Тема 1.4. Экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой ограниченной области.

Основные вопросы темы:

- 1. Экстремум функции нескольких переменных.
- 2. Необходимые и достаточные условия.
- 3. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой ограниченной области.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой *локального максимума (минимума)* функции $z = f(x,y)$, если существует такая ε – окрестность $V_\varepsilon(M_0)$ точки $M_0(x_0, y_0)$, что для любой точки $M \in V_\varepsilon(M_0)$, $M \neq M_0$, выполняется неравенство

$$f(M_0) > f(M) \; (f(M_0) < f(M)).$$

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой *локального экстремума*, если она является либо точкой локального максимума, либо точкой локального минимума.

Приведем еще одно определение максимума и минимума функции.

Пусть $x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y,$ тогда

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta f .$$

1) Если $\Delta f < 0$ при всех достаточно малых приращениях

независимых переменных, то функция $f(x, y)$ достигает *максимума* в точке $M(x_0, y_0)$.

2) Если $\Delta f > 0$ при всех достаточно малых приращениях независимых переменных, то функция $f(x, y)$ достигает *минимума* в точке $M(x_0, y_0)$.

Эти формулировки переносятся без изменения на функции любого числа переменных.

Теорема 1. (Необходимое условие экстремума). Если $M_0(x_0, y_0)$ - точка локального экстремума функции $f(x, y)$, имеющей в этой точке непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, то $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0.$

Эта теорема не является достаточной для исследования вопроса об экстремальных значениях функции, но позволяет находить эти значения в тех случаях, в которых мы заранее уверены в существовании максимума или минимума. Например, функция $z = x^2 - y^2$ имеет производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$, которые обращаются в нуль при $x = 0, y = 0$. Но эта функция при указанных значениях не имеет ни максимума, ни минимума. Действительно, эта функция равна нулю в начале координат и принимает в как угодно близких точках от начала координат как положительные, так и отрицательные значения.

Точки, в которых $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ (или хотя бы одна из них не существует), называются *критическими* точками функции $z=f(x,y)$.

Точки, в которых все частные производные первого порядка равны нулю, называются *стационарными точками.*

Для исследования функции в критических точках установим достаточные условия экстремума функции двух переменных.

Теорема 2. (Достаточные условия экстремума). Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$, функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно, пусть, кроме того, точка $M_0(x_0, y_0)$- стационарная, то есть $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0.$

Обозначим $A = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}, C = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}, B = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}$ и $D = AC - B^2$.

Тогда:

1) если $D > 0,\ A > 0\ (C > 0)$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет минимум;
2) если $D > 0,\ A < 0\ (C < 0)$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет максимум;
3) если $D < 0$, то экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$ нет;
4) если $D = 0$, то экстремум в этой точке может быть и может не быть (требуется дальнейшее исследование).

Пример 1. Найти локальные экстремумы функции

$f(x,y)=3xy-(x^3+y^3)$ в области $D=\{(x,y)\mid x>0, y>0\}$.

Решение. Найдем $\frac{\partial f}{\partial x}=3y-3x^2, \frac{\partial f}{\partial y}=3x-3y^2$. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=3y-3x^2=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=3x-3y^2=0, \end{cases}$$

получим стационарную точку $M_0(1,1)$, то есть $x=1, y=1$. В этой точке выполнены необходимые условия экстремума. Найдем вторые частные производные

$$A=\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}=-6x\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=-6,\ C=\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}=-6y\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=-6,\ B=\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x\partial y}=3.$$

Вычислим $D=AC-B^2=(-6)(-6)-3^2>0$. Так как $D>0, A<0$, то точка $M_0(1,1)$ является точкой локального максимума.

Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

Рассмотрим функцию

$$u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots x_m) \qquad (1)$$

при условии, что ее аргументы являются не независимыми переменными, а связаны между собой k соотношениями $(k < m)$:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \qquad (2)$$

Эти соотношения называются *условиями связи*. Пусть координаты точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ удовлетворяют уравнениям (2).

Определение. Функция (1) имеет в точке M_0 *условный минимум (максимум)* при условиях связи (2), если существует такая окрестность точки M_0, что для любой точки M ($M \neq M_0$) этой окрестности, координаты которой удовлетворяют уравнениям (2), выполняется неравенство

$$f(M) > f(M_0) \; (f(M) < f(M_0)).$$

Иными словами, условный максимум (минимум)- это наибольшее (наименьшее) значение функции в точке M_0 по отношению не ко всем точкам из некоторой окрестности точки M_0, а только к тем из них, которые связаны между собой условиями связи.

Задачу об условном экстремуме функции можно решать *методом исключения части переменных* или *методом Лагранжа*. Метод исключения части переменных состоит в том, что из k уравнений условий связи k переменных выражают через остальные $m-k$ переменных (если это возможно), подставляют найденные переменные в функцию $u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ и решают задачу об экстремуме функции $m-k$ переменных.

Пример 2. Методом исключения части переменных найти экстремум функции $u = x + y + z^2$ при условиях связи

$$\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases}$$

Решение. Из условий связи находим $z = x + 1,\ y = xz + 1$. Подставляя найденные z, y в функцию, приходим к функции одной переменной x : $u(x) = 2x^2 + 4x + 2$, для которой рассмотрим задачу о безусловном экстремуме. Так как $u' = 4(x+1) = 0$ при , то функция имеет единственную точку возможного экстремума. Поскольку $u''(-1) = 4 > 0$, в точке $x = -1$ функция имеет минимум. Из условий связи находим соответствующие значения z, y: $z = 0, y = 1$. Итак, функция при заданных условиях связи имеет в точке

(-1,1,0) минимум, причем $u(-1,1,0) = 0$.

Наибольшее (наименьшее) значение функции в замкнутой ограниченной области (глобальный экстремум функции нескольких переменных) .

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в ограниченной замкнутой области, то она достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или в стационарной точке или в граничной точке области. Таким образом, для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции в замкнутой области, необходимо:

1) найти стационарные точки, расположенные в данной области, вычислить значения функции в этих точках;

2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области;

3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$.

Решение. 1) Найдем стационарные точки функции из системы
$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Получаем две стационарных точки $M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$. Значения функции в этих точках $z(M_1) = 0$, $z(M_2) = -1$.

2) Исследуем функцию на границах области:

а) при $x=0$ имеем $z=y^3$. Эта функция монотонно возрастает и на концах отрезка [-1,2] принимает значения $z|_{y=-1}=-1,\ z|_{y=2}=8$;

б) при $x=2$ имеем $z=8+y^3-6y$. Найдем значения этой функции в стационарной точке и на концах отрезка [-1,2]. Имеем $z'=3y^2-6;\ z'=0$ при $y^2=2$, или в данной области, при $y=\sqrt{2};\ z|_{y=\sqrt{2}}=8-4\sqrt{2};\ z|_{y=-1}=13;\ z|_{y=-2}=4$.

в) При $y=-1$ имеем $z=x^3-1+3x$ и $z'=3x^2+3>0$. Функция монотонно возрастает от $z|_{x=0}=-1$ до $z|_{x=2}=13$.

г) При $y=2$ имеем $z=x^3+8-6x$ и $z'=3x^2-6>0;\ z'=0$

при $x=\sqrt{2};\ z|_{x=\sqrt{2}}=8-4\sqrt{2};\ z|_{x=0}=8;\ z|_{x=2}=6$.

3) Сравнивая все найденные значения функции, заключаем, что $z_{наиб}=13$ в точке (2,-1); $z_{наим}=-1$ в точках (1,1) и (0,-1).