

Интерполяционный многочлен Лагранжа

$$A = \pi r^2$$

+

≠

$$\frac{2}{3}(12) = 50\% \text{ of } 16$$

$$2 \times 5 + 9 \div 3 < 6 + 7^2 - 19$$

%

÷

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\sqrt{16} = 4$$

∞

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\sqrt[4]{64} = \pm 4$$

∞

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

%

$$\sqrt{16} = 4$$

÷

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$A = \pi r^2$$

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4$$

≠

$$\frac{2}{3}(12) = 50\% \text{ of } 16$$

$$2 \times 5 + 9 \div 3 < 6 + 7^2 - 19$$

- **Интерполяция** – (в математике и статике) это способ вычислить промежуточное значение функции по нескольким уже известным ее значениям



Интерполяционным многочленом Лагранжа называется многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}.$$

Этот многочлен удовлетворяет условиям $P_n(x_k) = y_k, k = 0, 1, 2, \dots, n$, где x_k —
Узлы (или полюсы) интерполяции, y_k — заданные числа.



Интерполяционной формулой Лагранжа называется формула

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}.$$



Первая интерполяционная формула Ньютона

$$P_n(X) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! \cdot h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! \cdot h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! \cdot h^n} (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}),$$

- Этот многочлен называют **интерполяционным полиномом Ньютона** для интерполяции в начале таблицы (интерполирование «вперед») или *первым полиномом Ньютона*.

Первая интерполяционная формула Ньютона

Первая интерполяционная формула Ньютона может быть записана в более компактном и удобном для программной реализации виде.

Обозначив

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \quad x = x_0 + qh$$

и проведя несложные преобразования вида:

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = q - 1; \quad \frac{x - x_2}{h} = q - 2; \dots; \quad \frac{x - x_n}{h} = q - n + 1,$$

получим первую интерполяционную формулу Ньютона, выраженную относительно неизвестной q :

$$P_n(x) = P_n(x_0 + hq) = y_0 + \Delta y_0 q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} q(q-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q-1)\dots(q-n+1).$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона

- *Второй* интерполяционный полином Ньютона применяется для нахождения значений функций в точках, расположенных в *конце интервала интерполирования*.
- Запишем интерполяционный многочлен в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots \quad (1) \\ \dots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1).$$

Пример 1. Найти интерполяционный многочлен Лагранжа, который в точках $x_0 = -3, x_1 = -1, x_2 = 2$ принимает соответственно значения $y_0 = -5, y_1 = -11, y_2 = 10$.

При $n = 2$ Формула

вид
$$P_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

$$P_2(x) = -5 \frac{(x+1)(x-2)}{(-3+1)(-3-2)} - 11 \frac{(x+3)(x-2)}{(-1+3)(-1-2)} + 10 \frac{(x+3)(x+1)}{(2+3)(2+1)},$$

$$P_2(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - x - 2) + \frac{11}{6}(x^2 + x - 6) + \frac{2}{3}(x^2 + 4x + 3) =$$

$$= \frac{1}{6}[-3(x^2 - x - 2) + 11(x^2 + x - 6) + 4(x^2 + 4x + 3)] = \frac{1}{6}(12x^2 + 30x - 4)$$

НАХОДИМ

$$P_2(x) = 2x^2 + 5x - 8.$$

Пример 2. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции, заданной таблично

X	1	2	3	5
Y	1	5	14	81

Решение.

$$\begin{aligned} L_3(x) &= 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-5)} + 5 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-5)} + \\ &+ 14 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-5)} + 81 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(5-1)(5-2)(5-3)} = \\ &= x^3 - 2x^2 + 3x - 1. \end{aligned}$$