

## Тема 1 Элементы теории массового обслуживания

**Цель:** изучить теорию массового обслуживания, ознакомиться с понятием Марковского случайного процесса.

### План:

1. Основные понятия ТМО.
2. Классификация СМО.
3. Понятие Марковского случайного процесса

### 1 Основные понятия ТМО.

При исследовании операций часто приходится сталкиваться с системами, предназначенными для многократного использования при решении однотипных задач. Возникающие при этом процессы получили название *процессов обслуживания*, а системы – *систем массового обслуживания (СМО)*.

Каждая СМО состоит из определенного числа обслуживающих единиц, которые называют *каналами обслуживания*. По числу каналов СМО подразделяют на *одноканальные* и *многоканальные*.

Заявки поступают в СМО обычно не регулярно, а случайно, образуя так называемый *случайный поток заявок (требований)*. Обслуживание заявок также продолжается какое-то случайное время. Случайный характер потока заявок и времени обслуживания приводит к тому, что СМО оказывается загруженной неравномерно: в какие-то периоды времени скапливается очень большое количество заявок, в другие же периоды СМО работает с недогрузкой, простаивает.

Предметом *теории массового обслуживания* является построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО с показателями её эффективности, описывающими её способность справляться с потоком заявок.

В качестве *показателей эффективности СМО* используются: среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени; среднее число заявок в очереди; среднее время ожидания обслуживания; вероятность отказа в обслуживании без ожидания; вероятность того, что число заявок в очереди превысит определенное значение и т.п.

## 2. Классификация СМО.

СМО делят на два основных типа (класса): СМО с отказами и СМО с ожиданием (очередью). В СМО с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует. В СМО с ожиданием (очередью) заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, не уходит, а становится в очередь на обслуживание.

СМО с ожиданием подразделяются на разные виды в зависимости от того, как организована очередь: с ограниченной или неограниченной длиной очереди, с ограниченным временем ожидания и т.п.

Для классификации СМО важное значение имеет *дисциплина обслуживания*, определяющая порядок выбора заявок из числа поступивших и порядок распределения их между свободными каналами. По этому признаку обслуживание заявки может быть организовано по принципу *«первая пришла – первая обслужена»*, *«последняя пришла – первая обслужена»* или *обслуживание с приоритетом*. Приоритет может быть как *абсолютным*, когда более важная заявка «вытесняет» из-под обслуживания обычную заявку, так и *относительным*, когда более важная заявка получает лишь «лучшее» место в очереди.

### 3. Понятие Марковского случайного процесса

Процесс работы СМО представляет собой *случайный процесс*.

Под *случайным (вероятностным или стохастическим) процессом* понимается процесс изменения во времени состояний какой-либо системы в соответствии с вероятностными закономерностями.

Процесс называется *процессом с дискретными состояниями*, если его возможные состояния  $S_1, S_2, S_3, \dots$  можно заранее перечислить, а переход системы из состояния в состояние происходит мгновенно (скачком). Процесс называется *процессом с непрерывным временем*, если моменты возможных переходов системы из состояния в состояние не фиксированы заранее, а случайны.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Это означает, что состояние СМО меняется скачком в случайные моменты появления каких-то событий.

Математический анализ работы СМО существенно упрощается, если процесс этой работы – Марковский. Случайный процесс называется *Марковским* или *случайным процессом без последствия*, если для любого момента времени  $t_0$  вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент  $t_0$  и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

## Контрольные вопросы:

1. Понятие процесса обслуживания.
2. Понятие систем массового обслуживания.
3. Что принято называть каналами обслуживания?
4. Как подразделяют СМО по числу каналов?
5. Что означает понятие «случайный поток заявок»?
6. Предмет теории массового обслуживания.
7. Показатели эффективности СМО.
8. На какие классы делят СМО? Опишите их.
9. Дисциплина обслуживания.
10. По какому принципу организуется обслуживание заявок?
11. Что значит понятие «абсолютный приоритет»?
12. Что значит понятие «относительный приоритет»?
13. Что понимают под случайным процессом?
14. Какой процесс называется процессом с дискретными состояниями?
15. Процесс с непрерывным временем.
16. Что означает выражение: «Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс»?
17. Какой процесс называется Марковским?

## Практическое занятие 1

**Тема: Граф состояний СМО. Понятие потока событий и его характеристики.**

**Цель:** познакомиться с понятием потока событий и его характеристиками и научиться строить графы состояний СМО

### **План:**

1. Граф состояний СМО
2. Понятие потока событий и его характеристики

### **1. Граф состояний СМО**

Обычно состояния системы изображаются прямоугольниками (кружками), а возможные переходы из состояния в состояние – стрелками (ориентированными дугами), соединяющими состояния.

**Пример1:** Необходимо построить граф состояний системы следующего случайного процесса: устройство  $S$  состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя, после чего мгновенно начинается ремонт узла, продолжающийся заранее неизвестное случайное время.

Возможные состояния системы:  $S_0$  – оба узла исправны;  $S_1$  – первый узел ремонтируется, второй исправен;  $S_2$  – второй узел ремонтируется, первый исправен;  $S_3$  – оба узла ремонтируются. Граф состояний представлен на рисунке 1.

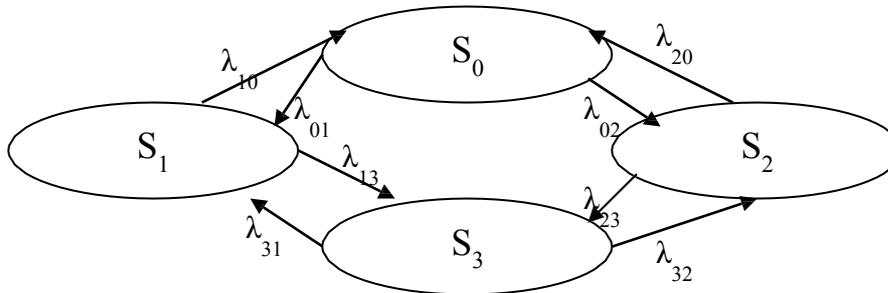


Рисунок 1 - Граф состояний

Стрелка, направленная, например, из  $S_0$  в  $S_1$ , означает переход системы в момент отказа первого узла, из  $S_1$  в  $S_0$  – переход в момент окончания ремонта этого узла.

На графе отсутствуют стрелки из  $S_0$  в  $S_3$  и из  $S_1$  в  $S_2$ . Это объясняется тем, что выходы узлов из строя предполагаются независимыми друг от друга и, например, вероятностью одновременного выхода из строя двух узлов (переход из  $S_0$  в  $S_3$ ) или одновременного окончания ремонтов двух узлов (переход из  $S_3$  в  $S_0$ ) можно пренебречь.

Для математического описания Марковского случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем, протекающего в СМО, необходимо познакомиться с понятием потока событий.

## 2. Понятие потока событий и его характеристики

Под *потоком событий* понимается последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени.

Поток характеризуется *интенсивностью*  $\lambda$  - частотой появления событий или средним числом событий, поступающих в СМО в единицу времени.

Поток событий называется *регулярным*, если события следуют одно за другим через определенные равные промежутки времени. Например, поток изделий на конвейере сборочного цеха является регулярным.

Поток событий называется *стационарным*, если его вероятностные характеристики не зависят от времени. В частности, интенсивность стационарного потока есть величина постоянная:  $\lambda(t)=\lambda$ .

Поток событий называется *потоком событий без последствия*, если для любых двух непересекающихся участков времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$  - число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие.

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность попадания на малый (элементарный) участок времени  $\Delta t$  двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события. Другими словами, поток событий ординарен, если события появляются в нем поодиночке, а не группами.

Поток событий называется *простейшим* (или *стационарным пуассоновским*), если он одновременно стационарен, ординарен и не имеет последствия. Название «простейший» объясняется тем, что СМО с регулярным потоком не является простейшим, так как он обладает простейшими потоками имеет наиболее простое математическое описание. Последствием: моменты появления событий в потоке жестко таком зафиксированы.

Простейший поток в качестве предельного возникает в теории случайных процессов столь же естественно, как в теории вероятностей нормальное распределение получается в качестве предельного для суммы случайных величин: *при наложении (суперпозиции) достаточно большого числа  $n$  независимых, стационарных и ординарных потоков (сравнимых между собой по интенсивностям  $\lambda_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ )) получается поток, близкий к простейшему с интенсивностью  $\lambda$ , равной сумме интенсивностей входящих потоков, т.е.*

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Для простейшего потока с интенсивностью  $\lambda$  вероятность попадания на *элементарный (малый)* отрезок времени  $\Delta t$  хотя бы одного события потока равна, согласно формуле  $a = \sigma = \frac{1}{\lambda}$

$$P_{\Delta t} = P(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda \Delta t . \quad (*)$$

### Задания:

1. Построить граф состояний следующего случайного процесса: система состоит из двух автоматов по продаже газированной воды, каждый из которых в случайный момент времени может быть либо занятым, либо свободным. Найти предельные вероятности по данному графу.
2. Построить граф состояний системы  $S$ , представляющей электрическую лампочку, которая в случайный момент времени может быть либо включена, либо выключена, либо выйти из строя.

### Контрольные вопросы:

1. Понятие потока событий.
2. Интенсивность потока событий.
3. Какой поток событий называется регулярным?
4. Какой поток событий называется стационарным?
5. Какой поток событий называется потоком без последствия?
6. Какой поток событий называется ординарным?
7. Какой поток событий называется простейшим?
8. Когда возникает предельный простейший поток событий?
9. Как вычисляется вероятность попадания хотя бы одного элементарный отрезок времени  $\Delta t$ ?

события  
на