Интерполяционный многочлен Лагранжа

- **Интерполяция** – (в математике и статике) это способ вычислить промежуточное значение функции по нескольким уже известным ее значениям

Интерполяционным многочленом Лагранжа называется многочлен

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}.$$

Этот многочлен удовлетворяет условиям $P_n(x_k)=y_k, \quad k=0,1,2,\ldots,n,$ Где x_k — Узлы (или полюсы) интерполяции, y_k — заданные числа.

Интерполяционной формулой Лагранжа называется формула

$$f(x)\approx\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}.$$

Первая интерполяционная формула Ньютона

$$P_n(X) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! \cdot h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! \cdot h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n! \cdot h^n}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}),$$

- Этот многочлен называют **интерполяционным полиномом Ньютона** для интерполяции в начале таблицы (интерполирование «вперед») или ***первым*** *полиномом Ньютона.*

Первая интерполяционная формула Ньютона

Первая интерполяционная формула Ньютона может быть записана в более компактном и удобном для программной реализации виде.

Обозначив

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \qquad x = x_0 + qh$$

и проведя несложные преобразования вида:

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = q - 1; \qquad \frac{x - x_2}{h} = q - 2; \ldots; \frac{x - x_n}{h} = q - n + 1,$$

получим первую интерполяционную формулу Ньютона, выраженную относительно неизвестной **q**:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + hq) = y_0 + \Delta y_0 q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} q(q-1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q-1)\ldots(q-n+1).$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона

- ***Второй*** интерполяционный полином Ньютона применяется для нахождения значений функций в точках, расположенных в ***конце интервала интерполирования.***
- Запишем интерполяционный многочлен в виде:

$$P_n(x) = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1(x - x_\mathrm{n}) + \mathrm{a}_2(x - x_\mathrm{n})(x - x_{\mathrm{n}-1}) + \ldots \qquad (1)$$
$$\ldots + \mathrm{a}_\mathrm{n}(x - x_\mathrm{n})(x - x_{\mathrm{n}-1})\ldots(x - x_1).$$

Пример 1. Найти интерполяционный многочлен Лагранжа, который в точка $x_0=-3,\ x_1=-1,\ x_2=2$

Принимает соответственно значения $y_0=-5,\ y_1=-11,\ y_2=10.$

При $n=2$ Формула

$$P_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

вид

$$P_2(x)=-5\frac{(x+1)(x-2)}{(-3+1)(-3-2)}-11\frac{(x+3)(x-2)}{(-1+3)(-1-2)}+10\frac{(x+3)(x+1)}{(2+3)(2+1)},$$

$$P_2(x)=-\frac{1}{2}(x^2-x-2)+\frac{11}{6}(x^2+x-6)+\frac{2}{3}(x^2+4x+3)=$$

$$=\frac{1}{6}[-3(x^2-x-2)+11(x^2+x-6)+4(x^2+4x+3)]=\frac{1}{6}(12x^2+30x-4$$

находим

$$P_2(x)=2x^2+5x-8.$$

Пример 2. . Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции, заданной таблично

X	1	2	3	5
Y	1	5	14	81

Решение.

$$L_3(x) = 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-5)} + 5 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-5)} +$$

$$+ 14 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-5)} + 81 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(5-1)(5-2)(5-3)} =$$

$$= x^3 - 2x^2 + 3x - 1.$$