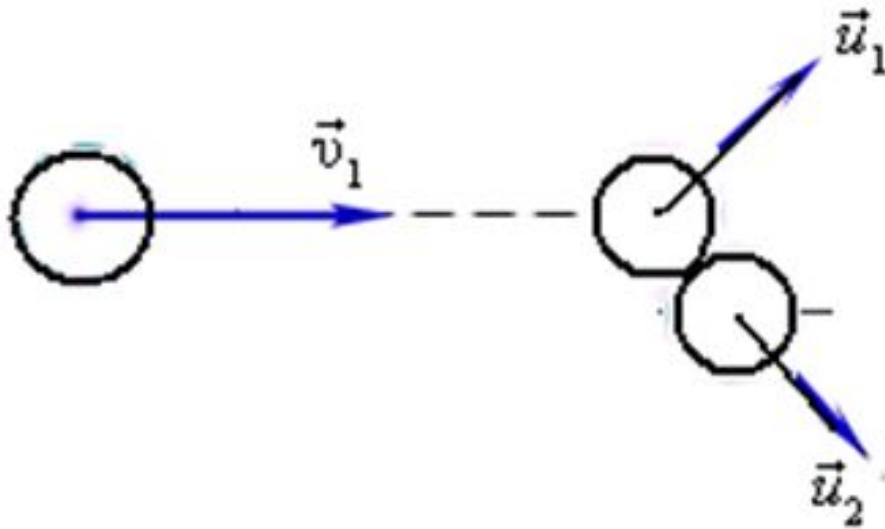
Выражения для u_1 и u_2 усложнятся, но главная трудность в том, что q заранее не известен.

Второй крайний случай - абсолютно неупругий удар, в рез-те кот. скорости шаров становятся после удара равными, шары двигаются вместе (слиплись):

$$u_1 = u_2 = u$$

В этом случае: $u = m_1 v_1 / (m_1 + m_2)$

Нецентральное соударение



Если удар нецентральный, то после него шары разлетаются под некоторым углом.

Т.к. выполняется ЗСИ, то проекции импульсов после удара на направление, перпендикулярное импульсу налетающего шара,

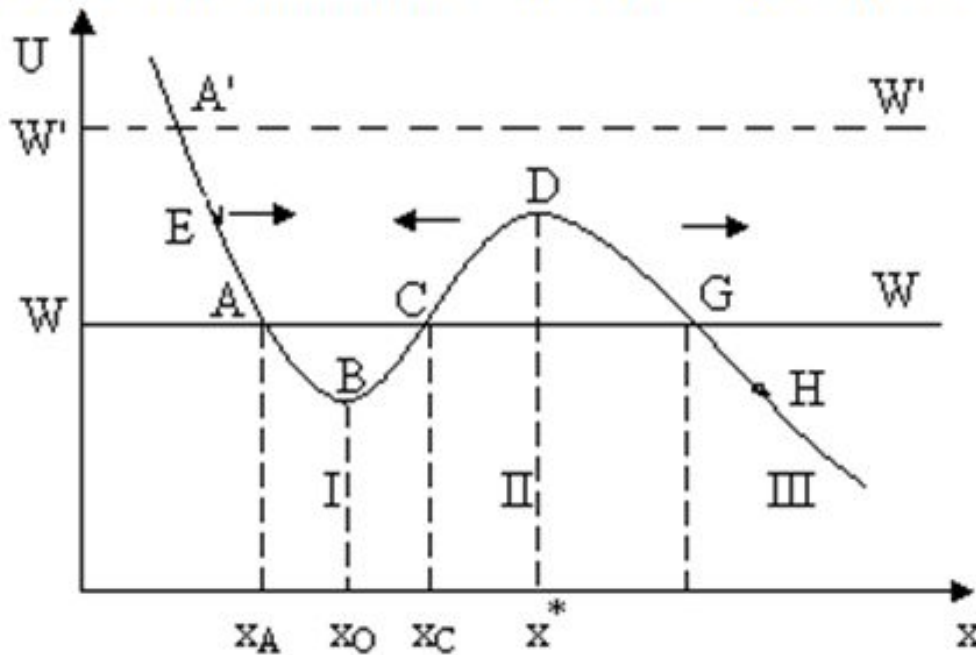
равны по модулю и имеют противоположные знаки:

$$m_1 u_{1\perp} = -m_2 u_{2\perp}$$

Плоскость рисунка включает вектор \vec{v}_1 и отрезок, соединяющий центры шаров прямо перед ударом.

Движение вблизи потенциального барьера или ямы (1)

Ограниченная область пространства с повышенным значением ПЭ наз. *потенциальным барьером (ПБ)*. Это участок ВН на рисунке.



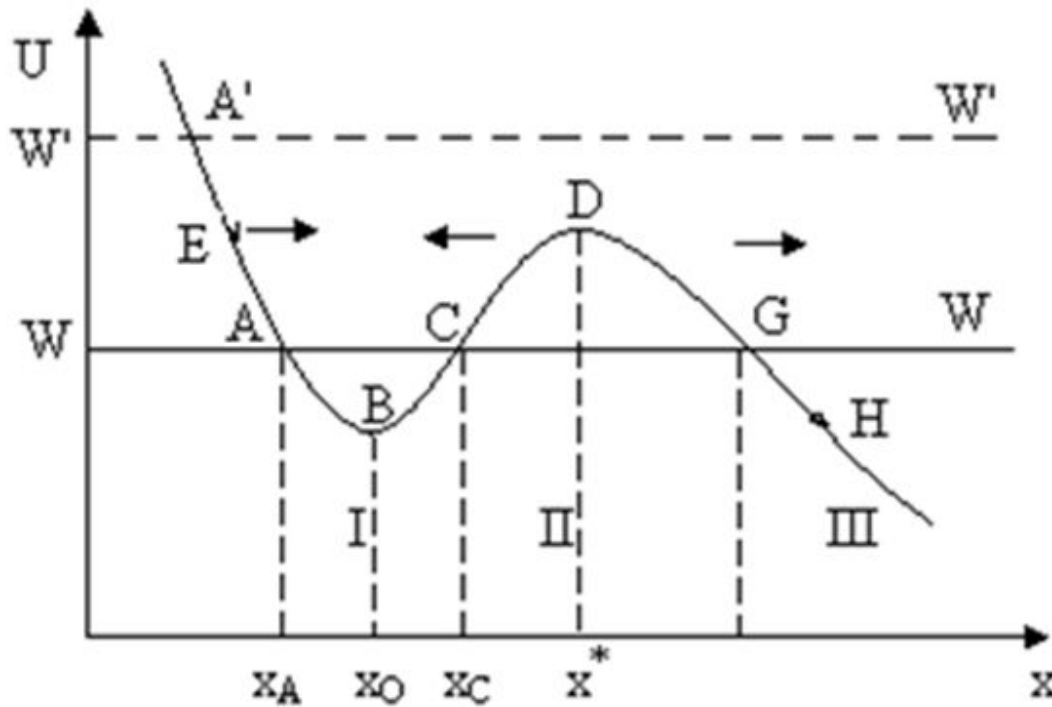
Если значение ПЭ понижено (уч-к ED), то эта область наз. *потенциальной ямой (ПЯ)*.

ПБ создает силы отталкивания, а ПЯ силы притяжения.

Направления сил на склонах ПЯ и ПБ показаны стрелками.

Если ПМЭ тела W' больше ПЭ в вершине ПБ (точка D), то тело может двигаться в области правее A' . Эта точка называется точкой поворота (возврата). В ней ПМЭ = ПЭ \Rightarrow КЭ = 0, скорость равна 0 и меняет направление, когда тело подходит к точке справа. При движении направо тело с ПМЭ W' может уйти на бесконечность.

Движение вблизи потенциального барьера или ямы (2)

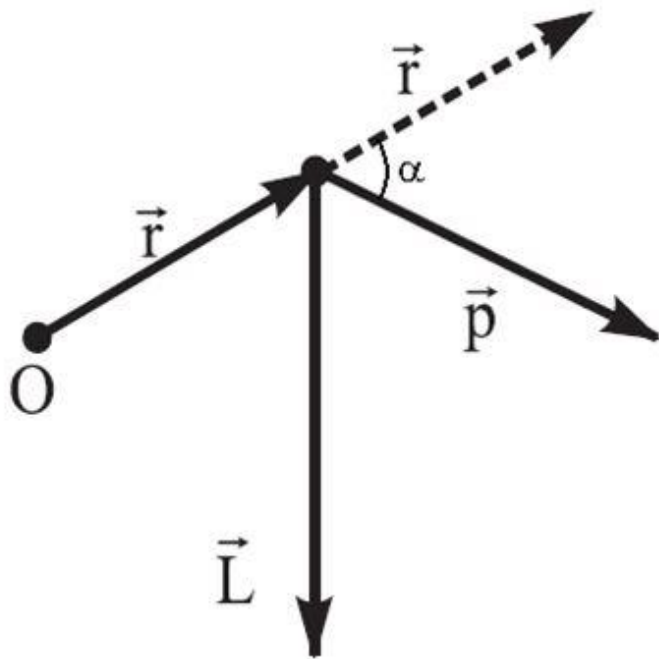


Если ПМЭ тела W меньше ПЭ в вершине ПБ, то точек поворота три — A , C и G . (\cdot) G аналогична точке A' . (\cdot) A — точка поворота, когда тело подходит к ней справа, а точка C , когда слева. Если тело с ПМЭ W оказалось между x_A и

x_C , то оно не может покинуть эту область, движение в этом случае будет *ограниченным*. Области левее A и между C и D недоступны для движения тела. В последнем случае говорят, что тело не может проникнуть внутрь барьера.

Момент импульса

Выберем произвольную точку O – *полюс*, кот. не обязательно совпадает с началом координат, проведем из нее радиус-вектор \vec{r} к МТ и определим две величины:



1. *момент импульса* (иначе, *момент количества движения* МКД) МТ относительно полюса

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$$

с модулем $L = r p \sin \alpha$;

$$[L] = \text{м} \cdot \text{Н} \cdot \text{с} = \text{Дж} \cdot \text{с}$$

Не путать с лагранжианом, о кот. речь шла выше.

Дифференцирование вектора \mathbf{L} по времени:

$$\begin{aligned} d\vec{L}/dt &= d[\vec{r}, \vec{p}]/dt = [d\vec{r}/dt, \vec{p}] + [\vec{r}, d\vec{p}/dt] = \\ &[\vec{v}, \vec{p}] + [\vec{r}, d\vec{p}/dt] = [\vec{r}, d\vec{p}/dt] \end{aligned}$$

Первое слагаемое равно 0, т.к. $\vec{v} \parallel \vec{p}$.

Момент силы

2. момент приложенной к этой МТ, относительно полюса

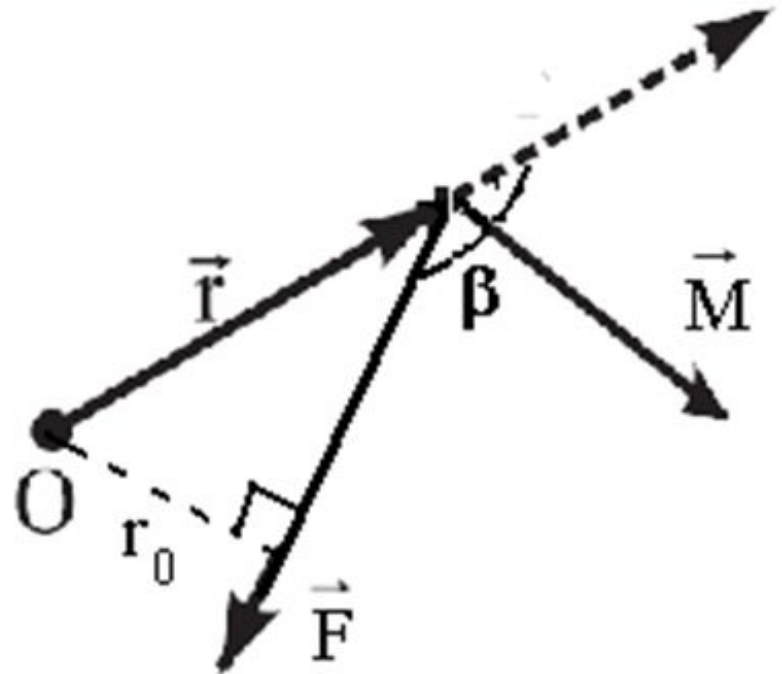
$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

с модулем

$$M = r F \sin\beta = F r_0,$$

где $r_0 = r \sin\beta$ наз. *плечом силы* и равно расстоянию от полюса до линии действия силы.

$[M] = \text{Н}\cdot\text{м}$ - размерность такая же, как у Дж, но так не называется.



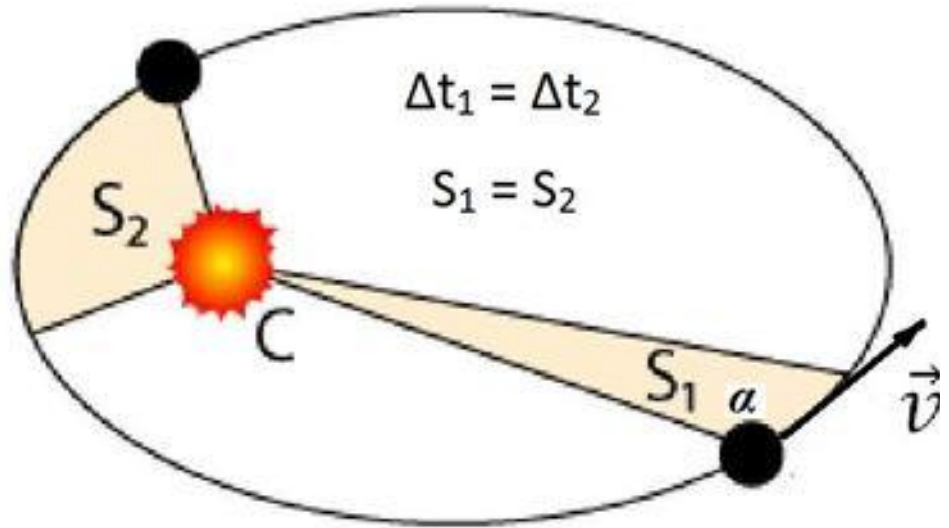
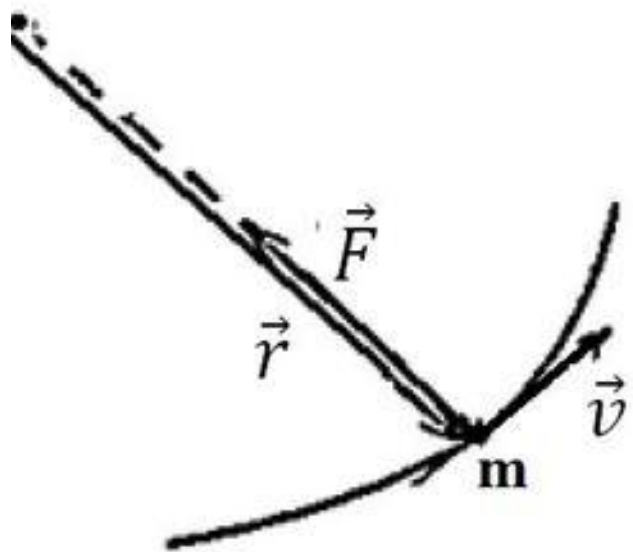
Уравнение моментов

Взять основное уравнение динамики и домножить его векторно слева на \vec{r} , то:

$$\vec{r} \times \left[\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \right] \rightarrow$$
$$[\vec{r}, d\vec{p}/dt] = [\vec{r}, \vec{F}]$$
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Это соотношение наз. *уравнением моментов* (моменты и в ЛЧ, и в ПЧ) для МТ.

Оно не выражает нового закона природы, а является следствием из 2 ЗН, новой формой его записи, которая внешне похожа на $d\vec{p}/dt = \vec{F}$. Выгода его использования заключается в простоте описания движения.



Кеплера

При движении в центральном поле центр сил - качестве полюса.

Т.к. $\vec{r} \parallel \vec{F}$, то $\vec{M} = 0$ и $d\vec{L}/dt = 0$,
т.е. $\vec{L} = \text{const}$.

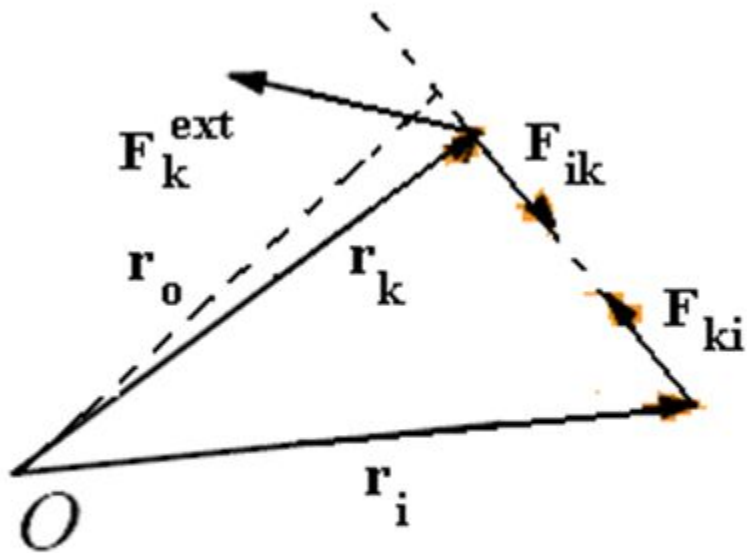
Отсюда 2 закон Кеплера: при движении планет их радиус-векторы, проведенные из Солнца, выметают равные площади за равные промежутки времени.

$$S_{\Delta} = r v \Delta t \sin \alpha = (L/m) \Delta t$$

При $L = \text{const}$ это ведет к $S_{\Delta} = \text{const}$.

Уравнение моментов для системы МТ

В системе МТ на каждую из них действуют моменты и внеш. и внутр. сил (полюс O общий для всех МТ):



$$\frac{d\vec{L}_k}{dt} = \sum [\vec{r}_k, \vec{F}_{ik}] + \vec{M}_k^{ext}$$

Суммирование по МТ, действующим на k -тую МТ.

После суммирования по k :

$$\sum \frac{d\vec{L}_k}{dt} = \sum \sum [\vec{r}_k, \vec{F}_{ik}] + \sum \vec{M}_k^{ext}$$

Первая сумма состоит из пар $[\vec{r}_k, \vec{F}_{ik}] = - [\vec{r}_i, \vec{F}_{ki}]$ и равна нулю.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_k^{ext}$$

Следовательно:

Это соотношение называется уравнением моментов для системы МТ. Согласно нему изменение МКД системы МТ вызывается только моментами внешних сил.

Закон сохранения момента импульса

Если система замкнутая, т.е. все $\vec{F}_k^{ext} = 0 \rightarrow \vec{M}_k^{ext} = 0$,
то:

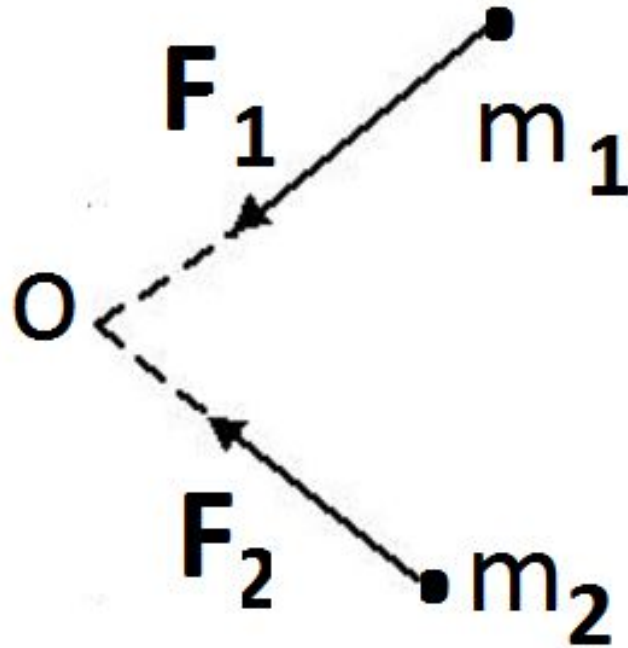
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const$$

Это закон сохранения МКД для замкнутой системы.

Однако закон сохранения МКД может быть справедлив **не только** для замкнутых систем.

Условие $\sum \vec{M}_k^{ext} = 0 \rightarrow d\vec{L}/dt = 0$ можно получить путем специального выбора полюса. Например, если действуют 2 внешние силы, то полюс следует поместить в точку пересечения линий действия этих сил.

Пример выгодного выбора полюса



Полюс O в точке пересечения линий действия сил