

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ**

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

(государственный университет)

**Применение метода чувствительности в задачах оптимального проектирования осесимметричных деталей газотурбинного двигателя**

---

Магистерская диссертация студента 865 группы ФАЛТ

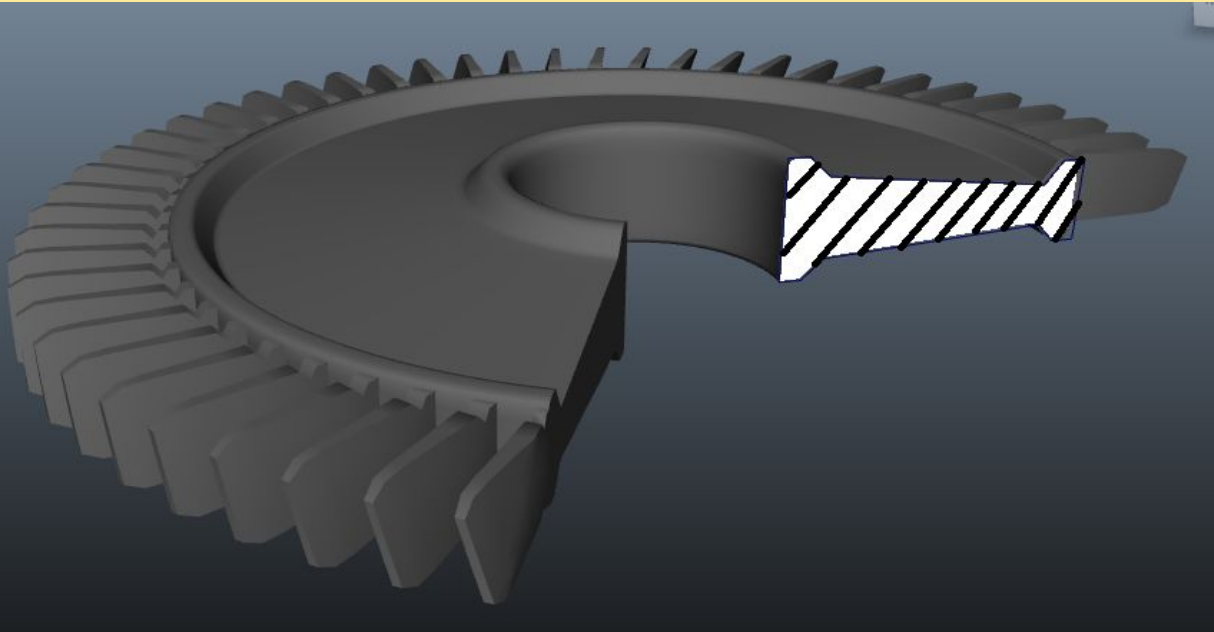
Шутовой Марии Викторовны

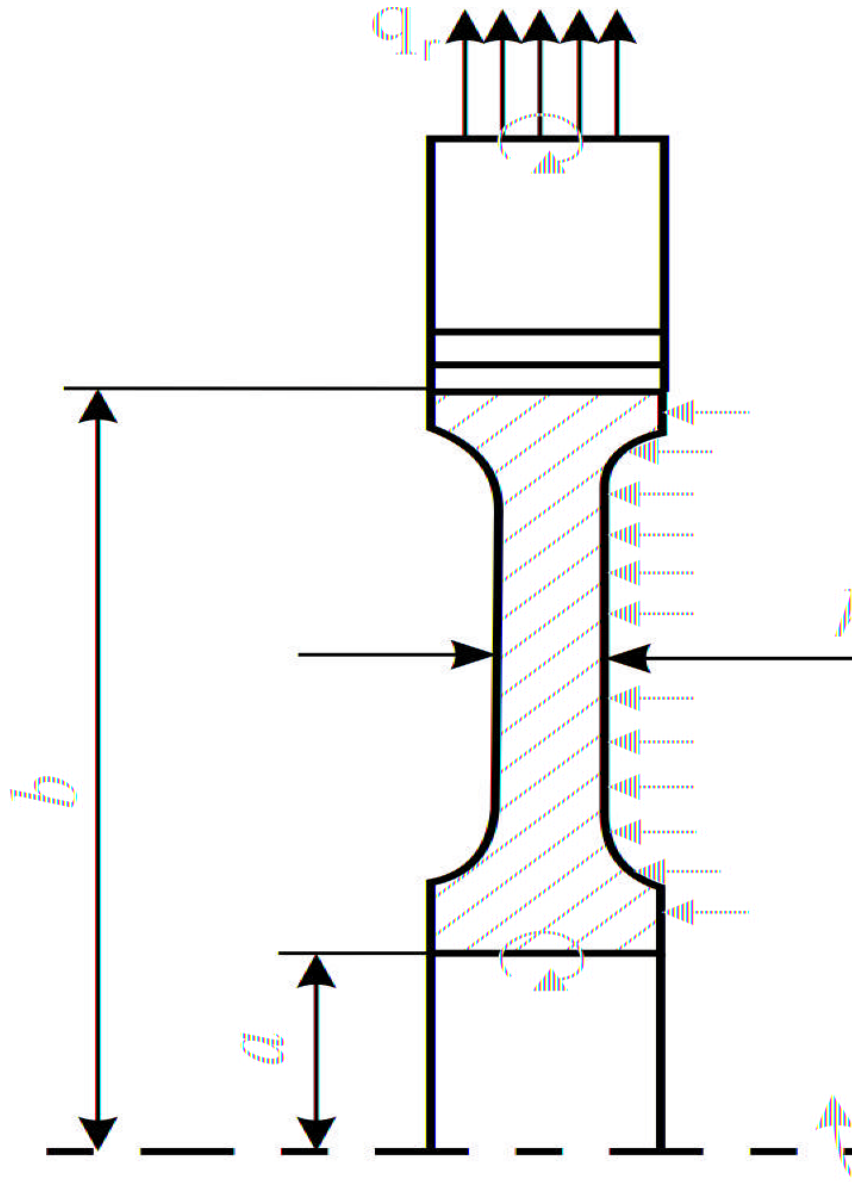
Научный руководитель: доктор технических наук, профессор

Темис Юрий Моисеевич

Москва, 2014

- Постановка задачи
- Алгоритм метода чувствительности
- Описание программного комплекса
- Результаты расчетов
- Заключение





Функция цели:

$$F[h] = 2\pi \int_a^b \rho h(r) r dr \rightarrow \min$$

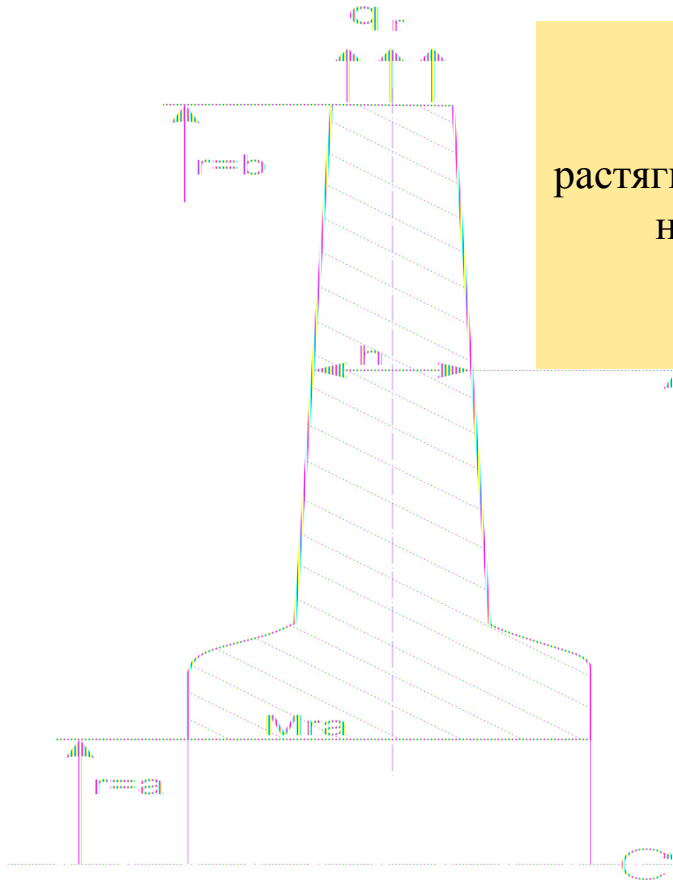
Ограничения:

$$h_{\min}(r) \leq h(r) \leq h_{\max}(r)$$

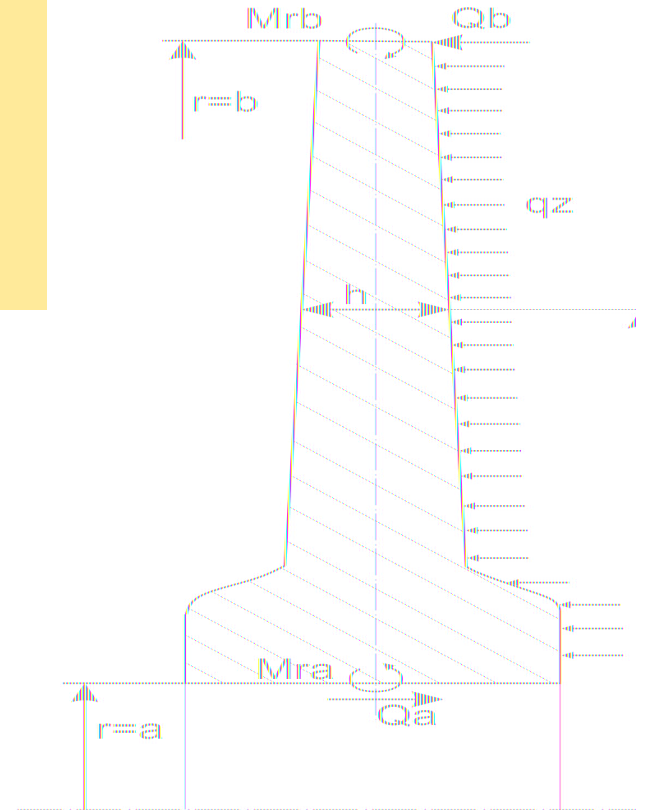
$$\sigma_i(r) \leq [\sigma]$$

$$\forall r \in [a, b];$$

**Задача 1**  
Диск с  
растягивающей  
нагрузкой



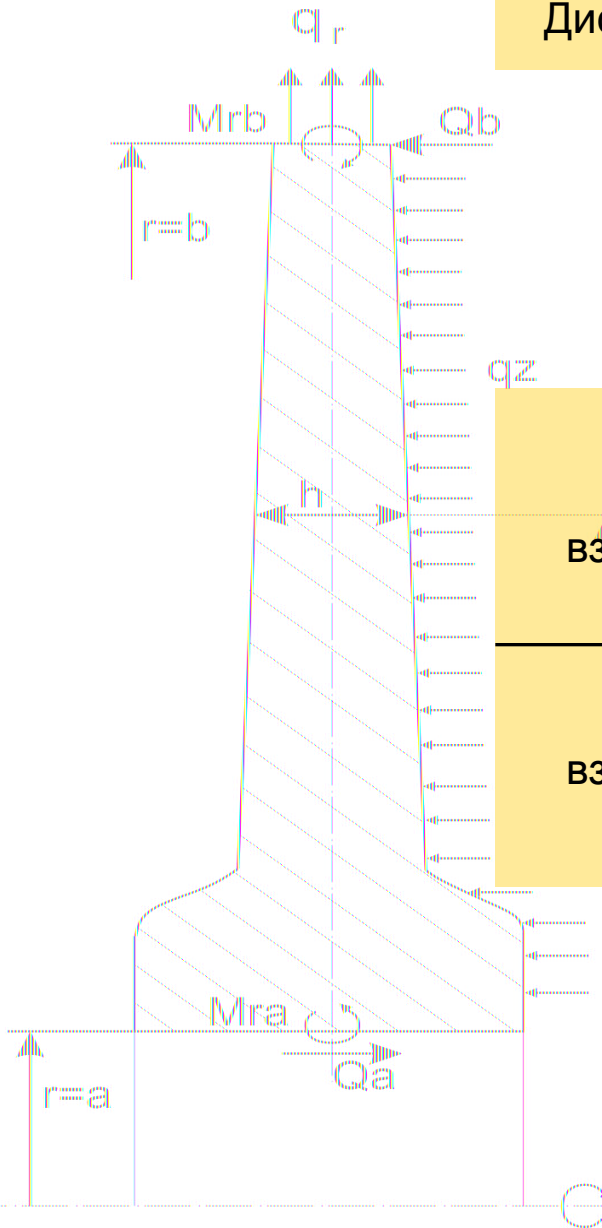
**Задача 2**  
Диск с  
изгибающей  
нагрузкой



$$\begin{cases} \frac{du}{dr} = -\frac{\mu}{r}u + \frac{1-\mu^2}{Er} \frac{1}{h}Q + \alpha(1+\mu)T; \\ \frac{dQ}{dr} = \frac{E}{r}hu + \frac{\mu}{r}Q + (-E\alpha T - \rho\omega^2 r^2)h. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dw}{dr} = -\vartheta & \frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{\mu}{r}\vartheta - \frac{1}{r}M_r + \frac{S_T}{D} \\ \frac{dQ}{dr} = -\frac{Q}{r} - q_z \\ \frac{dM_r}{dr} = \frac{D(\mu^2-1)}{r^2}\vartheta + Q + \frac{\mu-1}{r}M_r - \frac{S_T(\mu-1)}{r} \end{cases}$$

## Диск с изгибающими и растягивающими нагрузками



### Задача 3

Диск без учета взаимного влияния нагрузок

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\mu}{r}u + \frac{1-\mu^2}{Er} \frac{1}{h} Q + \alpha(1+\mu)T;$$

$$\frac{dQ}{dr} = \frac{E}{r} h u + \frac{\mu}{r} Q + (-E\alpha T - \rho\omega^2 r^2) h.$$

$$\frac{dw}{dr} = -\vartheta$$

$$\frac{dN}{dr} = -\frac{N}{r} - q_z \quad \frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{\mu}{r}\vartheta - \frac{1}{r} M_r + \frac{S_T}{D}$$

$$\frac{dM_r}{dr} = \frac{D(\mu^2 - 1)}{r^2} \vartheta + Q + \frac{\mu - 1}{r} M_r - \frac{S_T(\mu - 1)}{r}$$

### Задача 4

Диск с учетом взаимного влияния нагрузок

$$\frac{dw}{dr} = \vartheta \quad \frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{\mu}{r}\vartheta - \frac{1}{D} M_s + T_2(1+\mu)$$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\mu}{r}u + \frac{1}{A} N_s + T_1(1+\mu)$$






$$\frac{dM_s}{dr} = -\frac{D(1-\mu)}{r^2} \vartheta + Q - \frac{1-\mu}{r} M_s - m_s + \frac{D(1-\mu^2)T_2}{r}$$

$$\frac{dN_s}{dr} = \frac{A(1-\mu^2)}{r^2(1+\varphi^2)} u - \frac{1-\mu}{r(1+\varphi^2)} N_s - \frac{A(1-\mu^2)}{r(1+\varphi^2)} T_1 - \frac{q_r + q_z \varphi}{1+\varphi^2}$$

$$\frac{dQ}{dr} = -\frac{\varphi}{1+\varphi^2} \frac{A(1-\mu^2)}{r^2} u - \frac{1}{r} Q - \frac{\varphi}{1+\varphi^2} \frac{\mu}{r} N_s + F$$

$$F = F(\varphi, \mu, T) = \frac{\varphi}{1+\varphi^2} \frac{T_1 A(1-\mu^2)}{r} + \frac{q_r \varphi - q_z}{1+\varphi^2}$$

# Постановка задачи

R=A	Свободный край	Свободно опертая пластина	Жестко защемленный край
			
$w$	$w_a$	0	0
$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}_a$	$\mathcal{G}_a$	0
$u$	$u_a$	$u_a$	0
$Q$	0	$Q_a \cdot a$	$Q_a \cdot a$
$M_s$	0	0	$M_{sa}$
$N_s$	0	0	$N_{sa}$
R=B	Свободный край	Свободно опертая пластина	Жестко защемленный край
			
$w$	$w_b$	0	0
$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}_b$	$\mathcal{G}_b$	0
$u$	$u_b$	$u_b$	0
$Q$	0	$Q_b \cdot B$	$Q_b \cdot B$
$M_s$	0	0	$M_{sb}$
$N_s$	0	0	$N_{sb}$

Граничные условия  
общего вида

# Метод чувствительности на примере задачи оптимизации вращающегося диска

Исходная задача:

$$[X] \{ \quad \} C \{ \quad \} = 0$$

$$\Phi_1[h] = \int_a^b r_1(r) dr = 0$$

Вариация толщины:

$$h_1(r)$$

$$h_2(r) = h_1(r) + v(r)$$

$$\delta F[v] = 2\pi \int_a^b \rho r v dr = \int_a^b w v dr$$

$$w = 2\pi \rho r$$

Уравнение в вариациях:

$$[X] \{ \delta \quad \} + \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial h} \right\} \delta = 0,$$

$$i = 1 \dots N$$

$$\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial h} \right\} = \frac{\partial}{\partial h} [J] \{ X \} - \frac{\partial}{\partial h} \{ C \}$$

Сопряженная задача:

$$[J]^* \{ \psi \} = - \left\{ \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_i} \right\}$$

$$\delta F_1[v] = \int_a^b w_1(r) v(r) dr$$

$$w_1(r) = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial h}, \dots, \frac{\partial f_N}{\partial h}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial h} \right\} \{ \psi_1, \dots, \psi_N, 1 \}^T$$

# Метод чувствительности на примере задачи оптимизации вращающегося диска

Задача нахождения минимума линейного функционала:

$$F[h_1] + \delta F[v] = 2\pi \int_a^b \rho h_1(r) r dr + \int_a^b w(r) v(r) dr = C + \int_a^b w(r) v(r) dr \rightarrow \min,$$

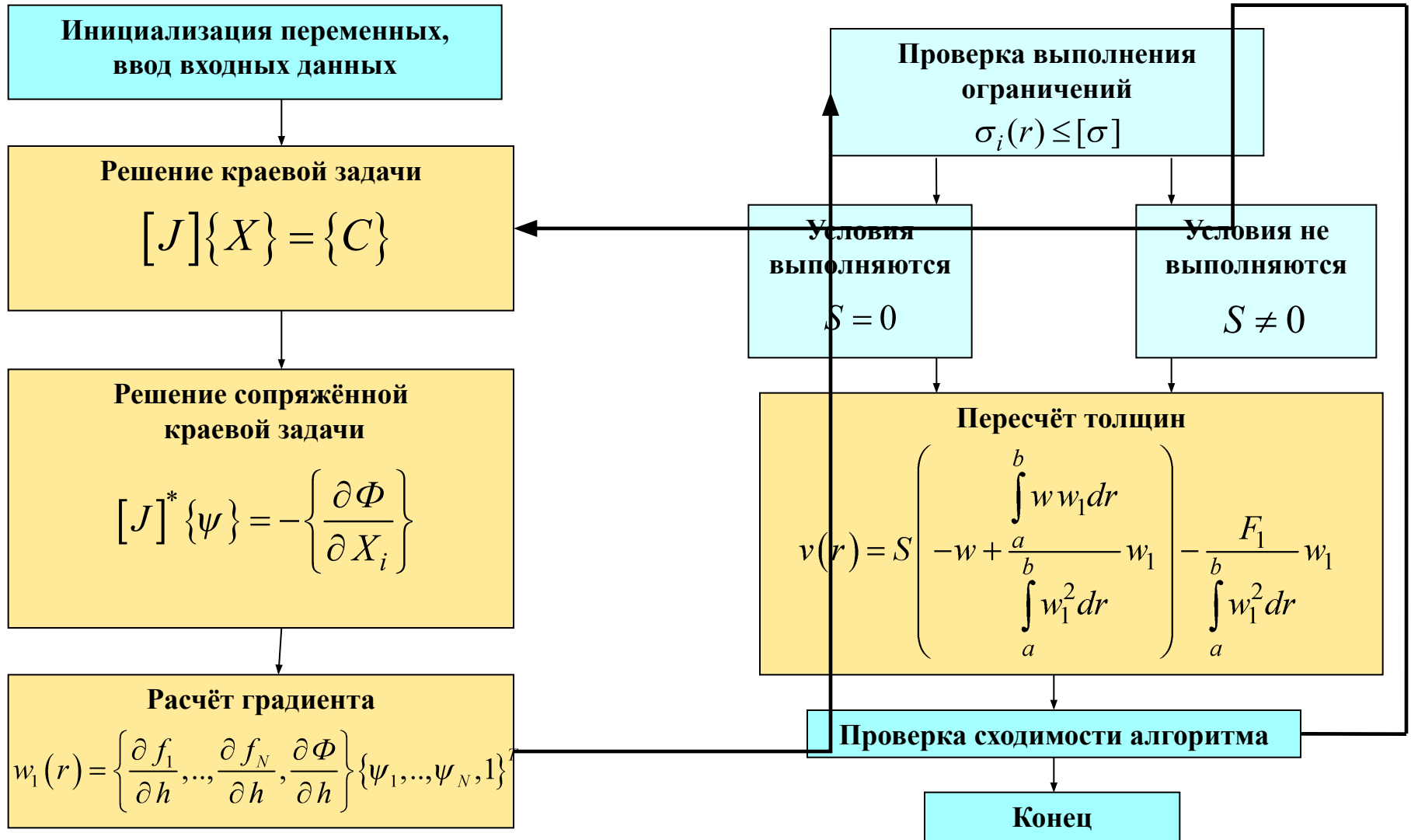
$$F_1[h_1] + \int_a^b w_1(r) v(r) dr = 0,$$

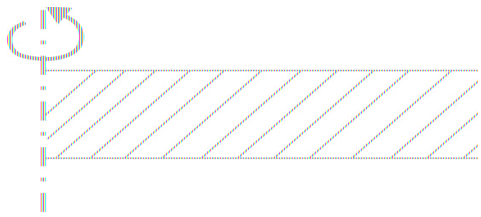
$$\int_a^b (v(r))^2 dr - \varepsilon^2 = 0,$$

$$v(r) = \frac{1}{\gamma} \left( -w + \frac{\int_a^b w w_1 dr}{\int_a^b w_1^2 dr} w_1 \right) - \frac{F_1}{\int_a^b w_1^2 dr} w_1$$



# Блок-схема алгоритма





**Вращающийся диск**

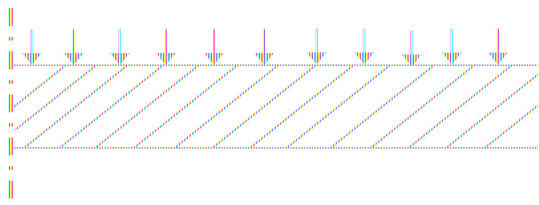
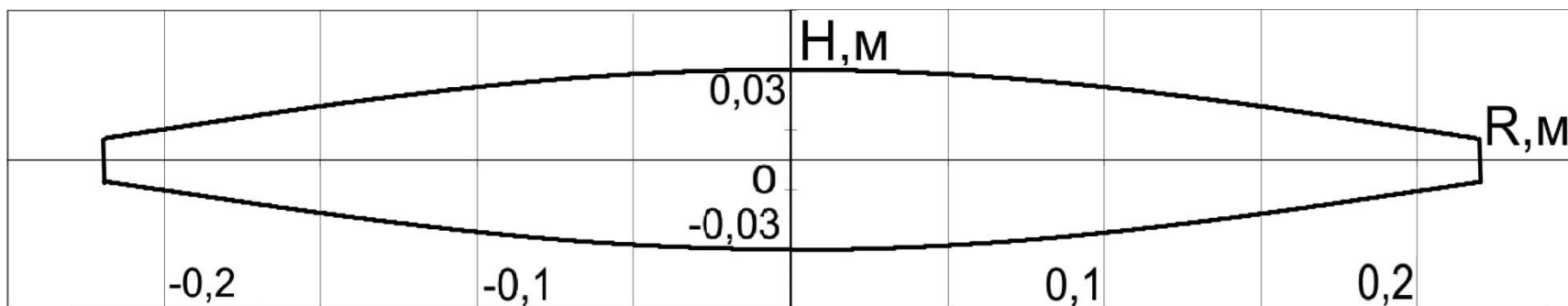
$$h(r) = h_c e^{\frac{\rho \omega^2}{2\sigma}(c^2 - r^2)}$$

Погрешность: 1.5%

Кол-во управляющих параметров: 100

Время счета: 2 сек.

Кол-во итераций: 89

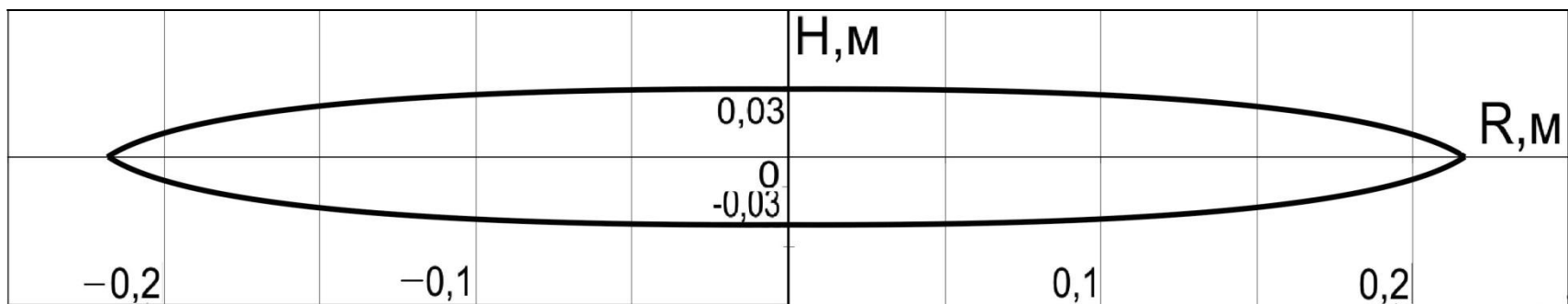


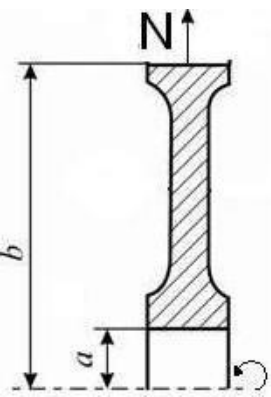
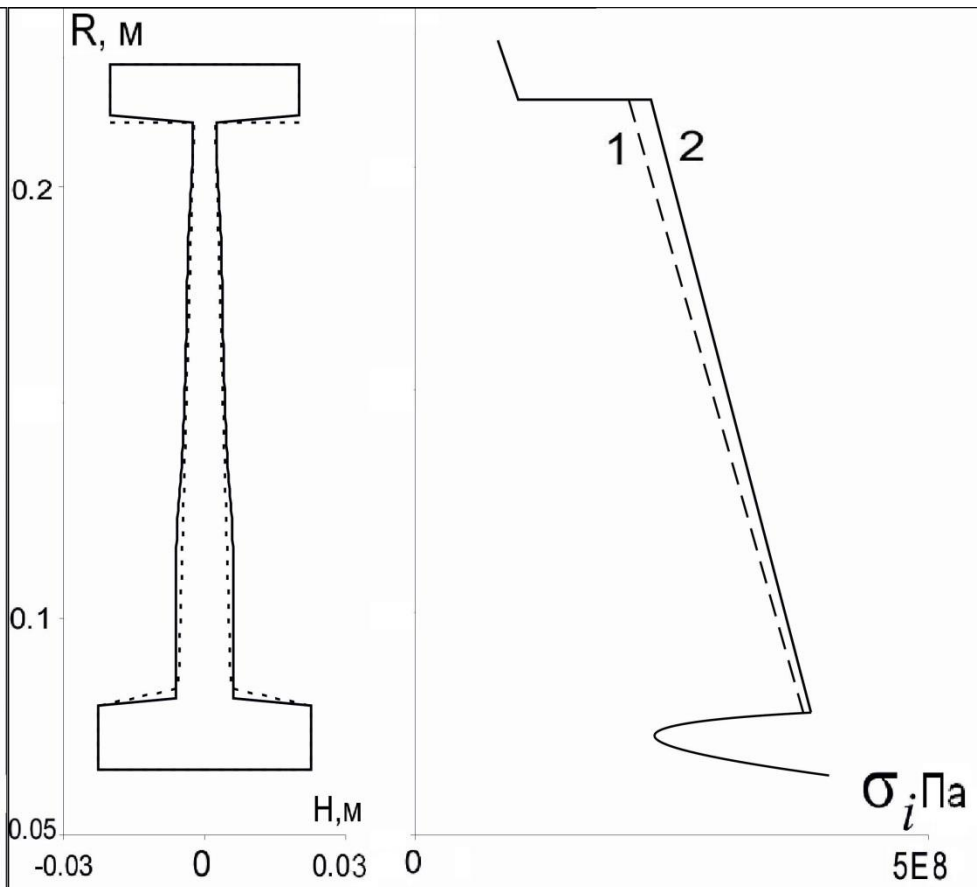
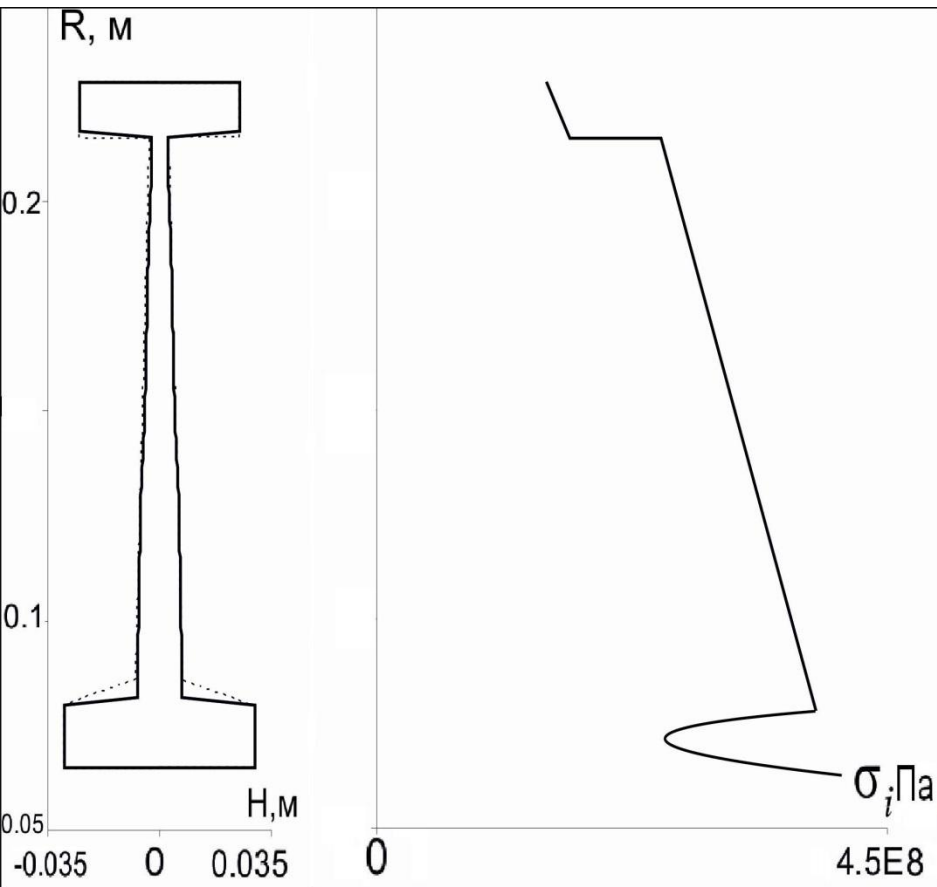
**Пластика под тяжестью  
собственного веса**

Кол-во упр. параметров: 300

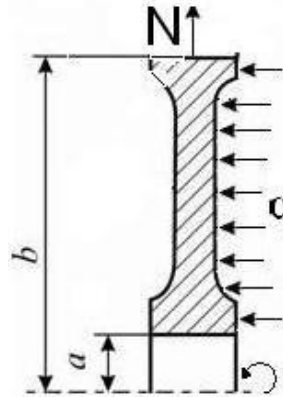
Время счета: 7 сек.

Кол-во итераций: 310



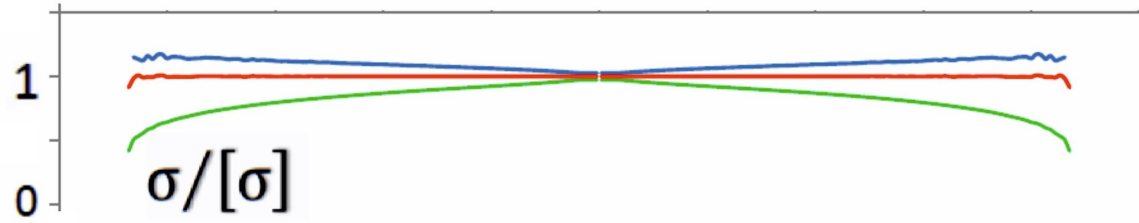
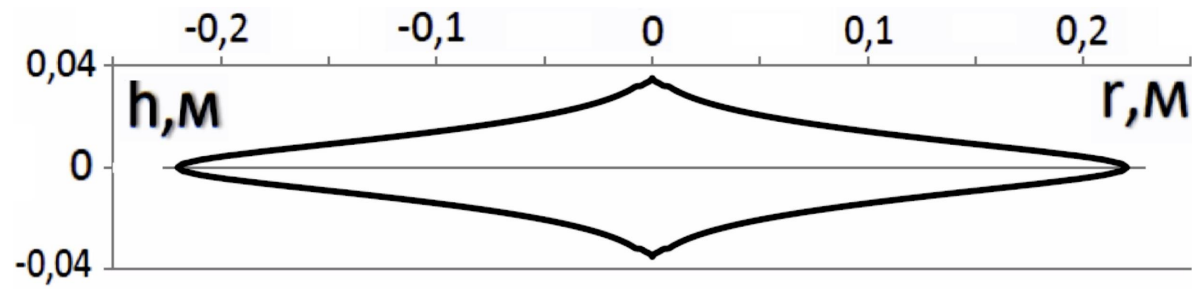
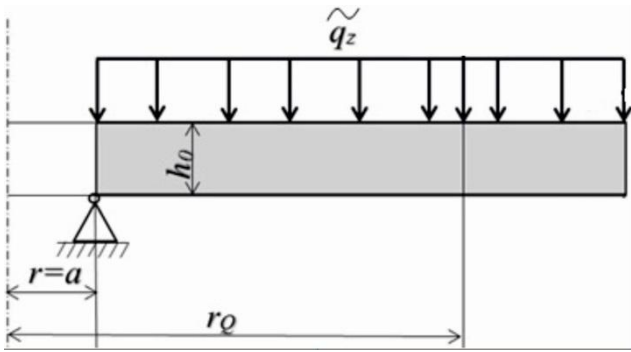


Макс погрешность: 7%  
 Кол-во упр. параметров: 300  
 Время счета: 7 сек.  
 Кол-во итераций: 489



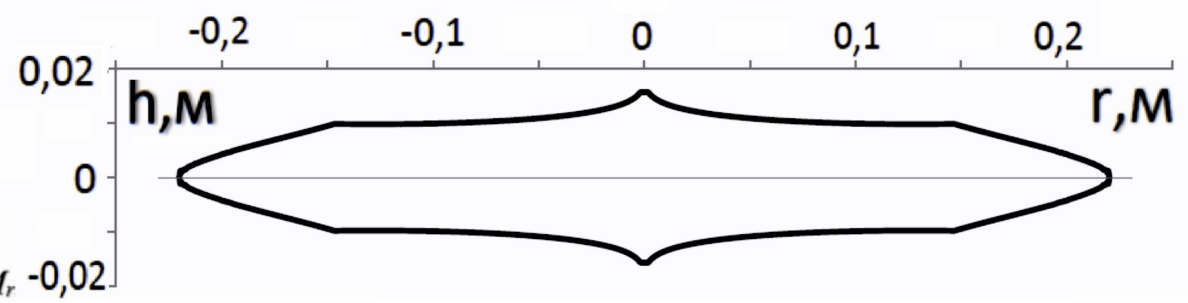
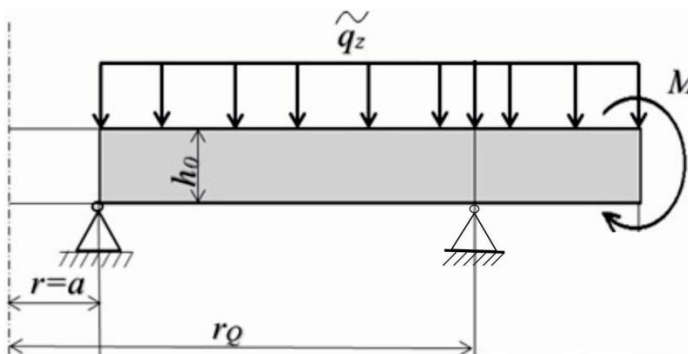
Макс погрешность: 7%  
 Кол-во упр. параметров: 300  
 Время счета: 7 сек.  
 Кол-во итераций: 437

# Результаты расчетов



Кол-во упр. параметров -600  
 Время счета – 10 сек.

- радиальные напряжения
- эквивалентные напряжения
- окружные напряжения



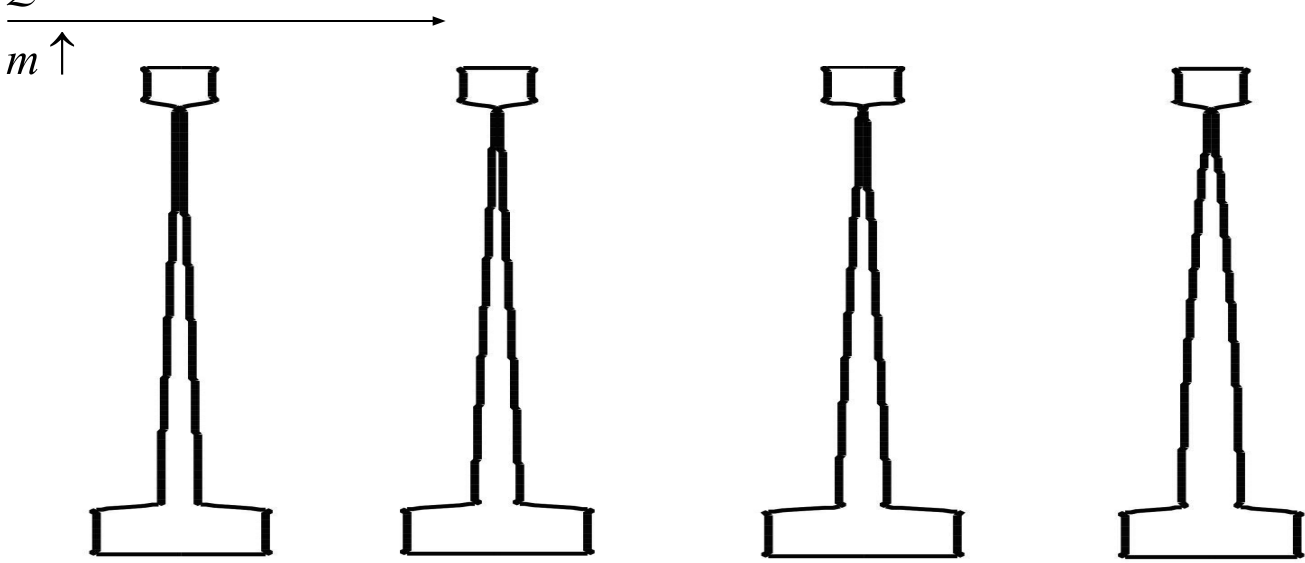
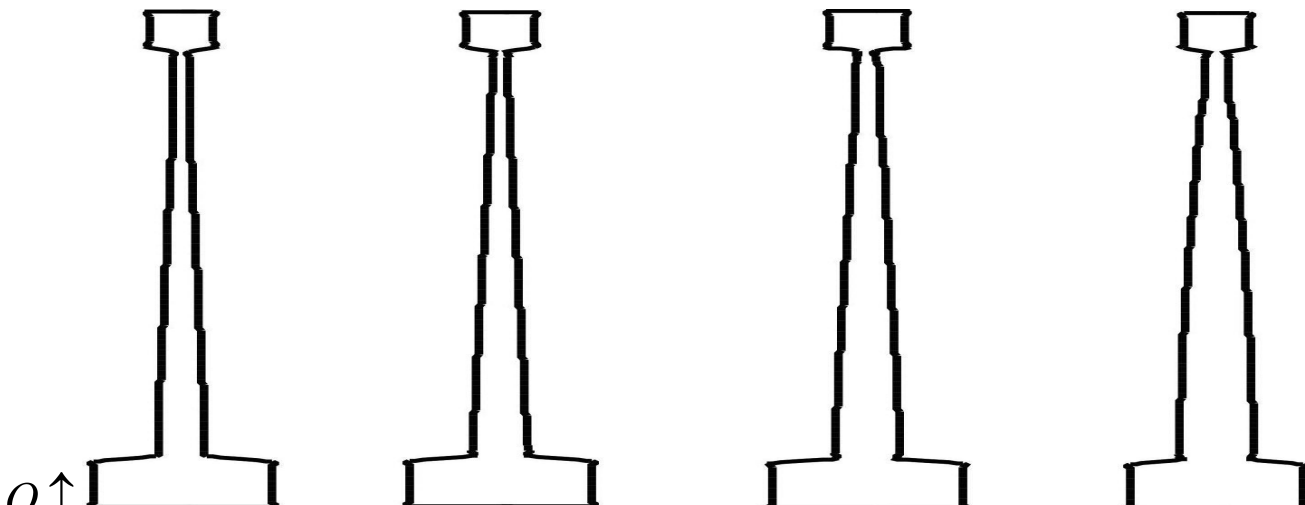
# Результаты расчетов

$Q = 7 \cdot 10^9 \text{ H}$   
 $m = 11.3 \text{ кг}$

$Q = 9 \cdot 10^9 \text{ H}$   
 $m = 12.1 \text{ кг}$

$Q = 11 \cdot 10^9 \text{ H}$   
 $m = 12.9 \text{ кг}$

$Q = 14 \cdot 10^9 \text{ H}$   
 $m = 14.0 \text{ кг}$



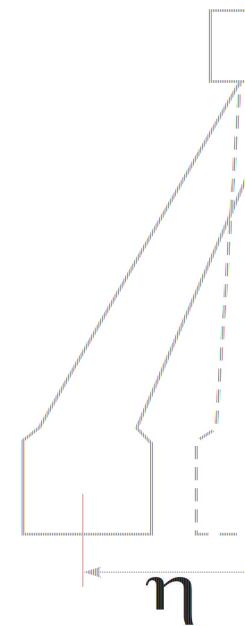
$m = 9.5 \text{ кг}$

$m = 10.3 \text{ кг}$

$m = 10.9 \text{ кг}$

$m = 11.9 \text{ кг}$

Без выносов



С выносами

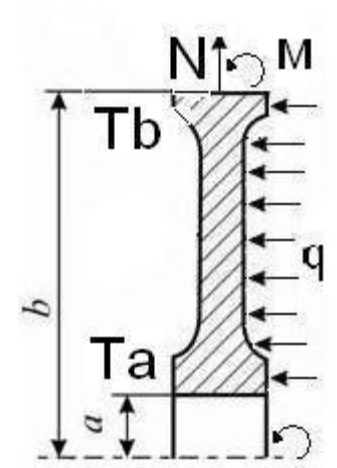
# Результаты расчетов



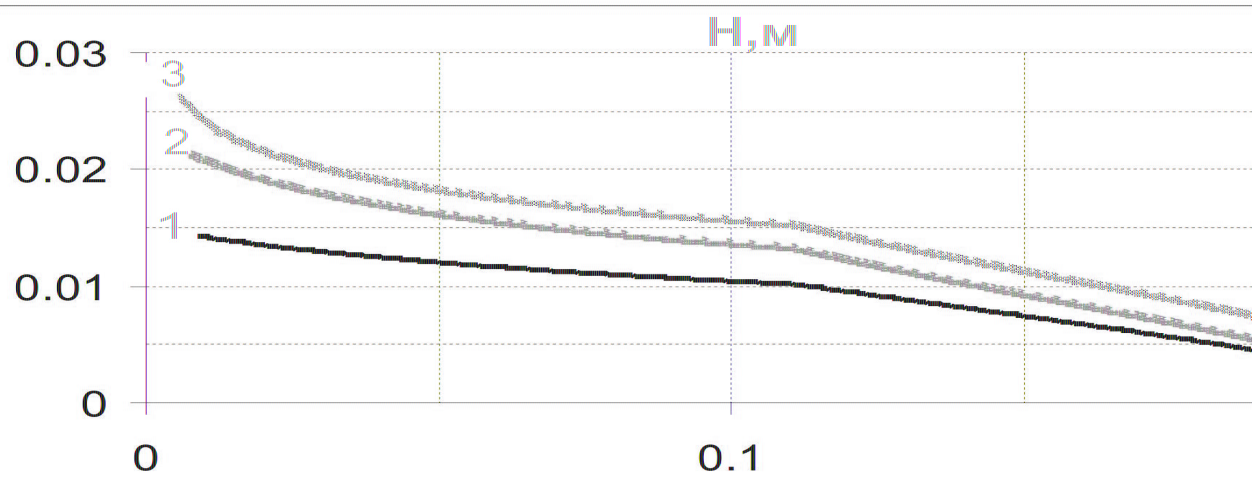
$\sigma = 20.8$

$\sigma = 17.6$

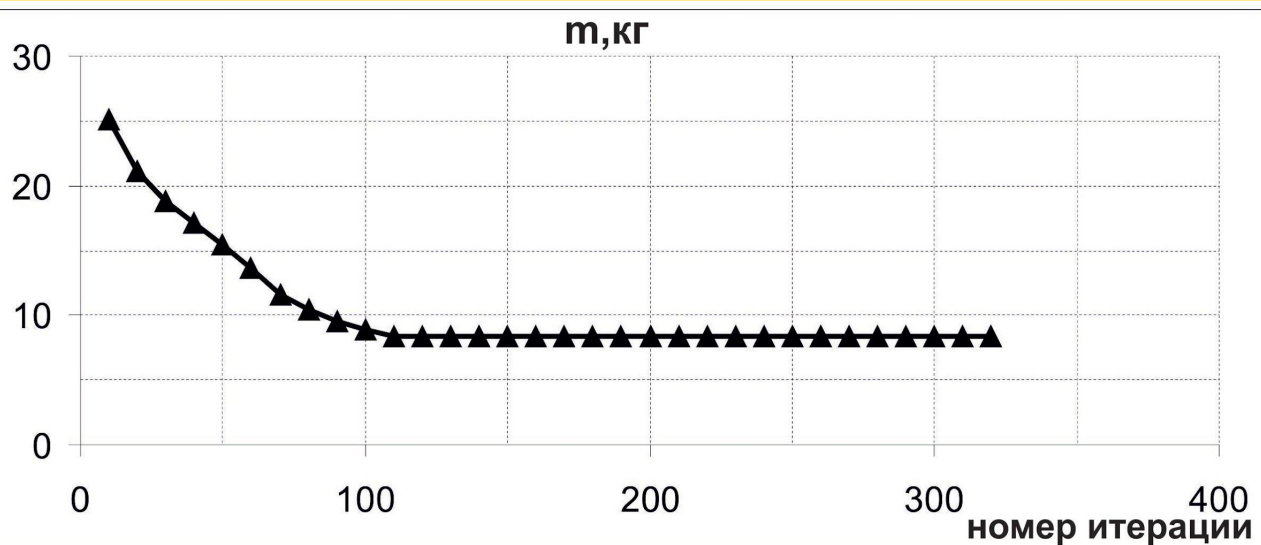
$\omega = 1710 \frac{\text{rad}}{\text{c}}$   
 $\eta \alpha = 7 \cdot 10^9$   
 $M(b) = 20$   
 $N = 7,08 \cdot 10^5$   
 $T(a) = 550K$   
 $T(b) = 730K$



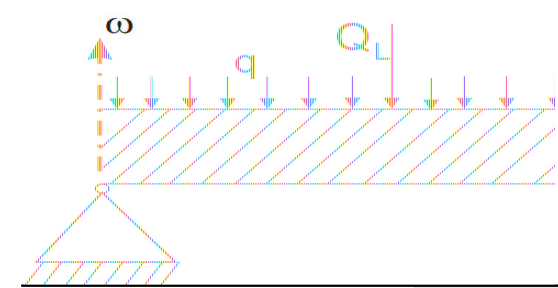
## Восстанавливающий эффект центробежных сил



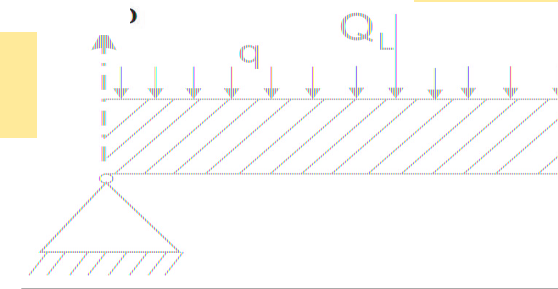
## Изменение массы в процессе оптимизации



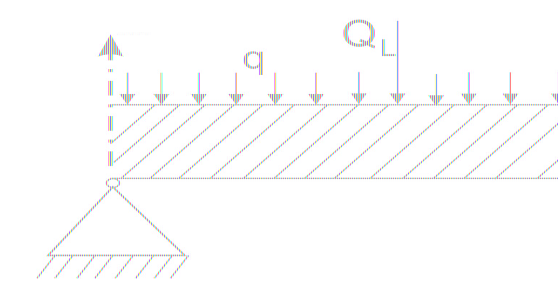
1



2



3



# Итоги

- Создана математическая модель расчета напряженно деформированного состояния круглой пластинки переменной толщины с различными комбинациями растягивающих и изгибающих нагрузок
- Решена задача оптимизации формы круглой пластинки с изгибающими и растягивающими нагрузками методом проекции градиента.
- Реализован алгоритм метода проекции градиента, метода конечных элементов и метода конечных разностей.
- Решена задача оптимизации формы круглой пластинки методом проекции градиента с введением дополнительных ограничений на максимальную (или минимальную) ширину пластинки и с введением двух параметров управления (толщина пластинки и угол подъема).
- В ходе выполнения работы написаны программы метода чувствительности для оптимизации пластинки для четырех задач.





**Спасибо за внимание!**