ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)

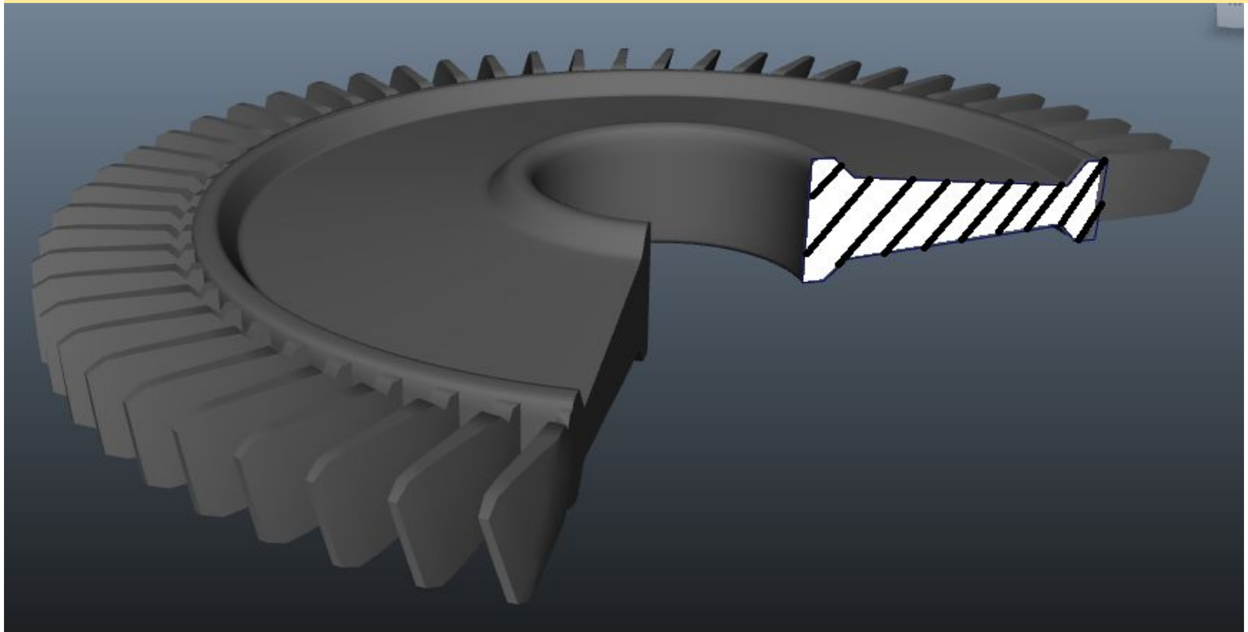
Применение метода чувствительности в задачах оптимального проектирования осесимметричных деталей газотурбинного двигателя

Магистерская диссертация студента 865 группы ФАЛТ
Шутовой Марии Викторовны

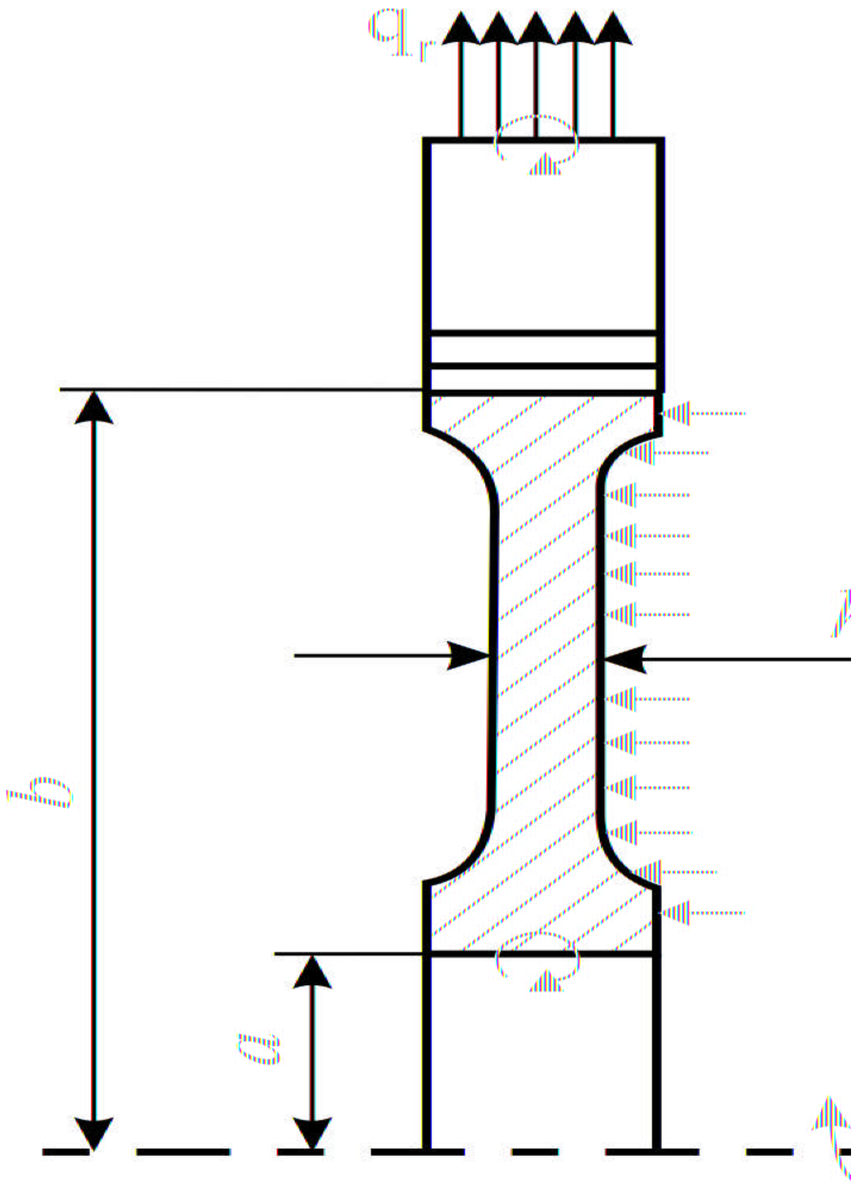
Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Темис Юрий Моисеевич

Москва, 2014

Содержание



Постановка задачи



Функция цели:

$$F[h] = 2\pi \int_a^b \rho\, h(r)\, r\, dr \to \min$$

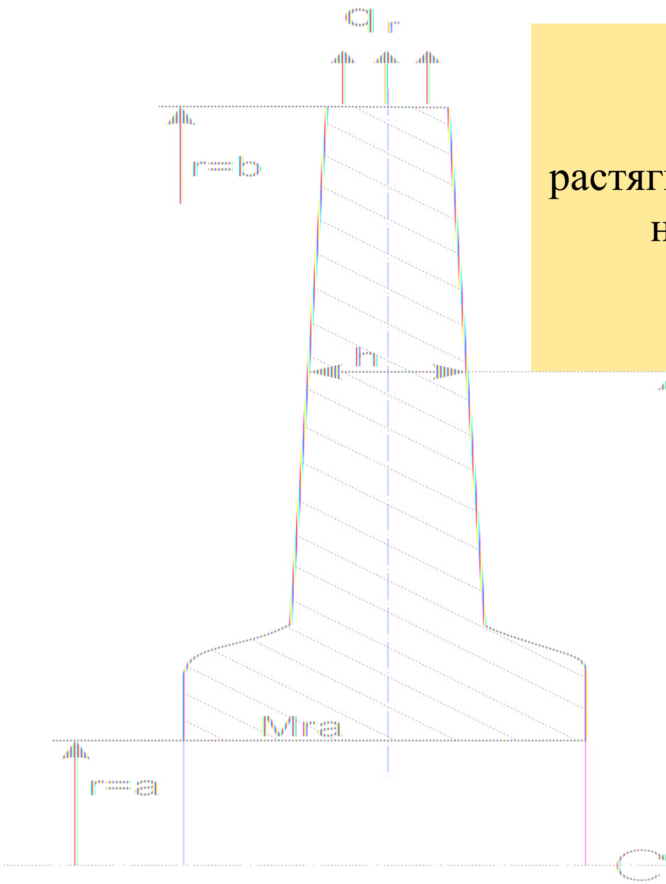
Ограничения:

$$h_{\min}(r) \le h(r) \le h_{\max}(r)$$

$$\sigma_i(r) \le [\sigma]$$

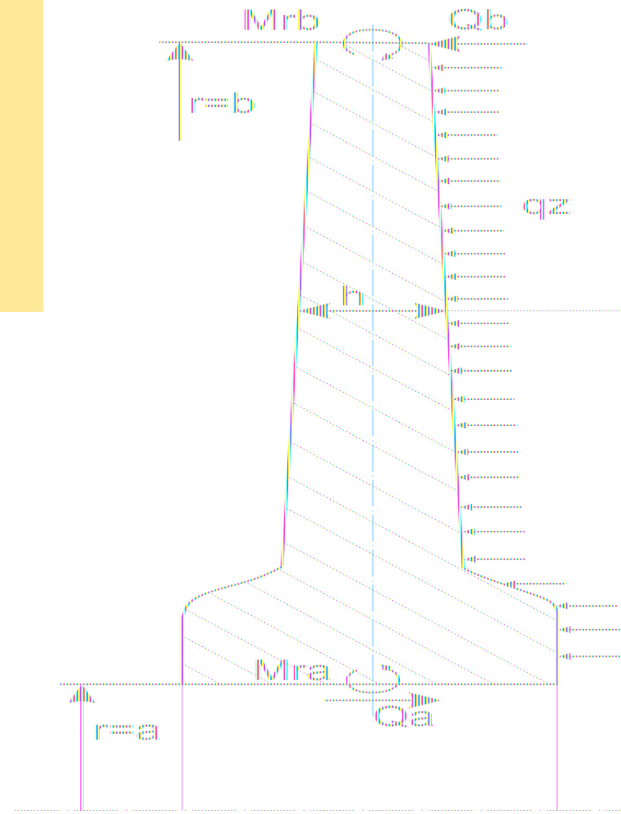
$$\forall r \in [a, b];$$

Постановка задачи



Задача 1
Диск с растягивающей нагрузкой

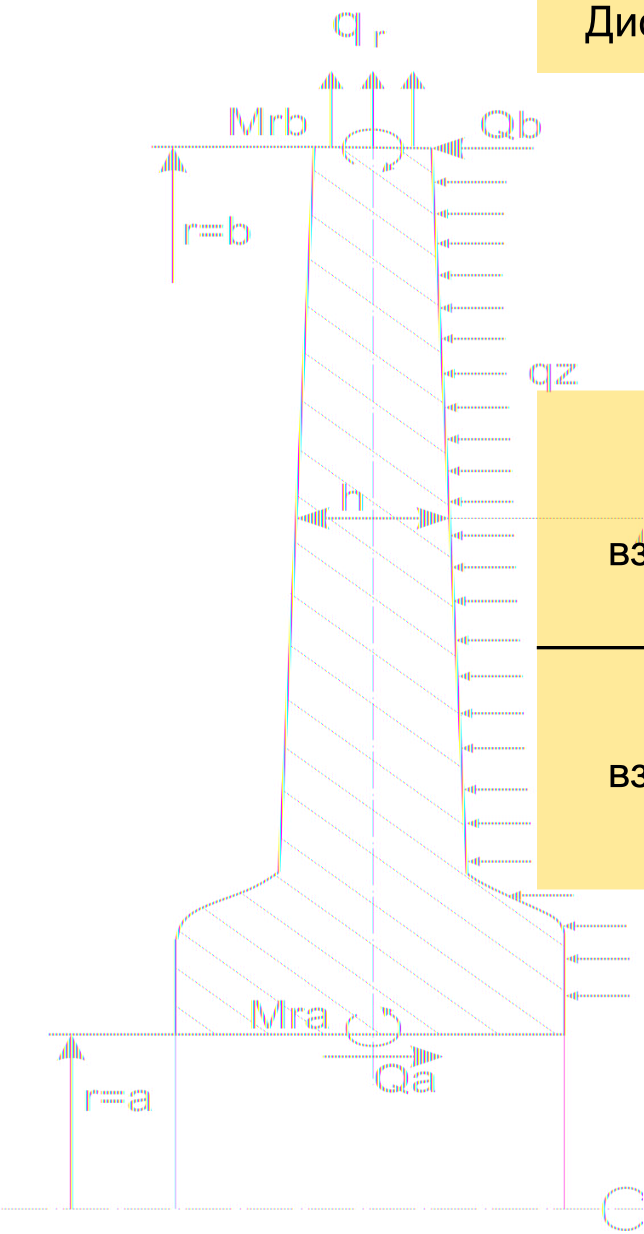
Задача 2
Диск с изгибающей нагрузкой



$$
\begin{cases}
\dfrac{d\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{r}} = -\dfrac{\mu}{r}\boldsymbol{u} + \dfrac{1-\mu^2}{E\,r}\dfrac{1}{h}\boldsymbol{Q} + \alpha(1+\mu)T; \\
\dfrac{d\boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{r}} = \dfrac{E}{r}h\boldsymbol{u} + \dfrac{\mu}{r}\boldsymbol{Q} + \left(-E\alpha T - \rho\omega^2 r^2\right)h.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\boldsymbol{w}}{d\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{\vartheta} \qquad \dfrac{d\boldsymbol{\vartheta}}{d\boldsymbol{r}} = -\dfrac{\mu}{r}\boldsymbol{\vartheta} - \dfrac{1}{r}\boldsymbol{M_r} + \dfrac{S_T}{D} \\
\dfrac{d\boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{r}} = -\dfrac{\boldsymbol{Q}}{r} - q_z \\
\dfrac{d\boldsymbol{M_r}}{d\boldsymbol{r}} = \dfrac{D(\mu^2-1)}{r^2}\boldsymbol{\vartheta} + \boldsymbol{Q} + \dfrac{\mu-1}{r}\boldsymbol{M_r} - \dfrac{S_T(\mu-1)}{r}
\end{cases}
$$

Постановка задачи



Диск с изгибающими и растягивающими нагрузками

Задача 3

Диск без учета взаимного влияния нагрузок

$$
\begin{cases}
\dfrac{du}{dr} = -\dfrac{\mu}{r}u + \dfrac{1-\mu^2}{Er}\dfrac{1}{h}Q + \alpha(1+\mu)T; \\
\dfrac{dQ}{dr} = \dfrac{E}{r}hu + \dfrac{\mu}{r}Q + \left(-E\alpha T - \rho\omega^2 r^2\right)h. \\
\dfrac{dw}{dr} = -\vartheta \qquad \dfrac{d\vartheta}{dr} = -\dfrac{\mu}{r}\vartheta - \dfrac{1}{r}M_r + \dfrac{S_T}{D} \\
\dfrac{dN}{dr} = -\dfrac{N}{r} - q_z \\
\dfrac{dM_r}{dr} = \dfrac{D(\mu^2-1)}{r^2}\vartheta + Q + \dfrac{\mu-1}{r}M_r - \dfrac{S_T(\mu-1)}{r}
\end{cases}
$$

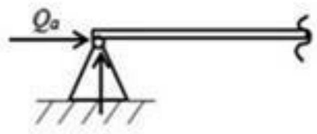
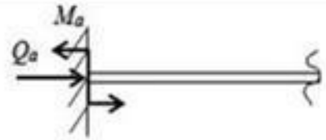
Задача 4

Диск с учетом взаимного влияния нагрузок

$$
\begin{cases}
\dfrac{dw}{dr} = \vartheta \qquad \dfrac{d\vartheta}{dr} = -\dfrac{\mu}{r}\vartheta - \dfrac{1}{D}M_s + T_2(1+\mu) \\
\dfrac{du}{dr} = -\dfrac{\mu}{r}u + \dfrac{1}{A}N_s + T_1(1+\mu) \\
\dfrac{dM_s}{dr} = -\dfrac{D(1-\mu)}{r^2}\vartheta + Q - \dfrac{1-\mu}{r}M_s - m_s + \dfrac{D(1-\mu^2)T_2}{r} \\
\dfrac{dN_s}{dr} = \dfrac{A}{r^2}\dfrac{1-\mu^2}{1+\varphi^2}u - \dfrac{1-\mu}{r(1+\varphi^2)}N_s - \dfrac{A}{r}\dfrac{1-\mu^2}{1+\varphi^2}T_1 - \dfrac{q_r + q_z\varphi}{1+\varphi^2} \\
\dfrac{dQ}{dr} = -\dfrac{\varphi}{1+\varphi^2}\dfrac{A(1-\mu^2)}{r^2}u - \dfrac{1}{r}Q - \dfrac{\varphi}{1+\varphi^2}\dfrac{\mu}{r}N_s + F
\end{cases}
$$

$$F = F(\varphi,\mu,T) = \frac{\varphi}{1+\varphi^2}\frac{T_1A(1-\mu^2)}{r} + \frac{q_r\varphi - q_z}{1+\varphi^2}$$

Постановка задачи

R=A		Свободный край	Свободно опертая пластина	Жестко защемленный край
				
	w	w_a	0	0
	ϑ	ϑ_a	ϑ_a	0
	u	u_a	u_a	0
	Q	0	$Q_a \cdot a$	$Q_a \cdot a$
	M_s	0	0	M_{sa}
	N_s	0	0	N_{sa}
R=B		Свободный край	Свободно опертая пластина	Жестко защемленный край
				
	w	w_b	0	0
	ϑ	ϑ_b	ϑ_b	0
	u	u_b	u_b	0
	Q	0	$Q_b \cdot B$	$Q_b \cdot B$
	M_s	0	0	M_{sb}
	N_s	0	0	N_{sb}

Граничные условия общего вида

Метод чувствительности на примере задачи оптимизации вращающегося диска

Исходная задача:

$$[J]\{X\} - \{C\} = 0$$

$$\Phi_1[h, X] = \int_a^b f_1(r, X_i, h)\,dr = 0$$

Вариация толщины:

$$h_1(r)$$

$$h_2(r) = h_1(r) + v(r)$$

$$\delta F[v] = 2\pi \int_a^b \rho\, r\, v\, dr = \int_a^b w v\, dr$$

$$w = 2\pi\rho\, r$$

Уравнение в вариациях:

$$[J]\{\delta X\} + \left\{\frac{\partial f_i}{\partial h}\right\}\delta h = 0,$$

$$i = 1 \ldots N$$

$$\left\{\frac{\partial f_i}{\partial h}\right\} = \frac{\partial}{\partial h}[J]\{X\} - \frac{\partial}{\partial h}\{C\}$$

Сопряженная задача:

$$[J]^*\{\psi\} = -\left\{\frac{\partial \Phi_1}{\partial X_i}\right\}$$

$$\delta F_1[v] = \int_a^b w_1(r)\, v(r)\, dr$$

$$w_1(r) = \left\{\frac{\partial f_1}{\partial h}, \ldots, \frac{\partial f_N}{\partial h}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial h}\right\}\{\psi_1, \ldots, \psi_N, 1\}^T$$

Метод чувствительности на примере задачи оптимизации вращающегося диска

Задача нахождения минимума линейного функционала:

$$F[h_1]+\delta F[v]=2\pi\int_a^b \rho h_1(r)rdr+\int_a^b w(r)v(r)dr=C+\int_a^b w(r)v(r)dr\to\min,$$

$$F_1[h_1]+\int_a^b w_1(r)v(r)dr=0,$$

$$\int_a^b (v(r))^2 dr-\varepsilon^2=0,$$

$$v(r)=\frac{1}{\gamma}\left(-w+\frac{\int_a^b w w_1 dr}{\int_a^b w_1^2 dr}w_1\right)-\frac{F_1}{\int_a^b w_1^2 dr}w_1$$

Блок-схема алгоритма

Инициализация переменных, ввод входных данных

Решение краевой задачи

$$[J]\{X\}=\{C\}$$

Решение сопряжённой краевой задачи

$$[J]^{*}\{\psi\}=-\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial X_i}\right\}$$

Расчёт градиента

$$w_1(r)=\left\{\frac{\partial f_1}{\partial h},\ldots,\frac{\partial f_N}{\partial h},\frac{\partial \Phi}{\partial h}\right\}\{\psi_1,\ldots,\psi_N,1\}^T$$

Проверка выполнения ограничений

$$\sigma_i(r)\le[\sigma]$$

Условия выполняются

$$S=0$$

Условия не выполняются

$$S\neq 0$$

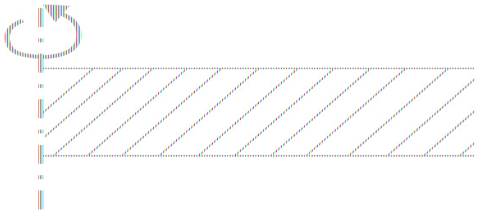
Пересчёт толщин

$$v(r)=S\left(-w+\frac{\int_a^b w\,w_1dr}{\int_a^b w_1^2dr}w_1\right)-\frac{F_1}{\int_a^b w_1^2dr}w_1$$

Проверка сходимости алгоритма

Конец

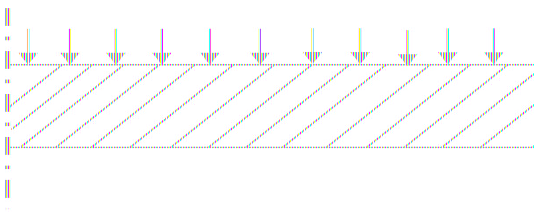
Проверка алгоритма



Вращающийся диск

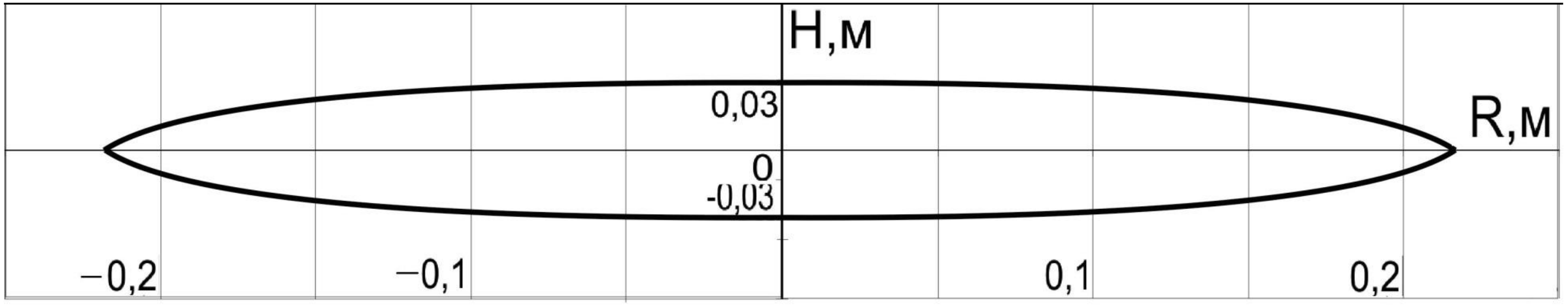
$$h(r) = h_c e^{\frac{\rho\omega^2}{2\sigma}(c^2 - r^2)}$$

Погрешность: 1.5%
Кол-во управляющих параметров: 100
Время счета: 2 сек.
Кол-во итераций: 89

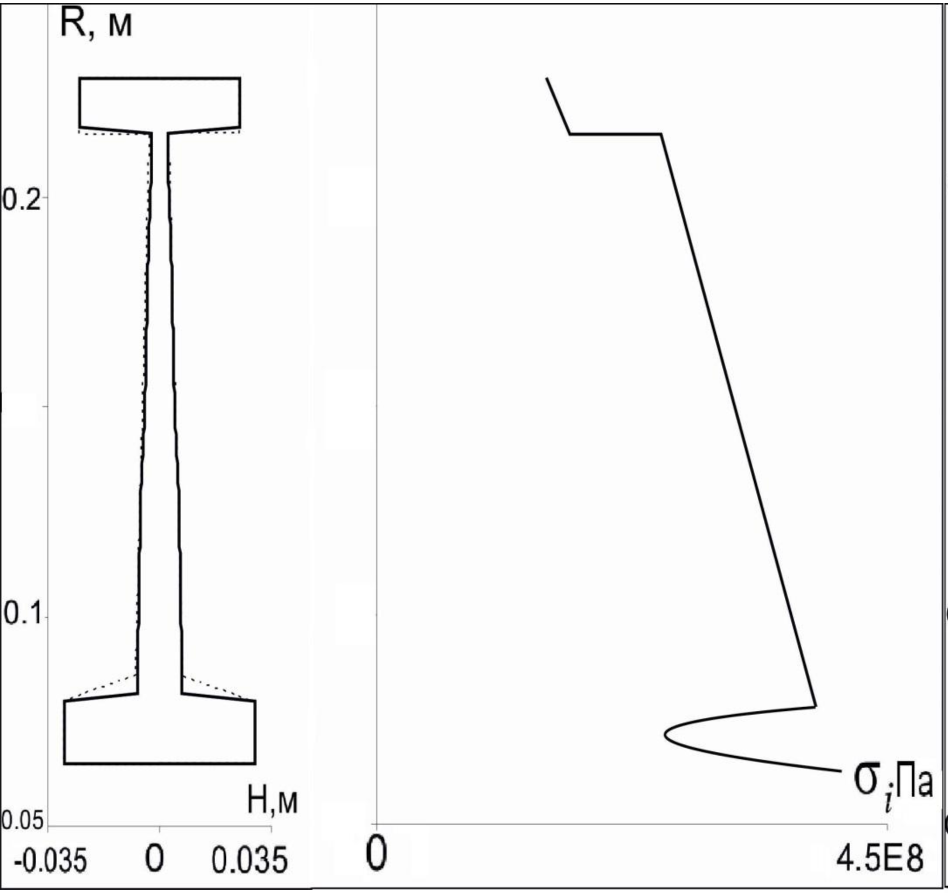


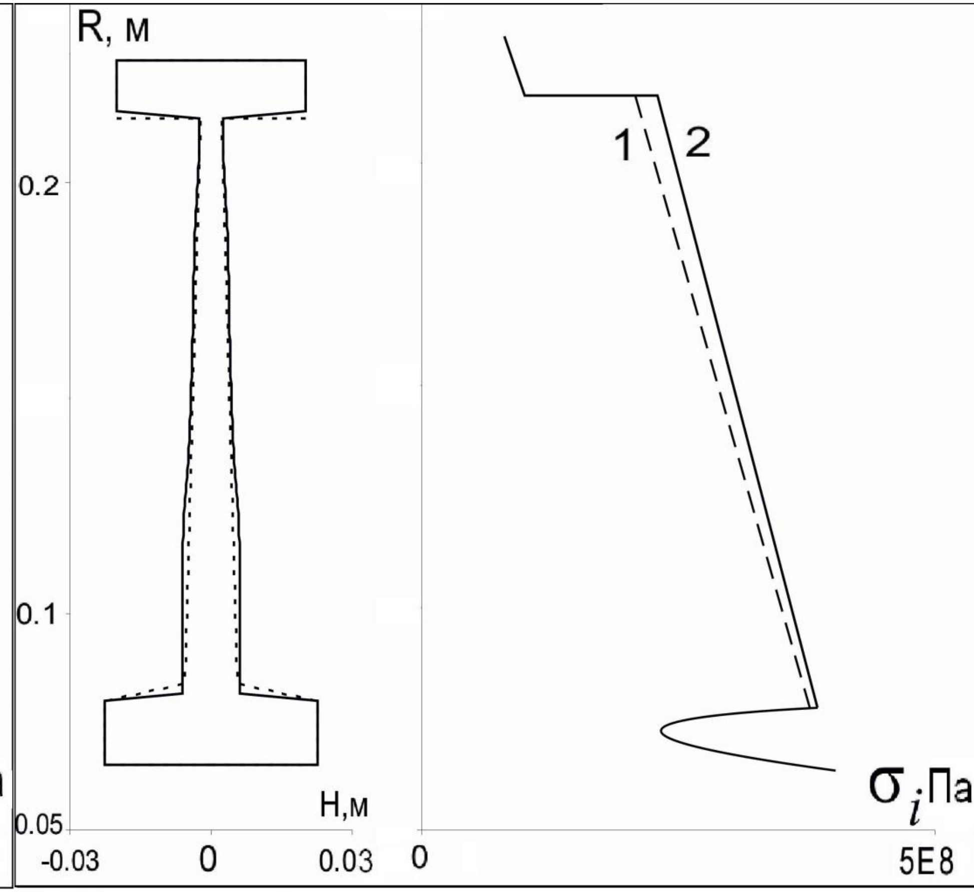
Пластинка под тяжестью собственного веса

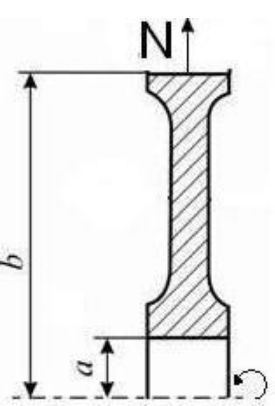
Кол-во упр. параметров: 300
Время счета: 7 сек.
Кол-во итераций: 310



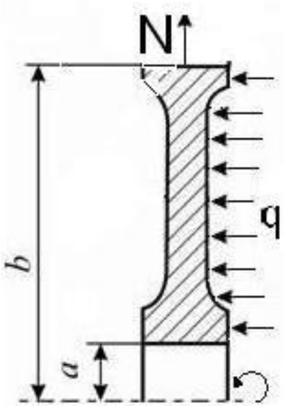
Проверка алгоритма





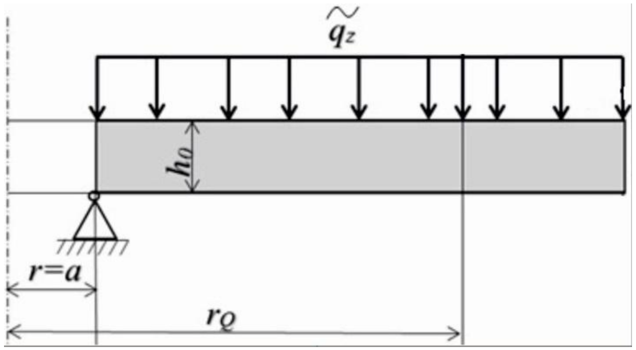


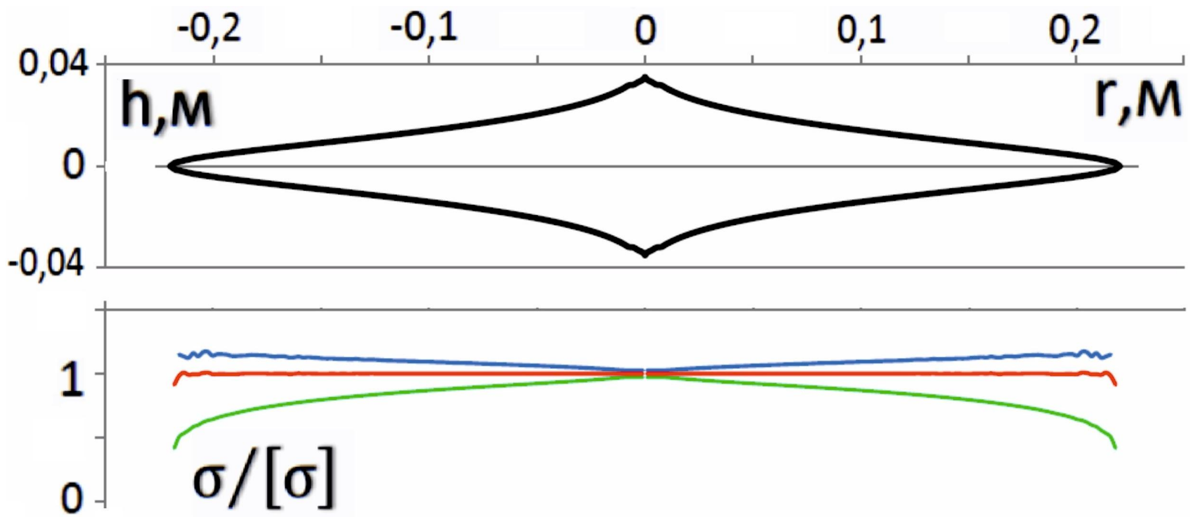
Макс погрешность: 7%
Кол-во упр. параметров:300
Время счета: 7 сек.
Кол-во итераций: 489



Макс погрешность: 7%
Кол-во упр. параметров: 300
Время счета: 7 сек.
Кол-во итераций: 437

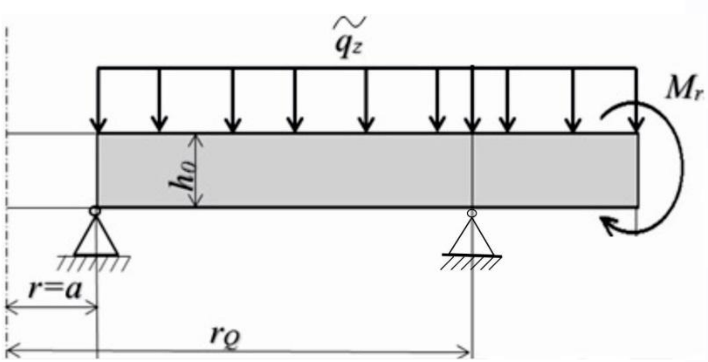
Результаты расчетов

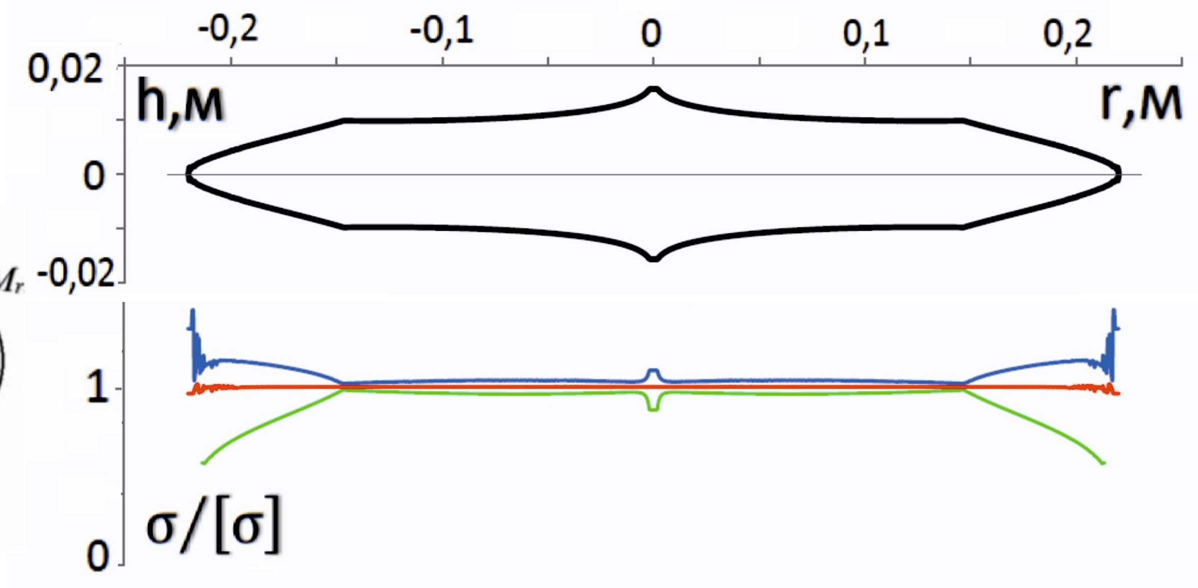




Кол-во упр. параметров -600
Время счета – 10 сек.

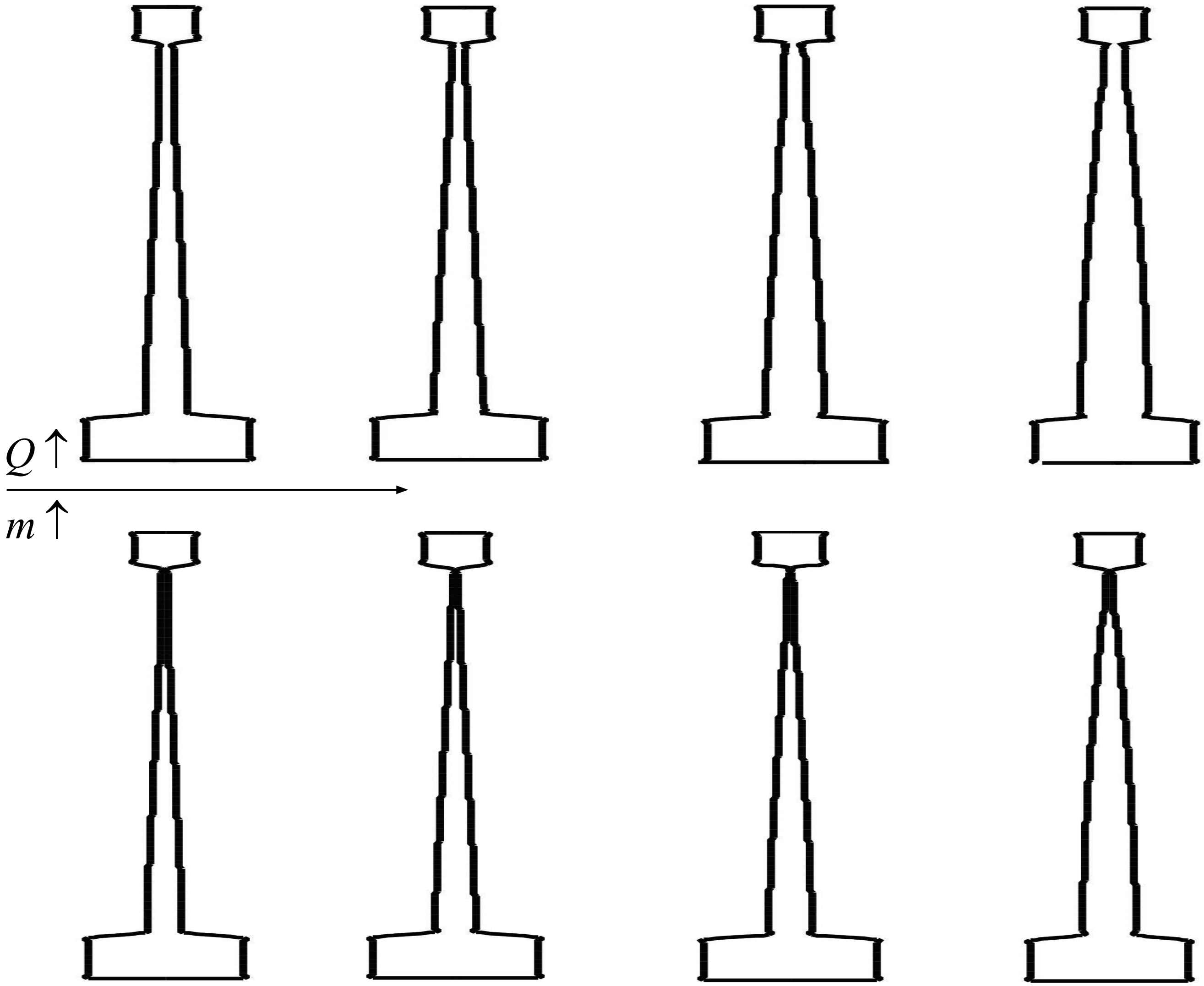
радиальные напряжения
эквивалентные напряжения
окружные напряжения





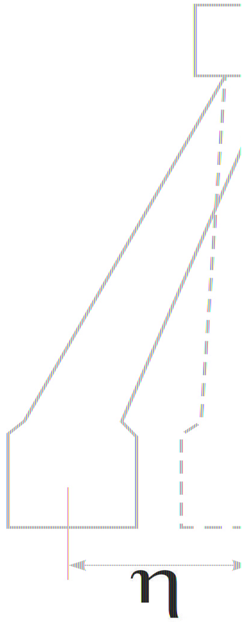
Результаты расчетов

$Q = 7 \cdot 10^9 H$	$Q = 9 \cdot 10^9 H$	$Q = 11 \cdot 10^9 H$	$Q = 14 \cdot 10^9 H$
m=11.3 кг	m=12.1кг	m=12.9кг	m=14.0кг



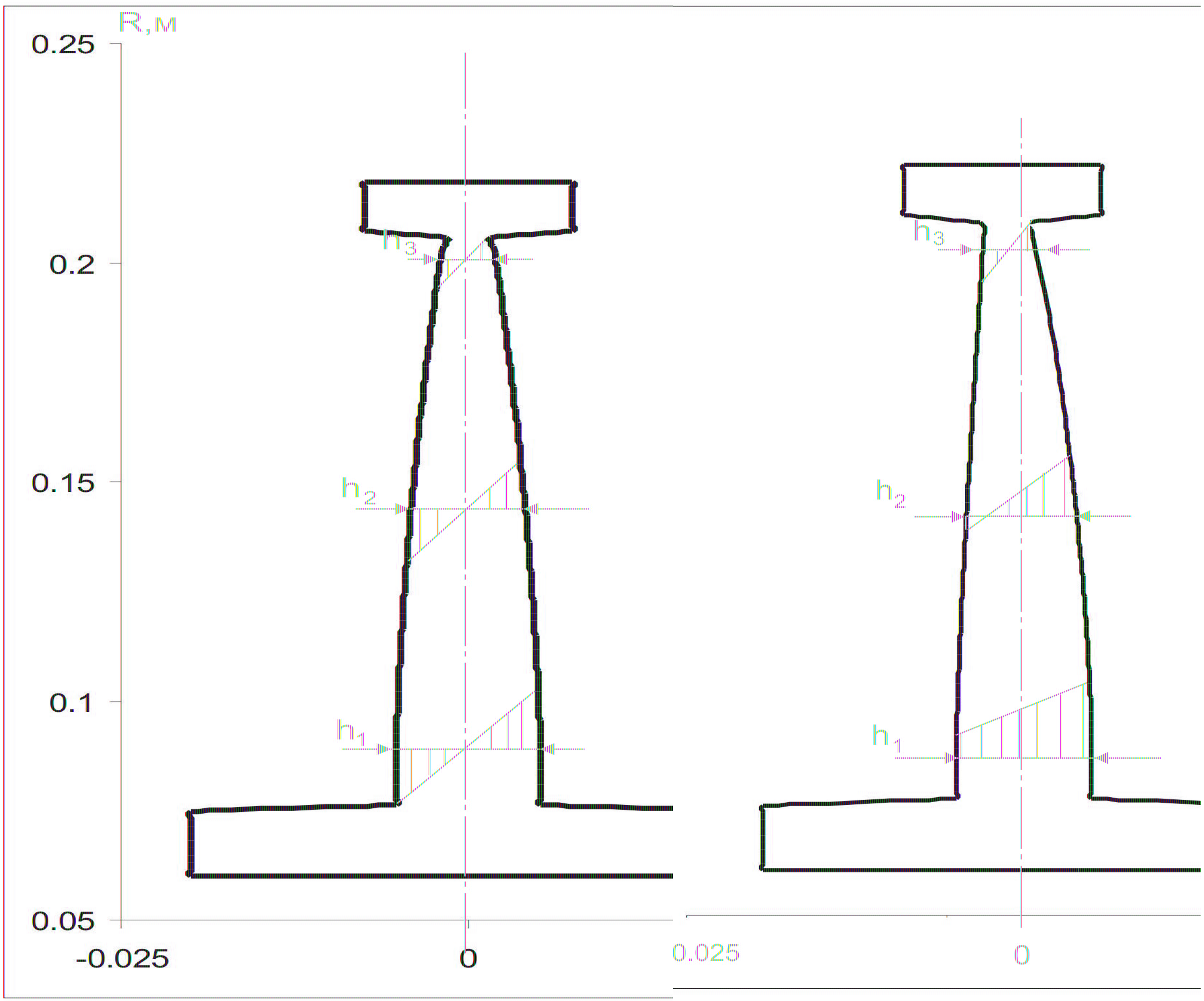
m=9.5 кг	m=10.3кг	m=10.9кг	m=11.9кг

Без выносов



С выносами

Результаты расчетов



$\omega = 1710\ \frac{рад}{с}$

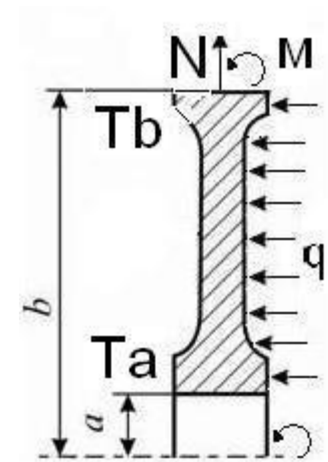
$q = 7\cdot 10^9$ Па

$M(b) = 20$

$N = 7{,}08\cdot 10^5$

$T(a) = 550K$

$T(b) = 730K$

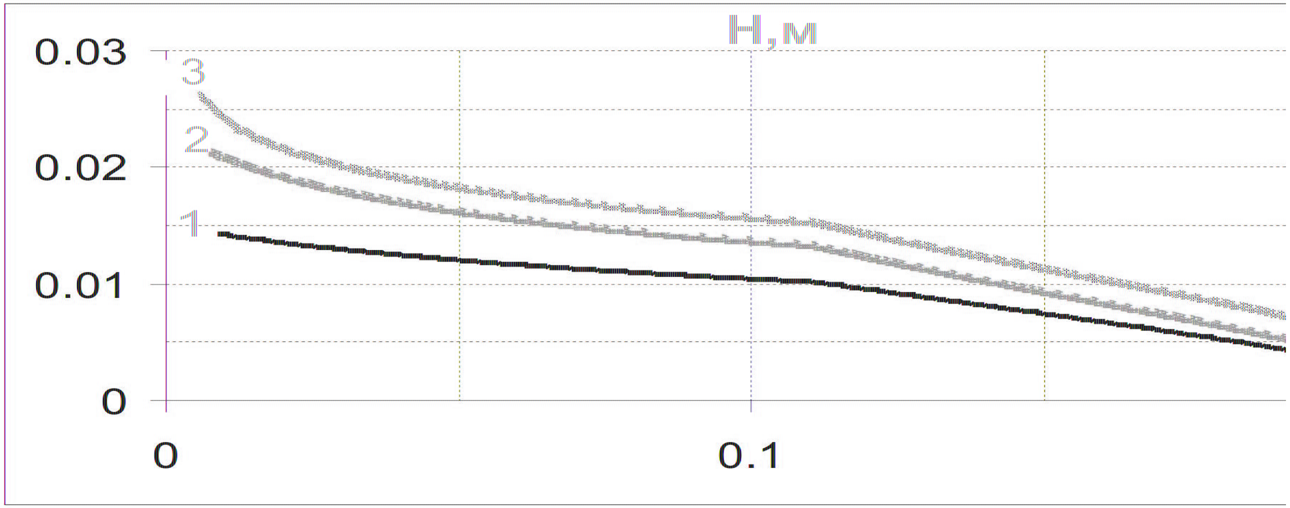


$n_e = 20.8$

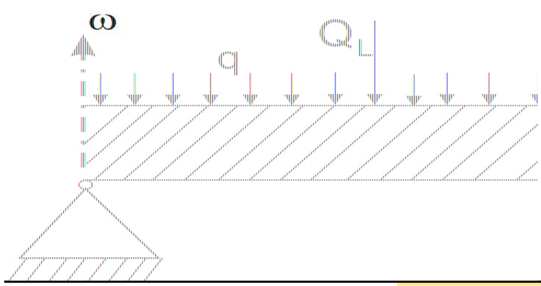
$n_e = 17.6$

Результаты расчетов

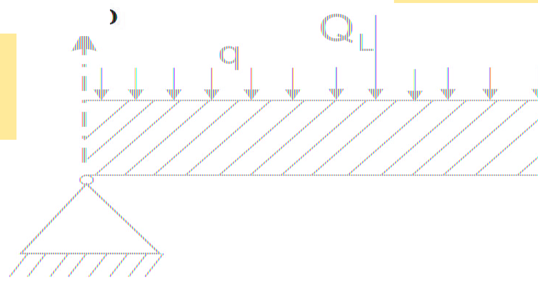
Восстанавливающий эффект центробежных сил



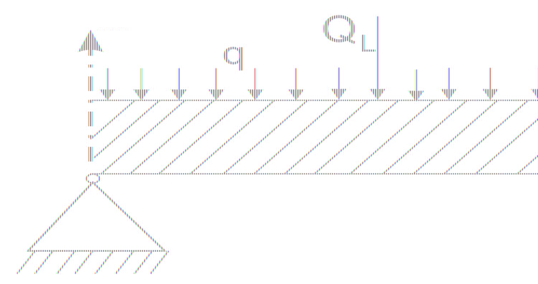
1



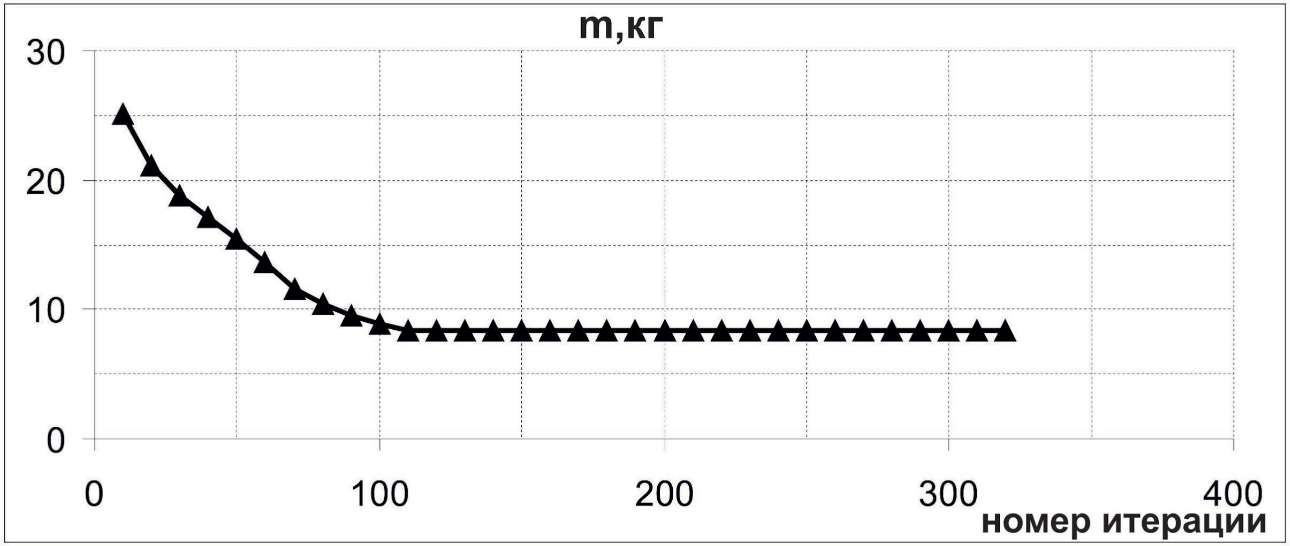
2



3



Изменение массы в процессе оптимизации



Итоги

- Создана математическая модель расчета напряженно деформированного состояния круглой пластинки переменной толщины с различными комбинациями растягивающих и изгибающих нагрузок

- Решена задача оптимизации формы круглой пластинки с изгибающими и растягивающими нагрузками методом проекции градиента.

- Реализован алгоритм метода проекции градиента, метода конечных элементов и метода конечных разностей.

- Решена задача оптимизации формы круглой пластинки методом проекции градиента с введением дополнительных ограничений на максимальную (или минимальную) ширину пластинки и с введением двух параметров управления (толщина пластинки и угол подъема).

- В ходе выполнения работы написаны программы метода чувствительности для оптимизации пластинки для четырех задач.

Спасибо за внимание!