Унификация записи уравнений движения

- $$\vec{w} = \vec{F}/m \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \rightarrow \frac{dp_i}{dt} = F_i$$

1) выбор осей → для некоторых осей →

$$\frac{dp_i}{dt} = 0 \rightarrow p_i = const$$

2) для консервативных сил $F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \rightarrow$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$$

Унификация уравнений движения

Упростить запись динамических уравнений движения:

$$dp_k/dt = -\partial U/\partial q_k$$

Здесь НОВАЯ НУМЕРАЦИЯ:

q_k - ∀ из 3N координат системы МТ,

p_k – соответствующая ей проекция импульса.

Еще упрощения:

$K = \Sigma K_i = ½\Sigma p_i^2/m_i = ½\Sigma(p_{xi}^2 + p_{yi}^2 + p_{zi}^2)/m_i = = ½\Sigma p_k^2/m_k$

Индексы i перебирает все МТ, а k – все координаты.

После дифференцирования по компонентам импульса:

$$\partial K/\partial p_k = ½\cdot 2p_k/ m_k = v_k = dq_k/dt$$

Уравнения Лагранжа

- Комбинация $L = K - U = L(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots z_N, p_{x1}, \ldots . p_{zN})$, кот. наз. *функцией Лагранжа, или лагранжианом*, ее продифференцировать ее по всем аргументам:

$$dL/dq_k = - \partial U/\partial q_k = dp_k/dt \text{ и } dL/dp_k = \partial K/\partial p_k = dq_k/dt$$

Так получаются *уравнения Лагранжа*:

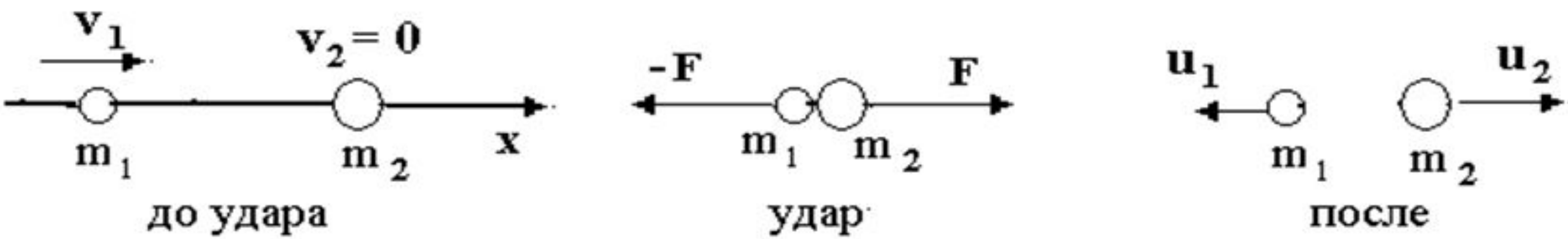
$$dp_k/dt = \partial L/\partial q_k$$
$$dq_k/dt = \partial L/\partial p_k$$

Это не новый закон природы, а новый способ записывать 2 ЗН, но только для частных случаев, когда силы консервативны и они явно не зависят от времени.

Чтобы составить уравнения Лагранжа, нужно знать всего одну функцию, но многих переменных. ДУ получаются 1 порядка. Если L не зависит от q_k (или p_k), то производная по этой переменной равна 0 и, значит, соответствующий импульс (или координата) постоянны.

Задача о столкновении 2 шаров (МТ)

Два шара в какой-то момент оказываются в одной точке. Взаимодействие между ними происходит только в момент столкновения (контактное взаимодействие),



внешних сил нет (система замкнутая).
Выполняется ЗСИ.
Скорости и импульсы тел постоянны до и после столкновения, но ↓↑ направления и модули при столкновении.
Скорости шаров до и после удара обозначим v и u. Система отсчета: $v_2 = 0$ (до удара), а ось Ox по направлению v_1.

Центральное упругое соударение

Если удар *центральный* (силы действуют линии центров), то ЗСИ:

$$m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2$$

v_1, u_1 и u_2 – проекции на ось Ox.

В ур-нии 2 неизвестных u_1 и u_2, требуется второе уравнение.

Если выполняется ЗСЭ, то суммы КЭ шаров до и после удара равны. Такой удар наз. *абсолютно упругим*.

$$\tfrac{1}{2}m_1v_1^2 = \tfrac{1}{2}m_1u_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2u_2^2$$

Решение системы (без помощи ДУ):

$$u_1 = (m_1 - m_2)\,v_1/(m_1 + m_2) \qquad u_2 = 2m_1\,v_1/(m_1 + m_2)$$

Если действуют внешние силы, то их импульсом за короткое время удара пренебрегают, но полученные формулы относятся к скоростям непосредственно до и после удара.

Центральные неупругие соударения

ЗСЭ точно выполняется редко. Часть энергии обычно уходит на нагрев тел (частично упругий удар).

В ЛЧ второго уравнения появляется множитель $q < 1$:

$$\tfrac{1}{2}m_1v_1^2 \cdot q = \tfrac{1}{2}m_1u_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2u_2^2$$

Выражения для u_1 и u_2 усложнятся, но главная трудность в том, что q заранее не известен.

Второй крайний случай - *<u>абсолю́тно неупру́гий удар</u>*, в рез-те кот. скорости шаров становятся после удара равными, шары двигаются вместе (слиплись):

$$u_1 = u_2 = u$$

В этом случае: $u = m_1 v_1/(m_1 + m_2)$

Центральные неупругие соударения

ЗСЭ точно выполняется редко. Часть энергии обычно уходит на нагрев тел (частично упругий удар).

В ЛЧ второго уравнения появляется множитель $q < 1$:

$$\tfrac{1}{2}m_1v_1^2 \cdot q = \tfrac{1}{2}m_1u_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2u_2^2$$

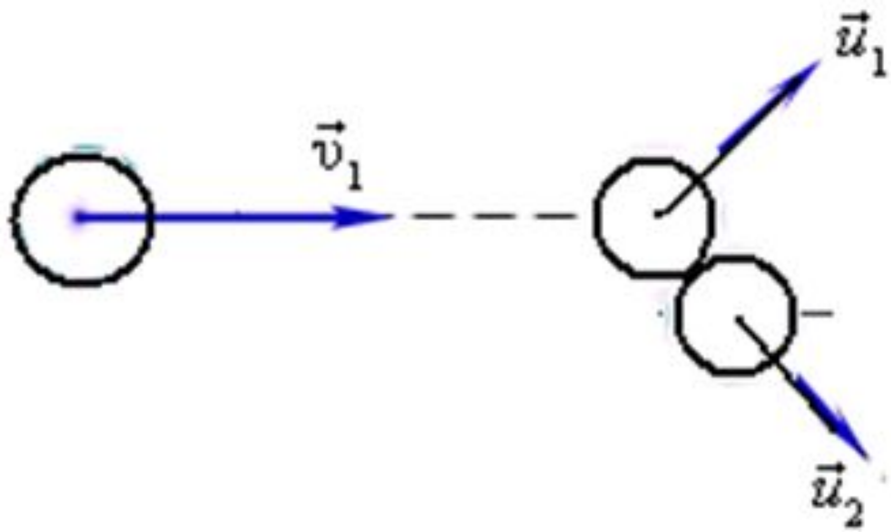
Выражения для u_1 и u_2 усложнятся, но главная трудность в том, что q заранее не известен.

Второй крайний случай - *абсолю́тно неупру́гий удар*, в рез-те кот. скорости шаров становятся после удара равными, шары двигаются вместе (слиплись):

$$u_1 = u_2 = u$$

В этом случае: $u = m_1 v_1/(m_1 + m_2)$

Нецентральное соударение



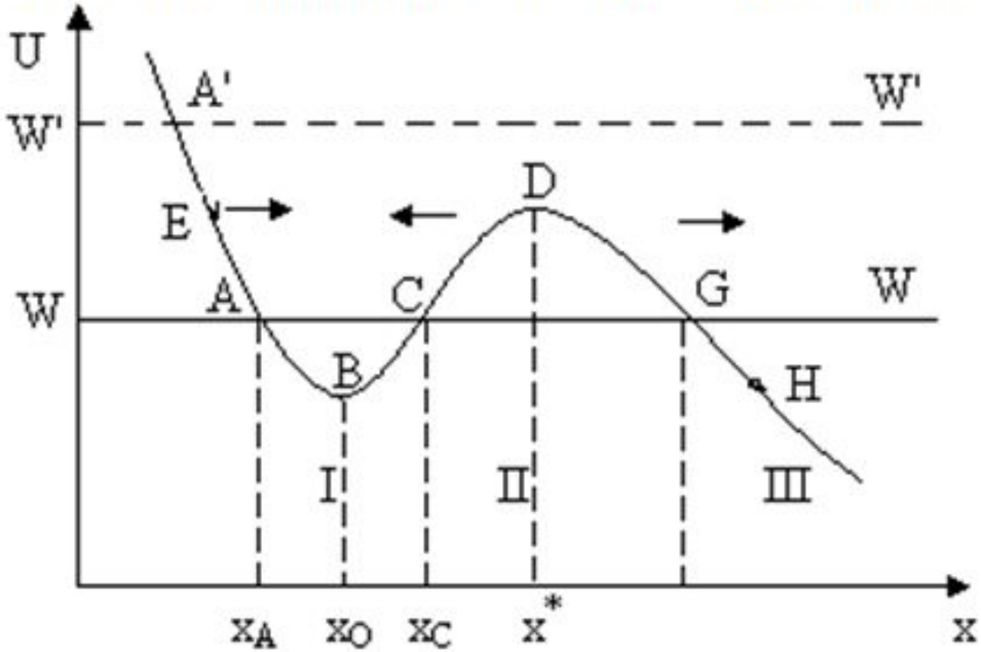
Если удар нецентральный, то после него шары разлетаются под некоторым углом.
Т.к. выполняется ЗСИ, то проекции импульсов после удара на направление, перпендикулярное импульсу налетающего шара, равны по модулю и имеют противоположные знаки:

$$m_1 u_{1\perp} = - m_2 u_{2\perp}$$

Плоскость рисунка включает вектор $\overrightarrow{v_1}$ и отрезок, соединяющий центры шаров прямо перед ударом.

Движение вблизи потенциального барьера или ямы (1)

Ограниченная область пространства с повышенным значением ПЭ наз. *потенциальным барьером* (ПБ). Это участок ВН на рисунке.



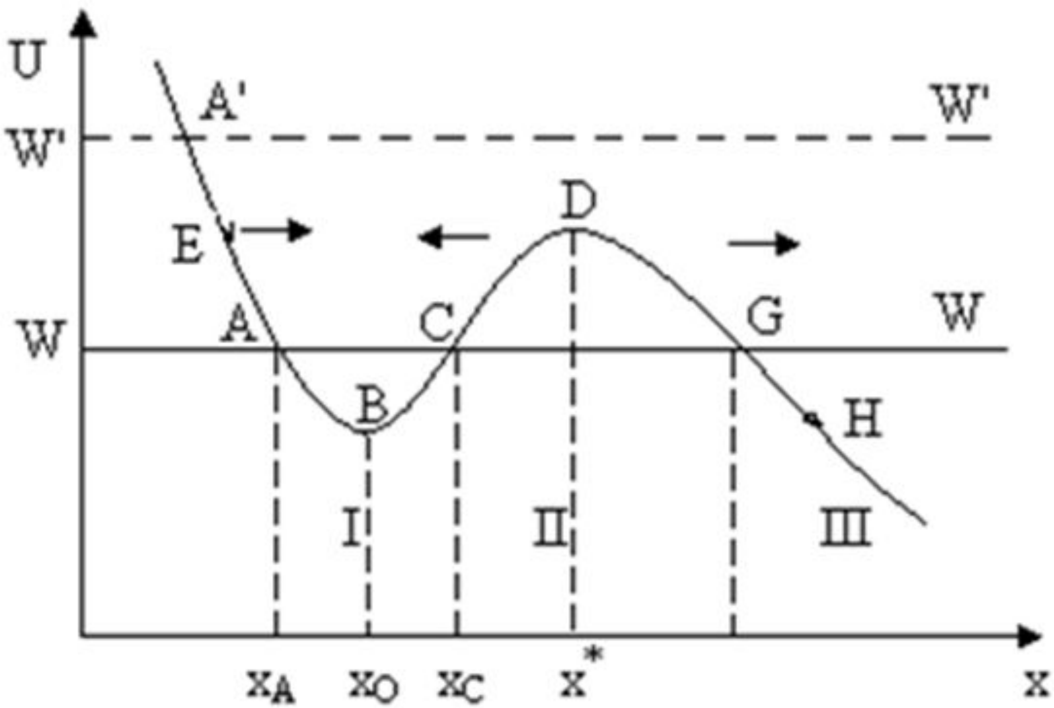
Если значение ПЭ понижено (уч-к ED), то эта область наз. *потенциальной ямой* (ПЯ).

ПБ создает силы отталкивания, а ПЯ силы притяжения.

Направления сил на склонах ПЯ и ПБ показаны стрелками.

Если ПМЭ тела W′ больше ПЭ в вершине ПБ (точка D), то тело может двигаться в области правее A′. Эта точка называется точкой поворота (возврата). В ней ПМЭ = ПЭ ⇨ КЭ = 0, скорость равна 0 и меняет направление, когда тело подходит к точке справа. При движении направо тело с ПМЭ W′ может уйти на бесконечность.

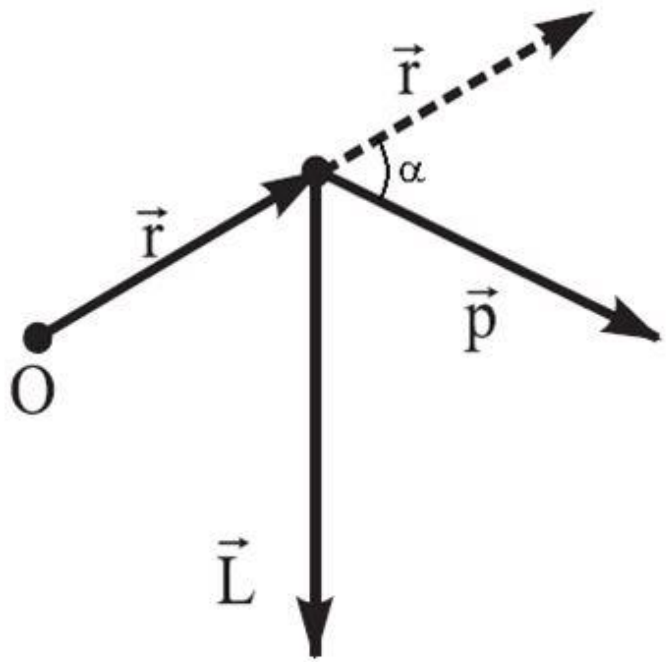
Движение вблизи потенциального барьера или ямы (2)



Если ПМЭ тела W меньше ПЭ в вершине ПБ, то точек поворота три – A, C и G. (·) G аналогична точке A'. (·) A - точка поворота, когда тело подходит к ней справа, а точка C, когда слева. Если тело с ПМЭ W оказалось между x_A и x_C , то оно не может покинуть эту область, движение в этом случае будет *ограниченным*. Области левее A и между C и D недоступны для движения тела. В последнем случае говорят, что тело не может проникнуть внутрь барьера.

Момент импульса

Выберем произвольную точку О – *полюс*, кот. не обязательно совпадает с началом координат, проведем из нее радиус-вектор **r** к МТ и определим две величины:



1. *момент импульса* (иначе, *момент количества движения* МКД) МТ относительно полюса

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$$

с модулем L = r p sinα;

[L] = м·Н·с = Дж·с

Не путать с лагранжианом, о кот. речь шла выше.

Дифференцирование вектора **L** по времени:

$$d\vec{L}/dt = d\,[\vec{r},\vec{p}]\,/dt = [d\vec{r}/dt, \boldsymbol{p}] + [\vec{r}, d\vec{p}/dt] =$$

$$[\vec{v},\vec{p}] + [\vec{r}, d\vec{p}/dt] = [\vec{r}, d\vec{p}/dt]$$

Первое слагаемое равно 0, т.к. $\vec{v} \parallel \vec{p}$.

Момент силы

2. *момент силы*, приложенной к этой МТ, относительно полюса

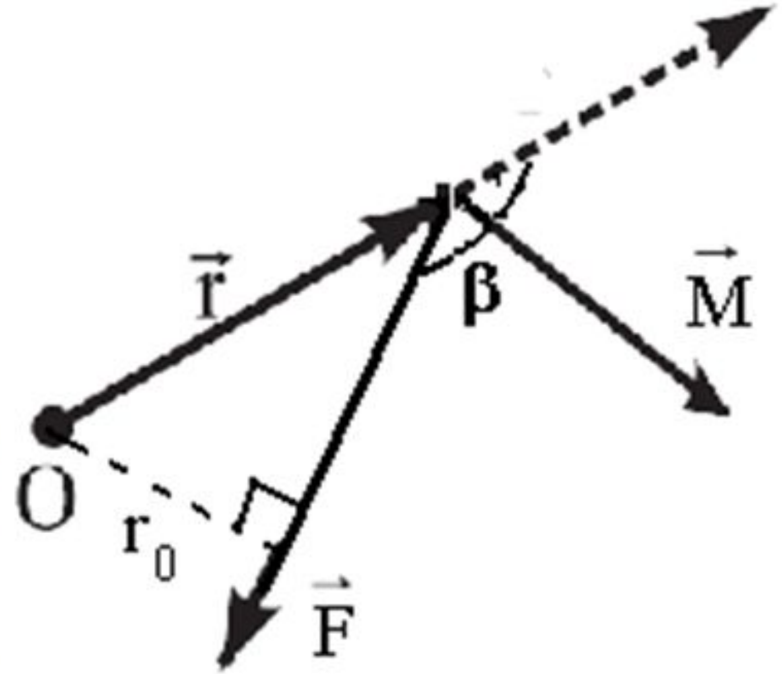
$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

с модулем

$$M = r\,F\,\sin\beta = F\,r_0,$$

где $r_0 = r\,\sin\beta$ наз. *плечом силы* и равно расстоянию от полюса до линии действия силы.

[М] =·Н·м - размерность такая же, как у Дж, но так не называется.



Уравнение моментов

- Взять основное уравнение динамики и домножить его векторно слева на $\vec{r}$, то:

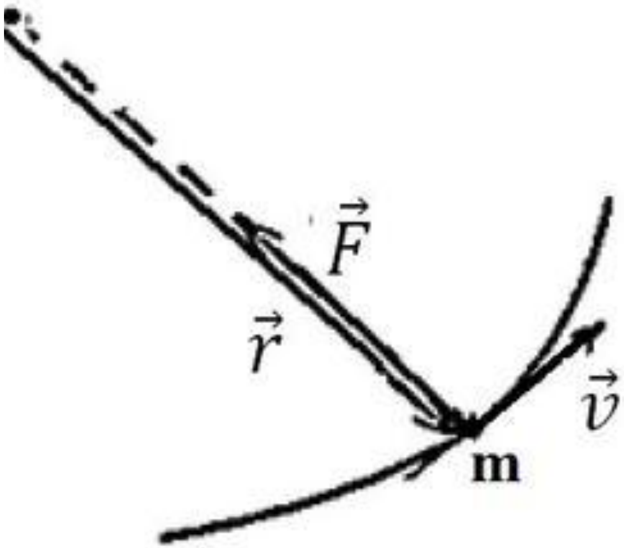
$$\vec{r}\ \times|\qquad d\vec{p}/dt = \vec{F}\qquad\rightarrow$$

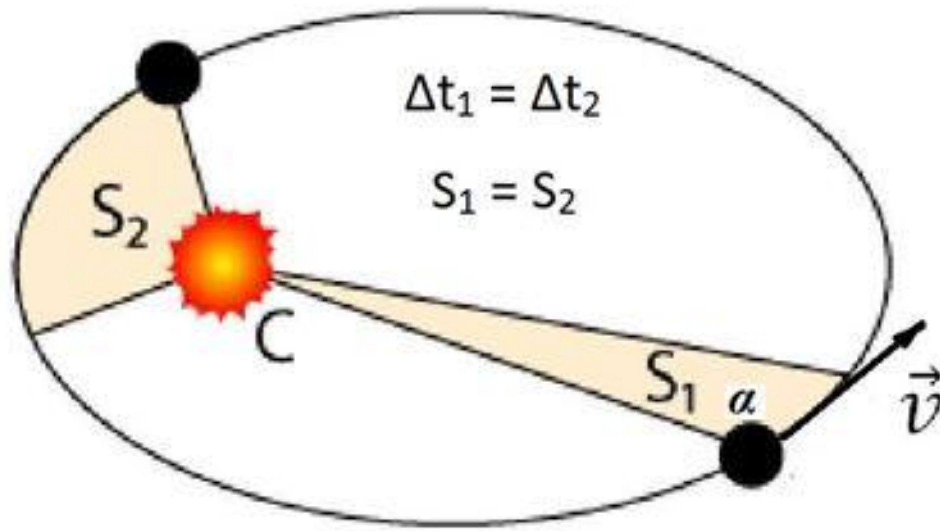
$$[\vec{r}, d\vec{p}/dt] = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Это соотношение наз. *уравнением моментов* (моменты и в ЛЧ, и в ПЧ) для МТ.

Оно не выражает нового закона природы, а является следствием из 2 ЗН, новой формой его записи, которая внешне похожа на $d\vec{p}/dt = \vec{F}$. Выгода его использования заключается в простоте описания движения.





Кеплера

При движении в центральном поле центр сил - качестве полюса.

Т.к. $\vec{r} \parallel \vec{F}$, то $\overrightarrow{M} = 0$ и $d\vec{L}/dt = 0$,

т.е. $\vec{L} = \text{const}$.

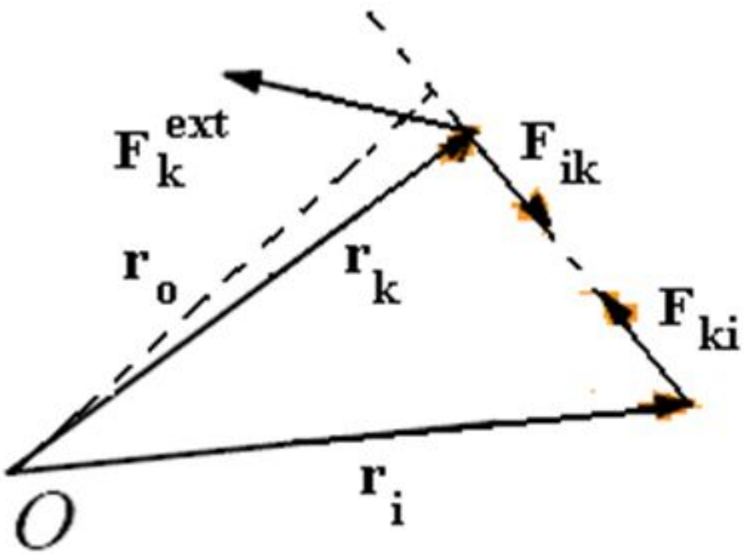
Отсюда 2 закон Кеплера: при движении планет их радиус-векторы, проведенные из Солнца, выметают равные площади за равные промежутки времени.

$$S_\Delta = r\, v\, \Delta t \sin\alpha = (L/m)\, \Delta t$$

При $L = \text{const}$ это ведет к $S_\Delta = \text{const}$.

Уравнение моментов для системы МТ

В системе МТ на каждую из них действуют моменты и внеш. и внутр. сил (полюс О общий для всех МТ):



$$\frac{d\overrightarrow{L_k}}{dt} = \sum[\overrightarrow{r_k}, \overrightarrow{F_{ik}}] + \overrightarrow{M_k^{ext}}$$

Суммирование по МТ, действующим на k-тую МТ.

После суммирования по k:

$$\sum \frac{d\overrightarrow{L_k}}{dt} = \sum\sum[\overrightarrow{r_k}, \overrightarrow{F_{ik}}] + \sum \overrightarrow{M_k^{ext}}$$

Первая сумма состоит из пар $[\overrightarrow{r_k}, \overrightarrow{F_{ik}}]$ = - $[\overrightarrow{r_i}, \overrightarrow{F_{ki}}]$ и равна нулю.

Следовательно: $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \overrightarrow{M_k^{ext}}$$

Это соотношение называется уравнением моментов для системы МТ. Согласно нему изменение МКД системы МТ вызывается только моментами внешних сил.

Закон сохранения момента импульса

- Если система замкнутая, т.е. все $\vec{F}_k^{ext} = 0 \rightarrow \vec{M}_k^{ext} = 0$, то:

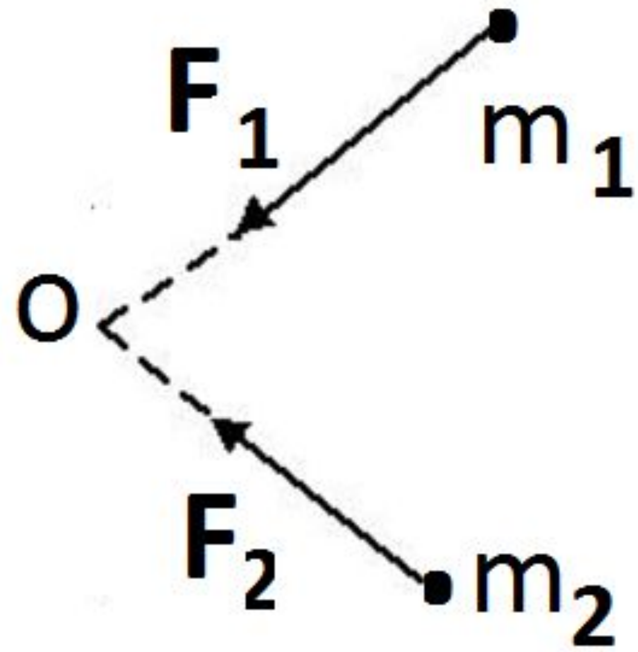
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \vec{L} = const$$

Это закон сохранения МКД для замкнутой системы.

Однако закон сохранения МКД может быть справедлив не только для замкнутых систем.

Условие $\sum \vec{M}_k^{ext} = 0 \rightarrow d\vec{L}/dt = 0$ можно получить путем специального выбора полюса. Например, если действуют 2 внешние силы, то полюс следует поместить в точку пересечения линий действия этих сил.

Пример выгодного выбора полюса



Полюс O в точке пересечения линий действия сил