

ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный технический  
университет» им. И.И. Ползунова

Модуль «Начертательная геометрия»

Тема **6**

(тетрадь «**6** тем»)

# ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

## Часть **2**

к.т.н., доцент Кошелева Е. А.

Барнаул  
**2018**



# содержание лекции

методы построения линии пересечения  
двух поверхностей (Часть 2)

метод сфер-посредников  
(способ вспомогательных секущих сфер)

основные термины

способ концентрических сфер

частный случай пересечения поверхностей  
(теорема Монжа)

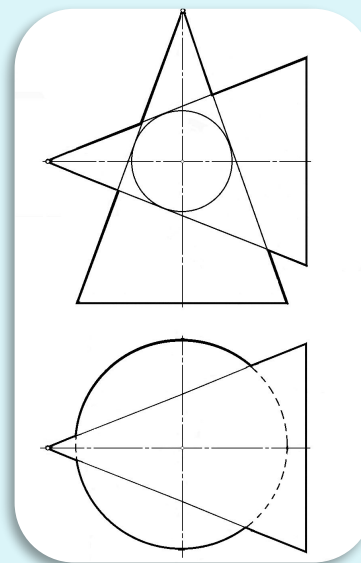
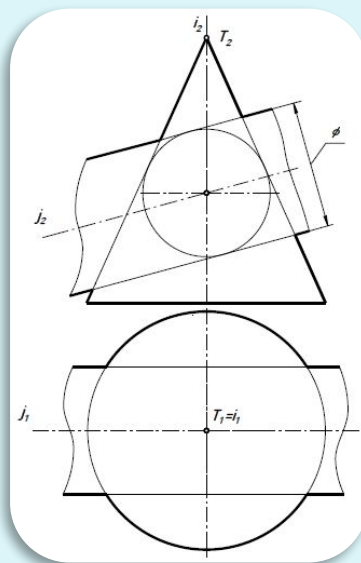
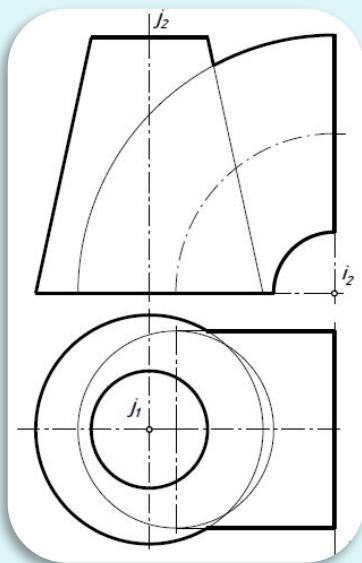
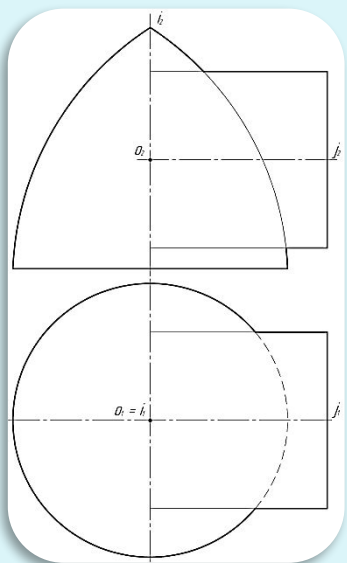
способ эксцентрических сфер

примеры решений задач из методички [2]

литература



# задачи



# содержание лекции

методы построения линии пересечения  
двух поверхностей (Часть 2)

**метод сфер-посредников  
(способ вспомогательных секущих сфер)**

**основные термины**

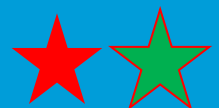
**способ концентрических сфер**

**частный случай пересечения поверхностей  
(теорема Монжа)**

**способ эксцентрических сфер**

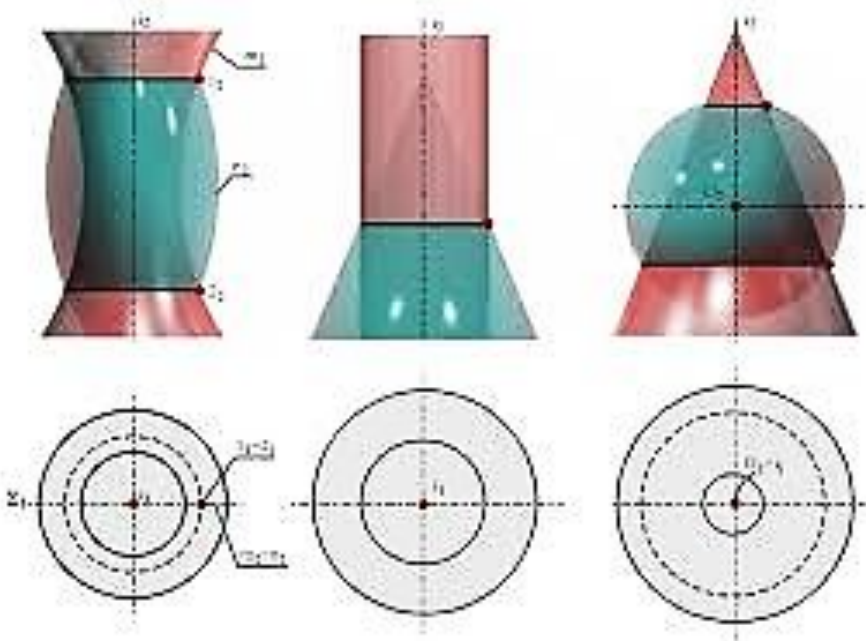
**примеры решений задач из методички [2]**

**литература**



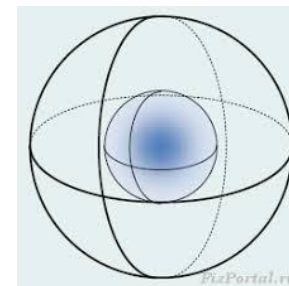
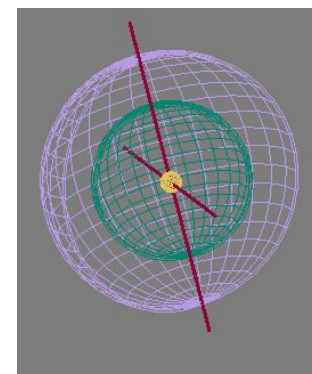
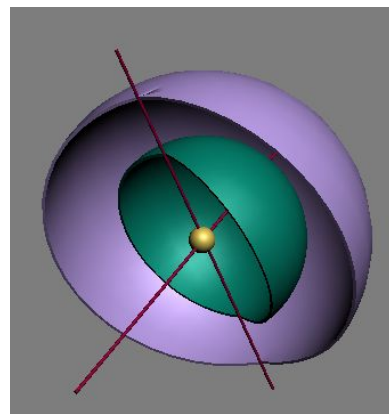
# соосные поверхности

поверхности,  
имеющие общую ось



# концентрические сферы

сферы, имеющие  
общий центр

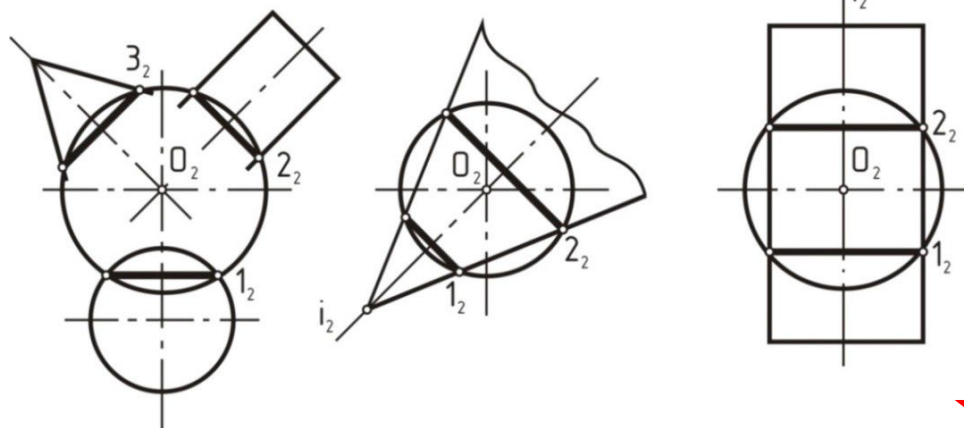
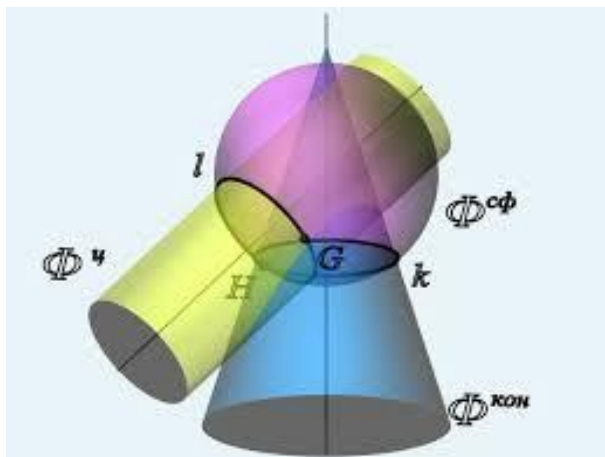


# способ вспомогательных секущих сфер

основа способа

свойство сфер пересекать  
соосные с ними поверхности вращения по окружностям

если центр сферы лежит на оси  
какой-либо поверхности вращения,  
то сфера соосна с этой поверхностью  
и пересекает ее по окружности

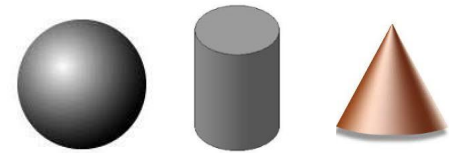


# способ вспомогательных секущих сфер

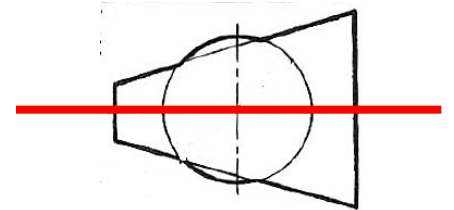
## условия выбора способа

вспомогательные секущие сферы можно применить только при одновременном выполнении:

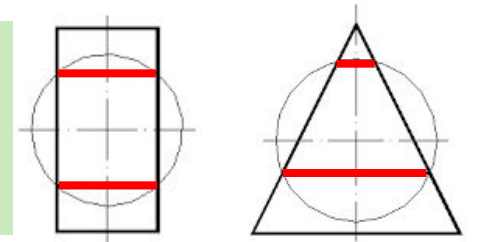
1) пересекающиеся поверхности должны быть **поверхностями вращения**



2) заданные поверхности должны иметь **общую плоскость симметрии, параллельную какой-либо плоскости проекций**



3) каждая из поверхностей должна содержать **семейство окружностей**, по которым сферы будут пересекать эти поверхности



# способ вспомогательных секущих сфер условия выбора способа

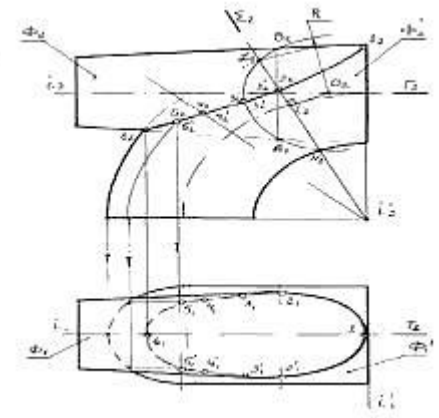
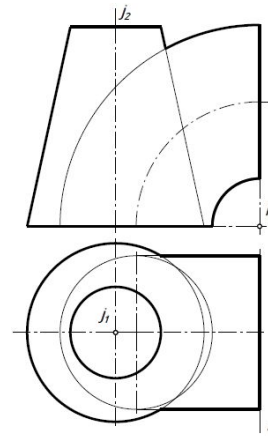
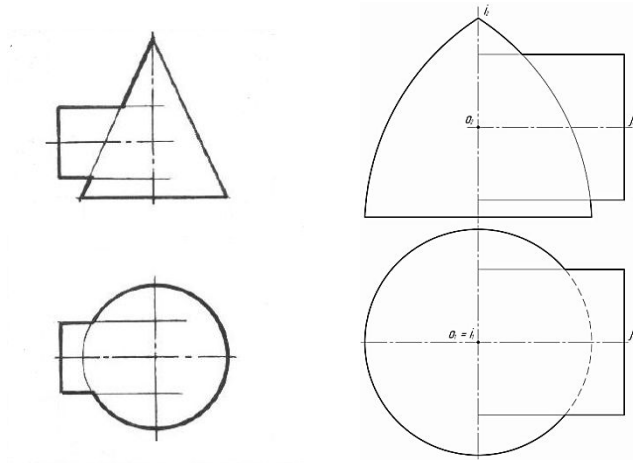
оси заданных поверхностей

пересекаются

скрещаются

способ  
концентрических сфер

способ  
эксцентрических сфер





# способ вспомогательных секущих сфер алгоритм построения

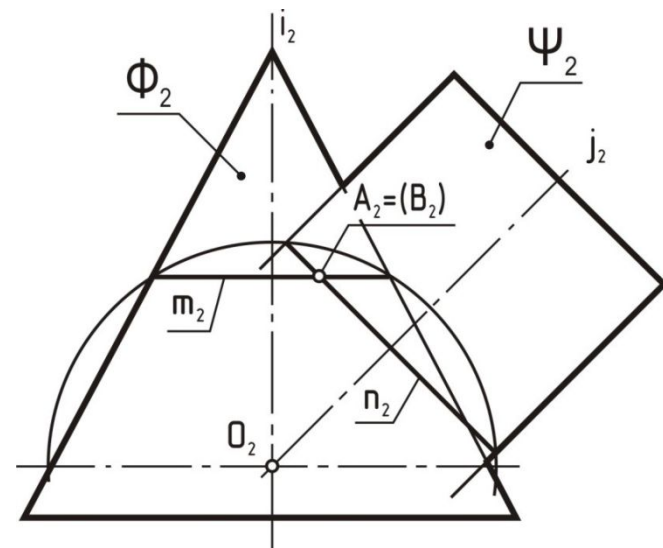
1. поверхности пересечь вспомогательной сферой с центром в точке  $O$ . центр сферы т.  $O$  совпадает с точкой пересечения осей вращения. сфера будет соосна с каждой из заданных поверхностей.
2. построить линии пересечения сферы с заданными поверхностями – это будут окружности
3. отметить точки пересечения полученных двух окружностей

точки линии пересечения  
поверхностей

повторить пп.1–3 несколько раз

соединить полученные точки  
с учетом видимости

обвести очерки поверхностей



# содержание лекции

методы построения линии пересечения  
двух поверхностей (Часть 2)

**метод сфер-посредников**  
**(способ вспомогательных секущих сфер)**

основные термины (соосные, концентрические)

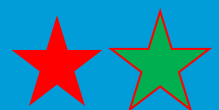
**способ концентрических сфер**

частный случай пересечения поверхностей  
(теорема Монжа)

способ эксцентрических сфер

примеры решений задач из методички [2]

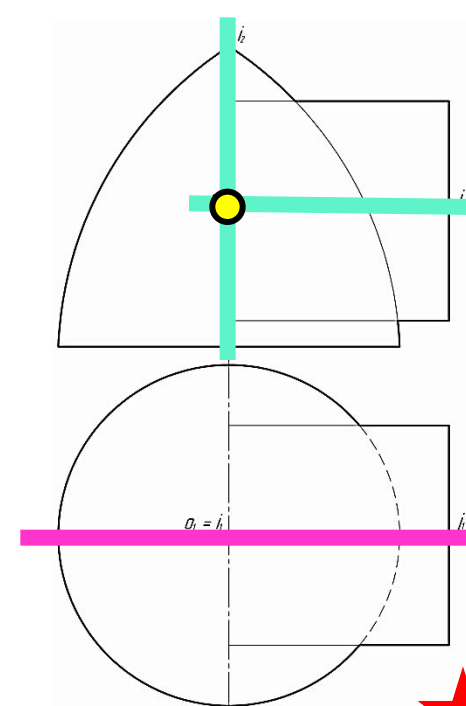
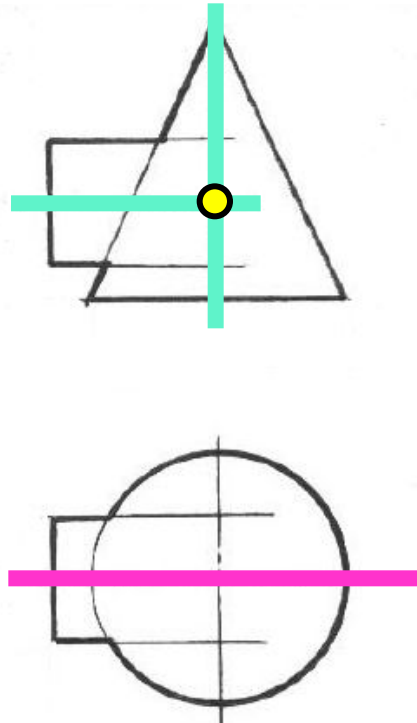
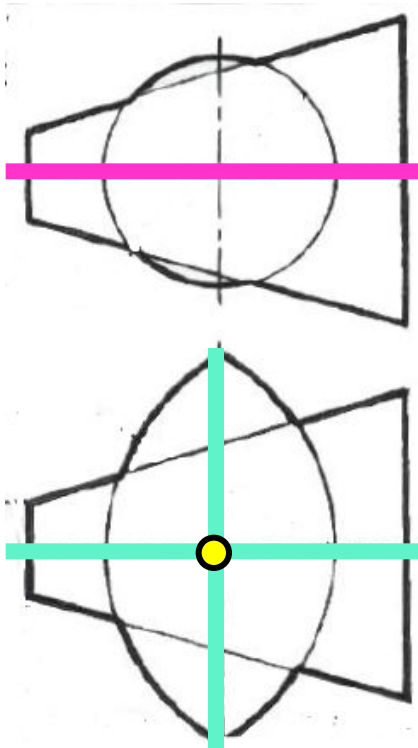
литература



# способ концентрических сфер

**применяется в случаях, когда:**

1. пересекаются поверхности вращения
2. оси вращения поверхностей пересекаются
3. пересекающиеся оси вращения образуют плоскость уровня



**построить  
проекцию линии пересечения  
двух поверхностей**

**применим ли способ  
концентрических сфер  
для решения данной задачи?**

**1. пересекаются  
поверхности вращения**

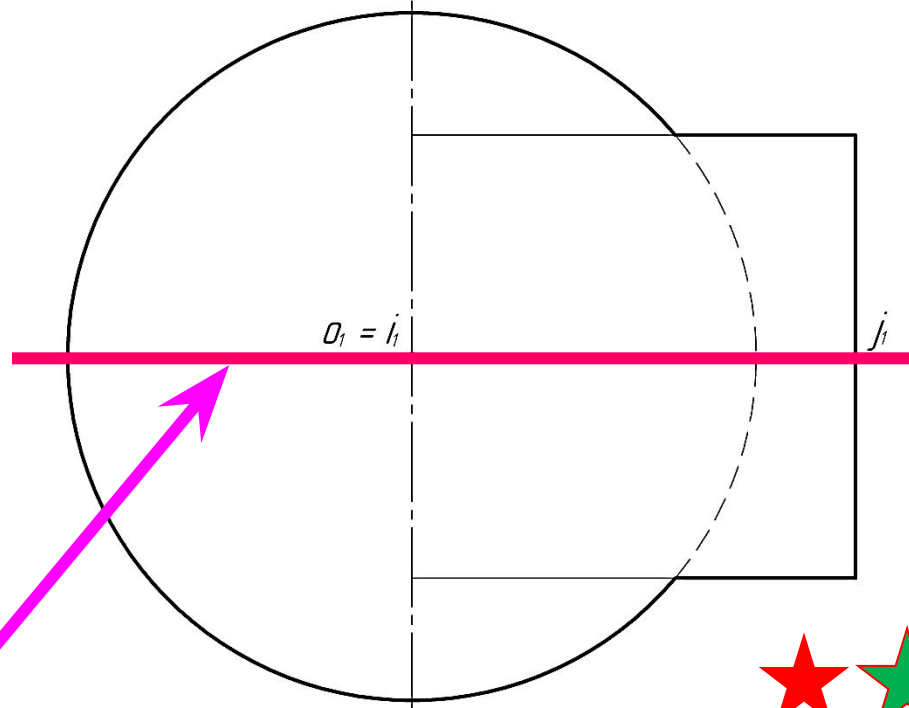
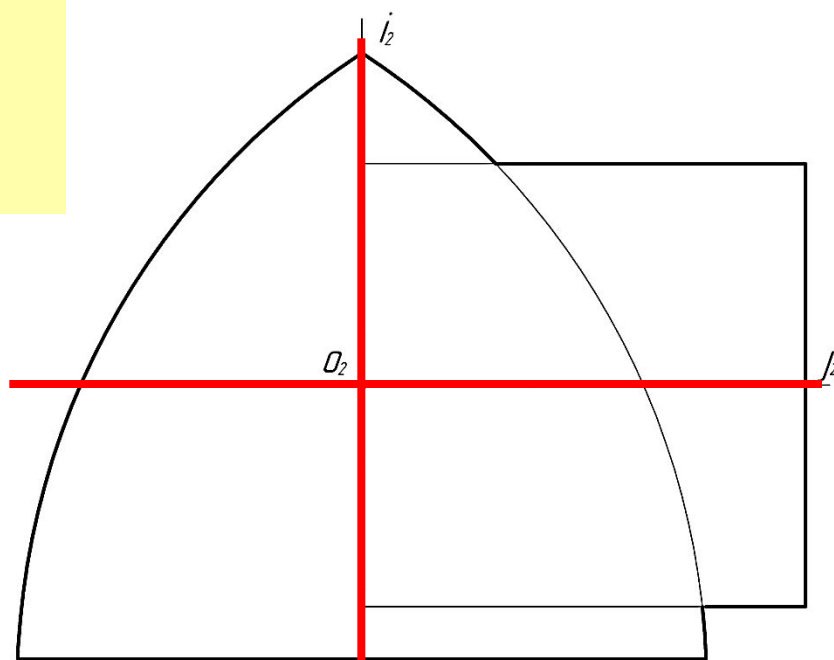
**да – тор и цилиндр**

**2. оси вращения  
поверхностей пересекаются**

**да – на  $\Pi_2$**

**3. пересекающиеся  
оси вращения образуют  
плоскость уровня**

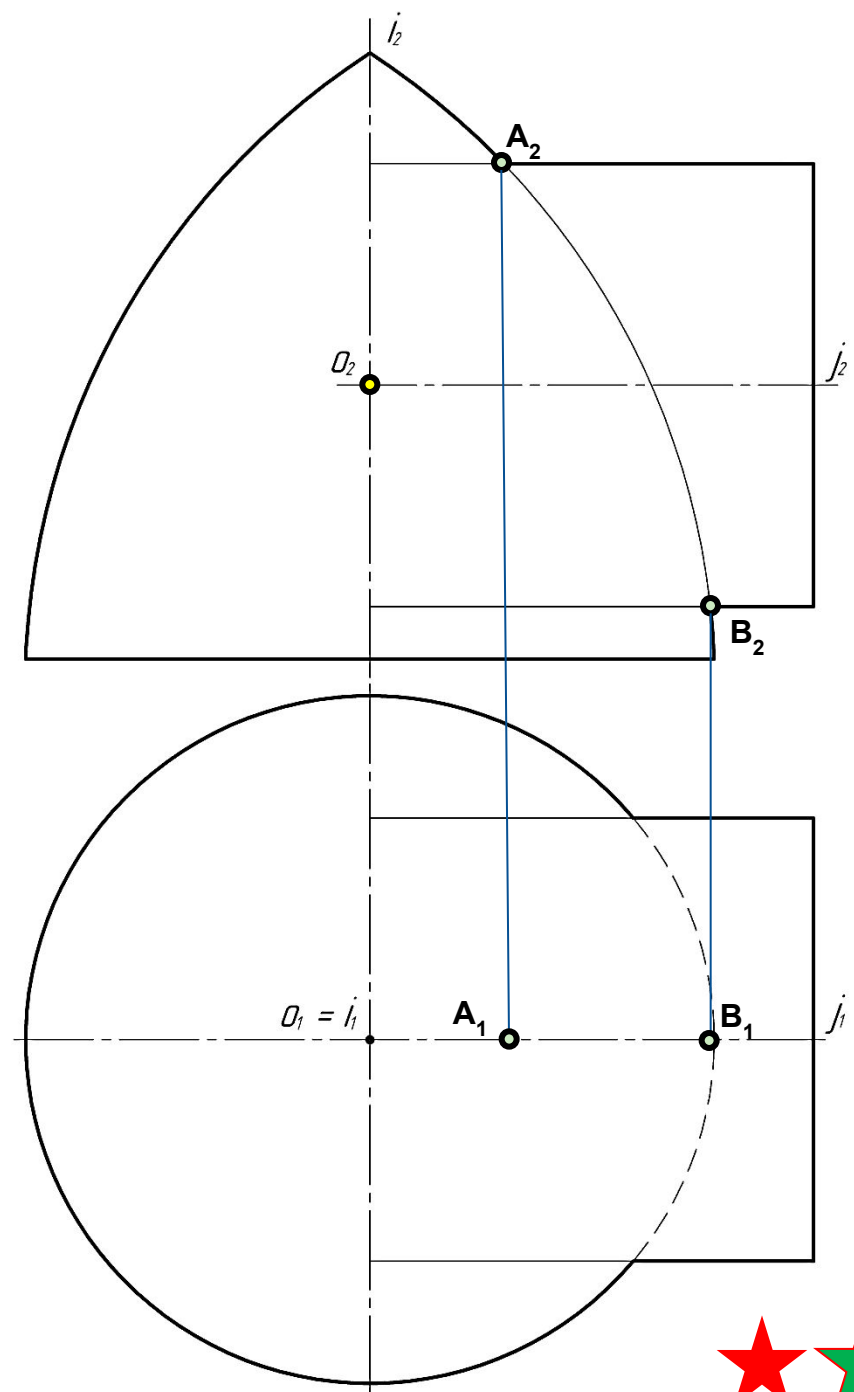
**да – параллельную  $\Pi_2$**



# СПОСОБ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

## алгоритм решения

- 1. O** - точка центров  
концентрических  
сфер-посредников  
(точка пересечения осей  
вращения поверхностей)
- 2.** точки пересечения очерков  
поверхностей на  $\Pi_2$   
и их проекции на  $\Pi_1$   
(точки A, B)



# СПОСОБ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

## алгоритм решения

### 3. определение радиусов минимальной и максимальной сфер-посредников

**Rmax** – радиус максимальной  
сферы-посредника



**Rmax** = расстоянию  
от центра сфер  
до наиболее удаленной  
из точек пересечения очерков

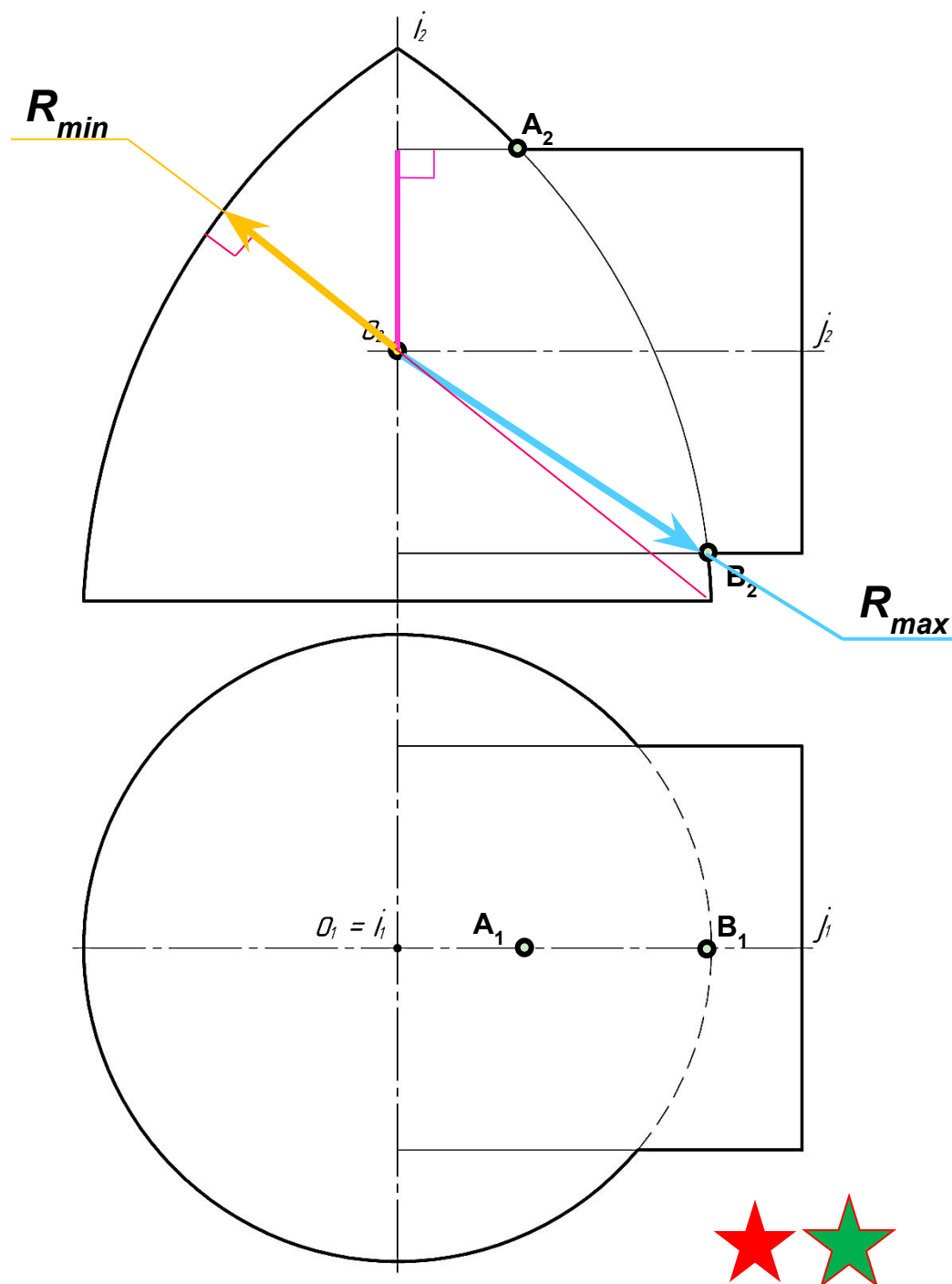
**Rmin** – радиус минимальной  
сферы-посредника



перпендикуляры  
из центра сфер  
к очеркам



**Rmin** = наибольшему из  
перпендикуляров



# СПОСОБ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

## алгоритм решения

### 4. нахождение точек линии пересечения

строим максимальную  
сферу-посредник

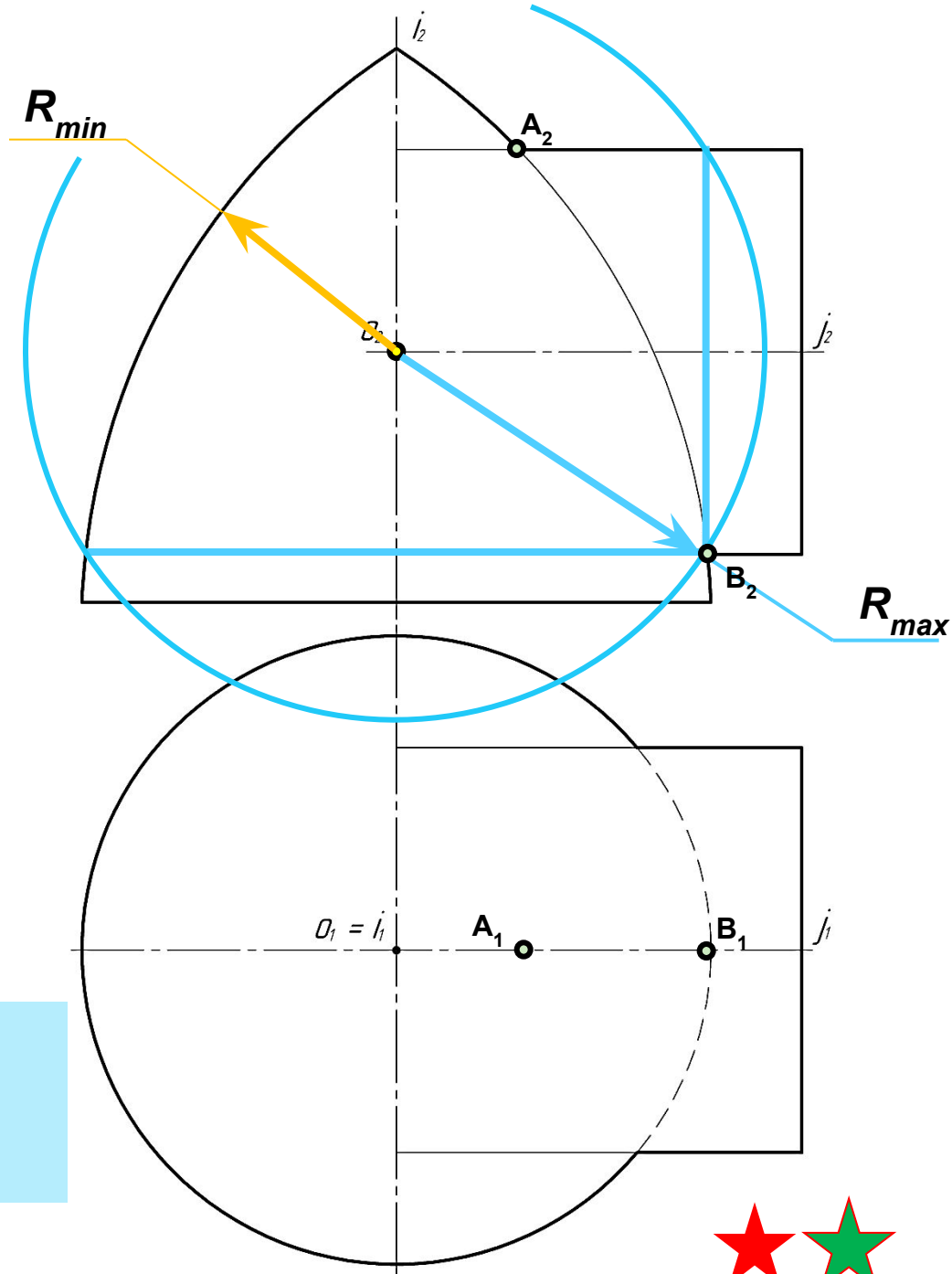


линия пересечения  
сферы-посредника  
с тором



линия пересечения  
сферы-посредника  
с цилиндром

пересечение линий дает 1 точку –  
максимально удаленную  
от центра сфер  
(уже найдена – точка B)



# СПОСОБ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

## алгоритм решения

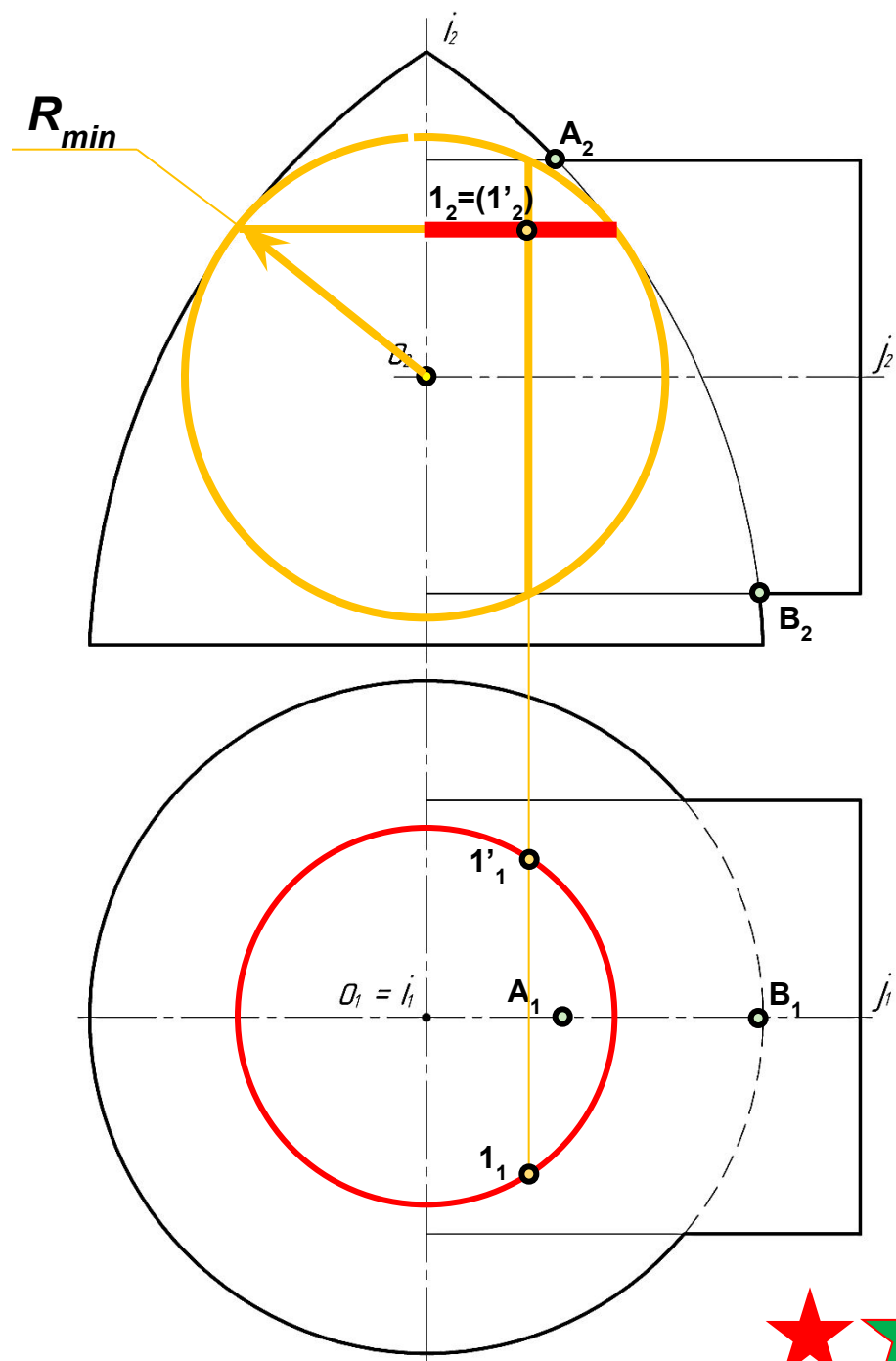
4. нахождение точек линии пересечения

строим минимальную сферу-посредник

строим линии пересечения сферы-посредника с заданными поверхностями (2 прямые)

их пересечение дает 2 точки (пара конкурирующих точек – 1, 1')

проекции этих точек на  $\Pi_1$  находим по принадлежности к тору радиус параллели – красный отрезок





# СПОСОБ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

## алгоритм решения

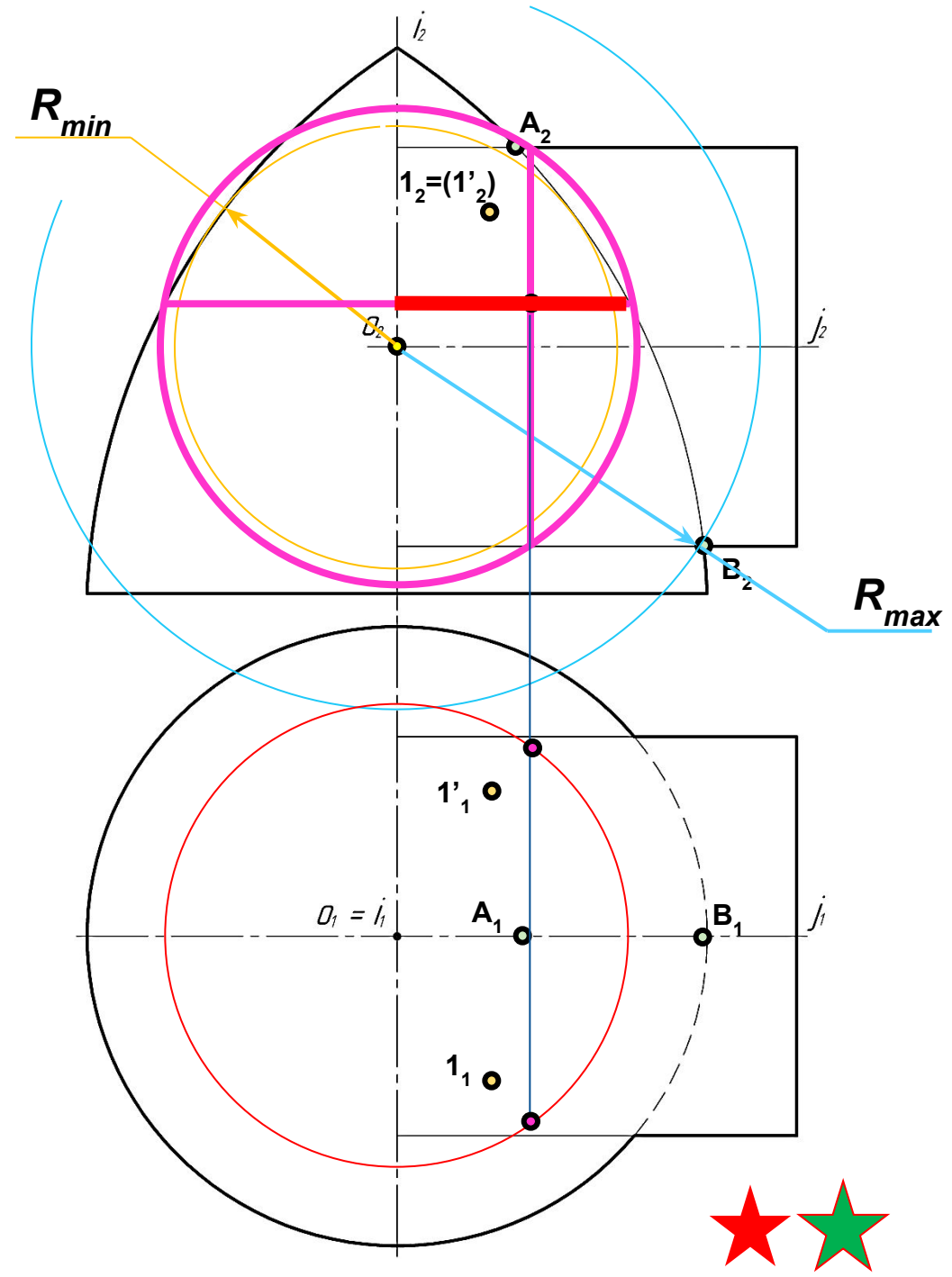
**4. нахождение точек линии пересечения (общий алгоритм)**

дополнительные сферы-посредники вводим между минимальной и максимальной интервал между сферами – 5 мм

строим линии пересечения сферы-посредника с заданными поверхностями (2-3-4 прямые)

их пересечение дает искомые точки (обозначить цифрами)

проекции этих точек на  $\Pi_1$  находим по принадлежности к вертикальному конусу



# СПОСОБ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

## алгоритм решения

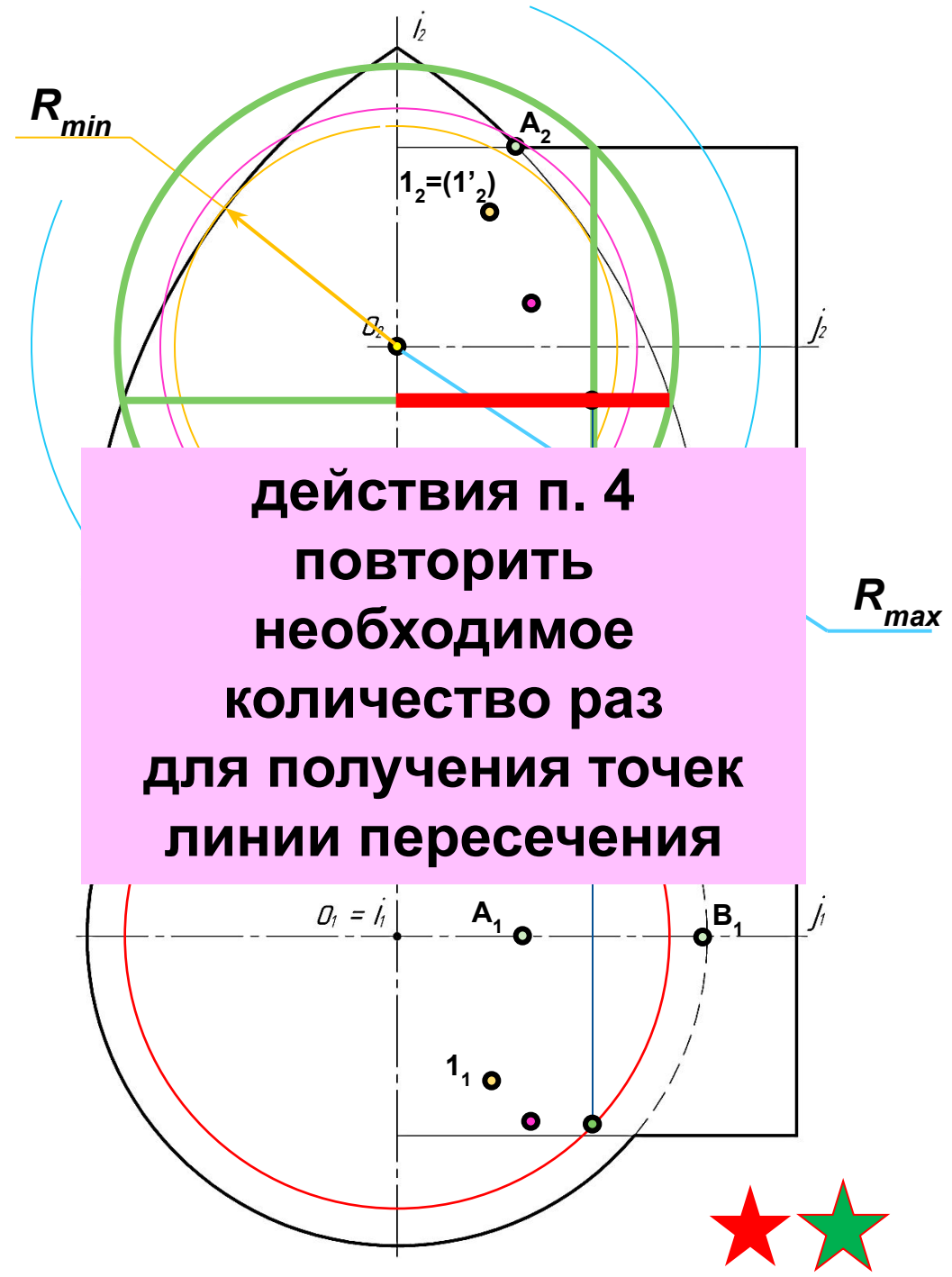
**4. нахождение точек линии пересечения (общий алгоритм)**

дополнительные сферы-посредники вводим между минимальной и максимальной интервал между сферами – 5 мм

строим линии пересечения сферы-посредника с заданными поверхностями (2-3-4 прямые)

их пересечение дает искомые точки (обозначить цифрами)

проекции этих точек на  $\Pi_1$  находим по принадлежности к вертикальному конусу



# СПОСОБ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

## алгоритм решения

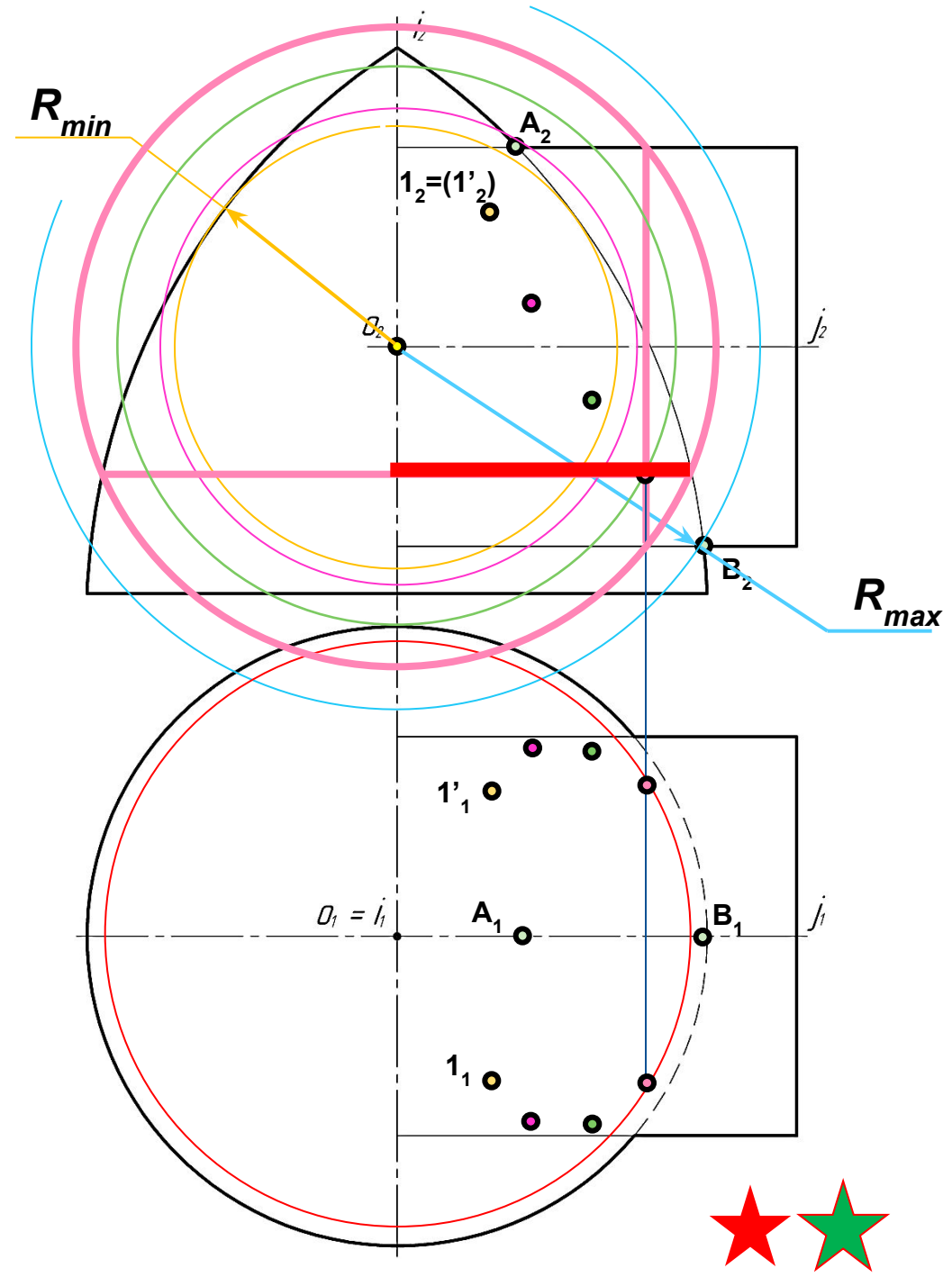
### 4. нахождение точек линии пересечения (общий алгоритм)

дополнительные сферы-посредники вводим между минимальной и максимальной интервал между сферами – 5 мм

строим линии пересечения сферы-посредника с заданными поверхностями (2-3-4 прямые)

их пересечение дает искомые точки (обозначить цифрами)

проекции этих точек на  $\Pi_1$  находим по принадлежности к вертикальному конусу



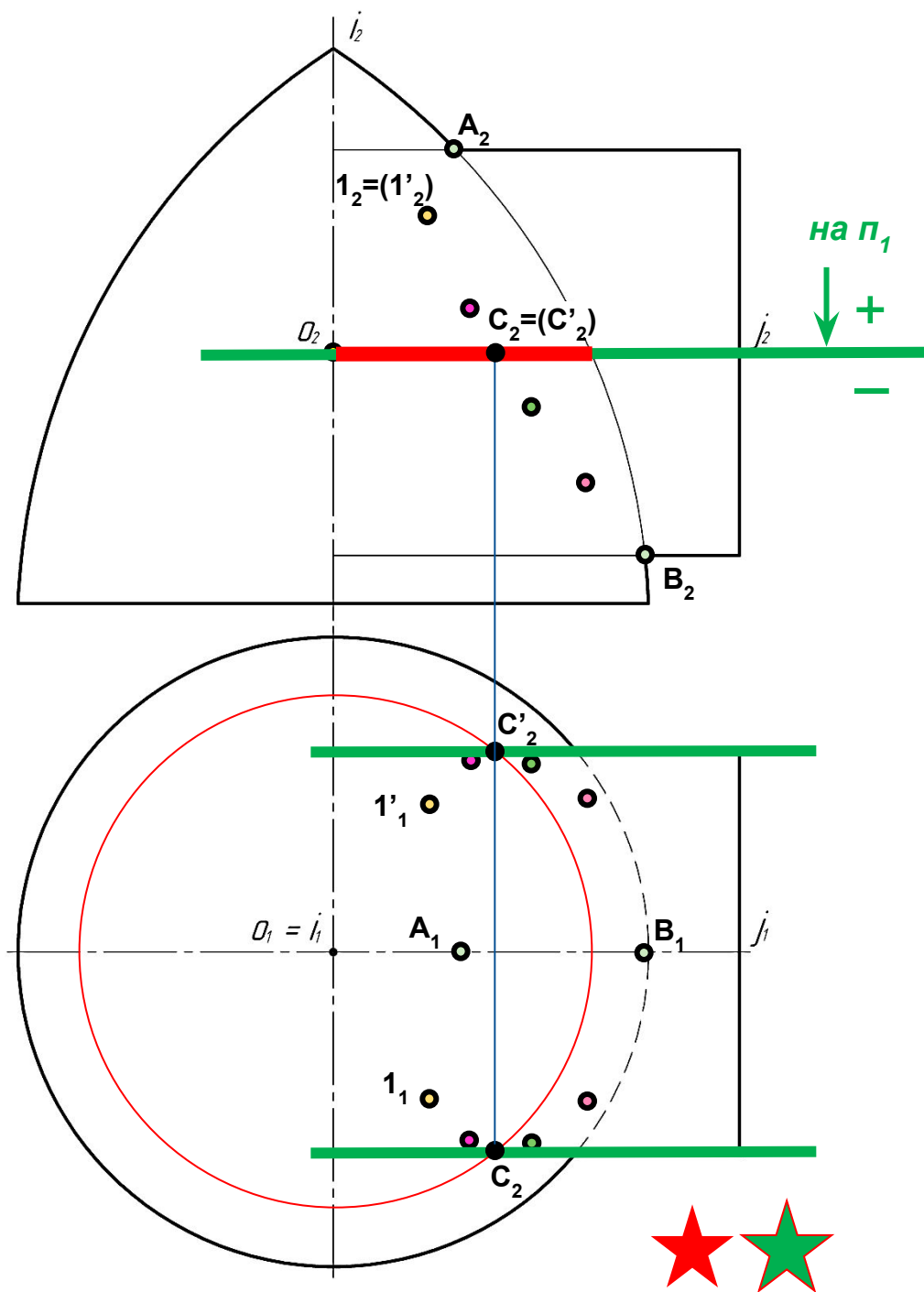
# СПОСОБ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

## алгоритм решения

### 4. нахождение точек линии пересечения

точки изменения видимости  
линии пересечения  
на  $\Pi_1$

находятся  
на границе видимости на  $\Pi_1$   
(горизонтальный очерк цилиндра)



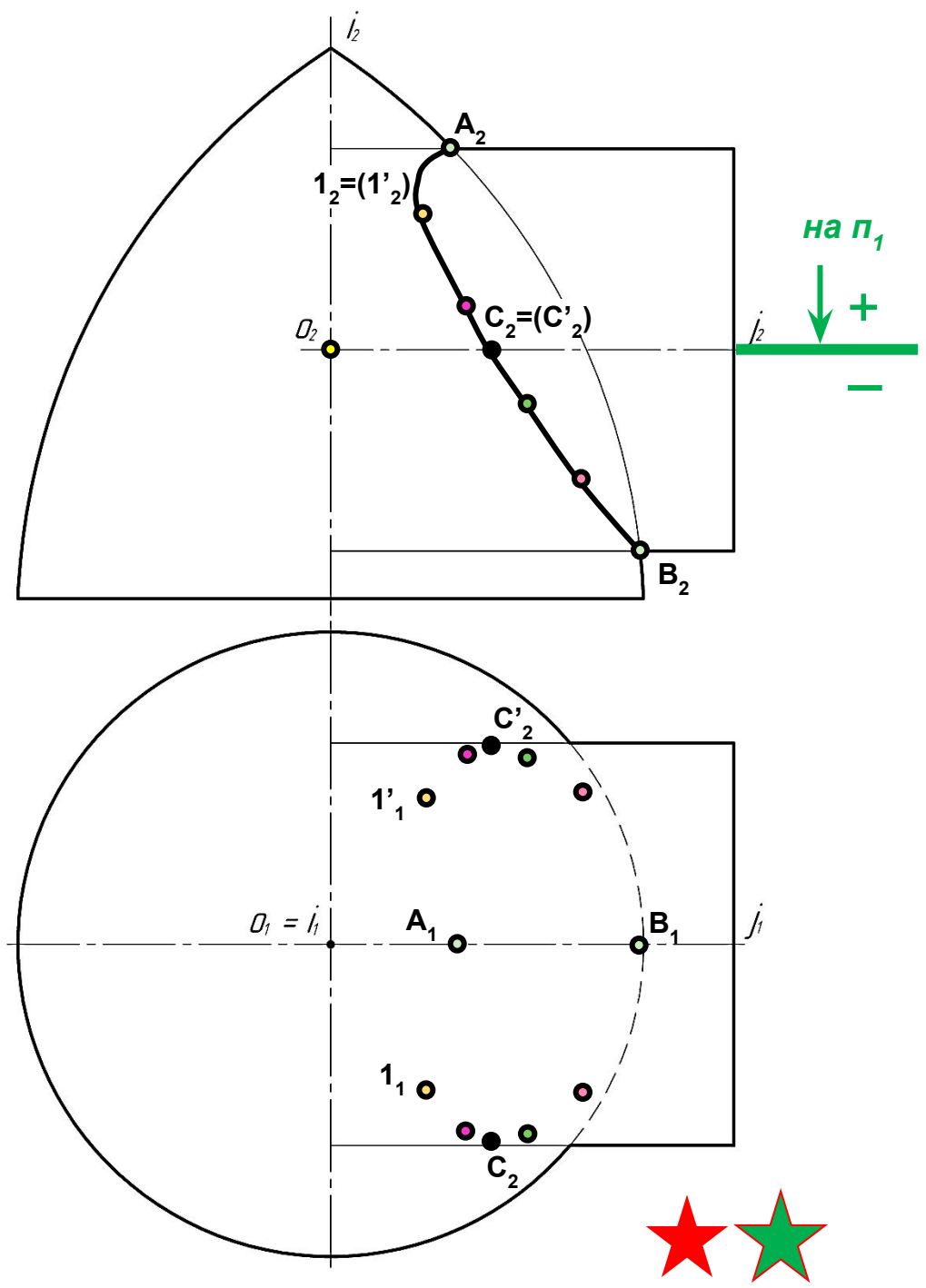
# СПОСОБ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

## алгоритм решения

5. построение линии пересечения на  $\Pi_2$

полученные точки соединяем плавной линией на фронтальной плоскости проекций

линия вся видимая задняя (невидимая) часть совпадает с передней



# СПОСОБ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

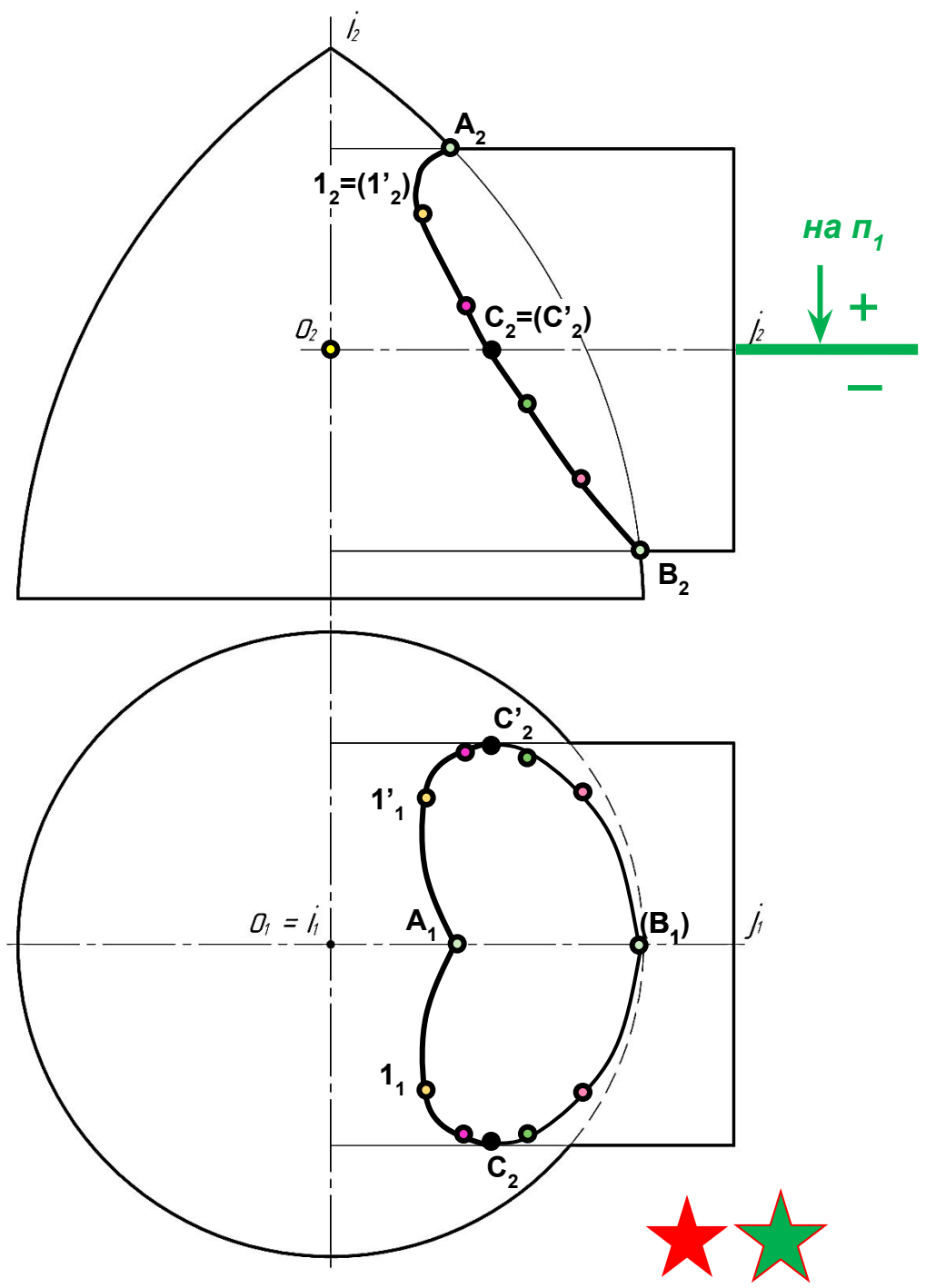
## алгоритм решения

6. построение линии пересечения на  $\Pi_1$

полученные точки соединяем плавной линией на горизонтальной плоскости проекций

линия видимая на участке между точками С, А, С'

линия не видимая на участке между точками С, В, С'



# СПОСОБ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

## алгоритм решения

### 8. очерки поверхностей на $\Pi_1$

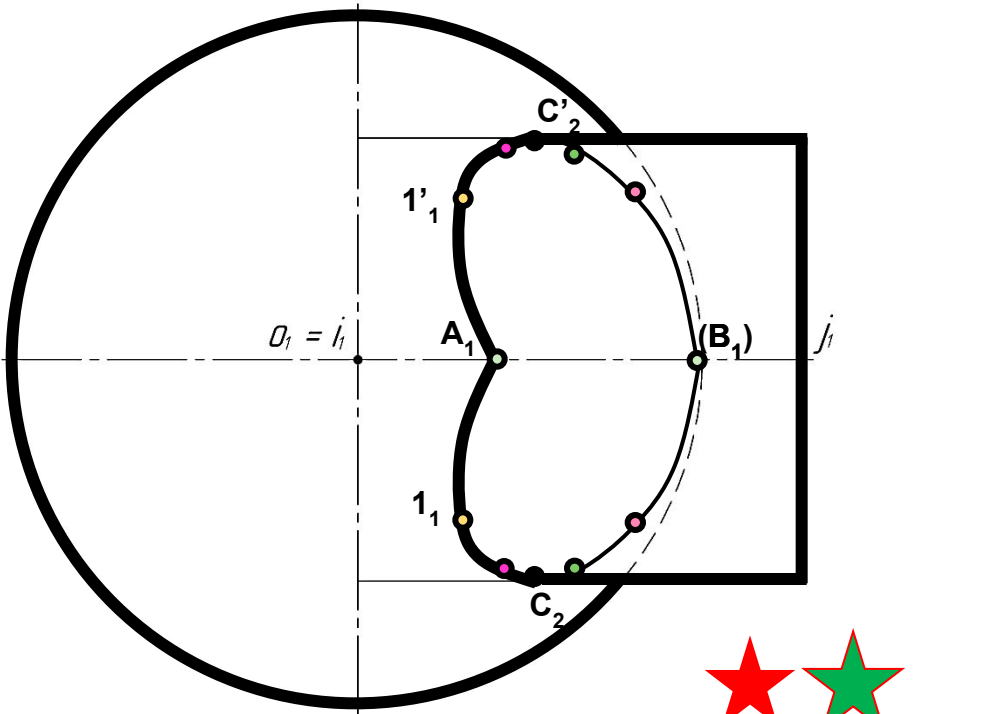
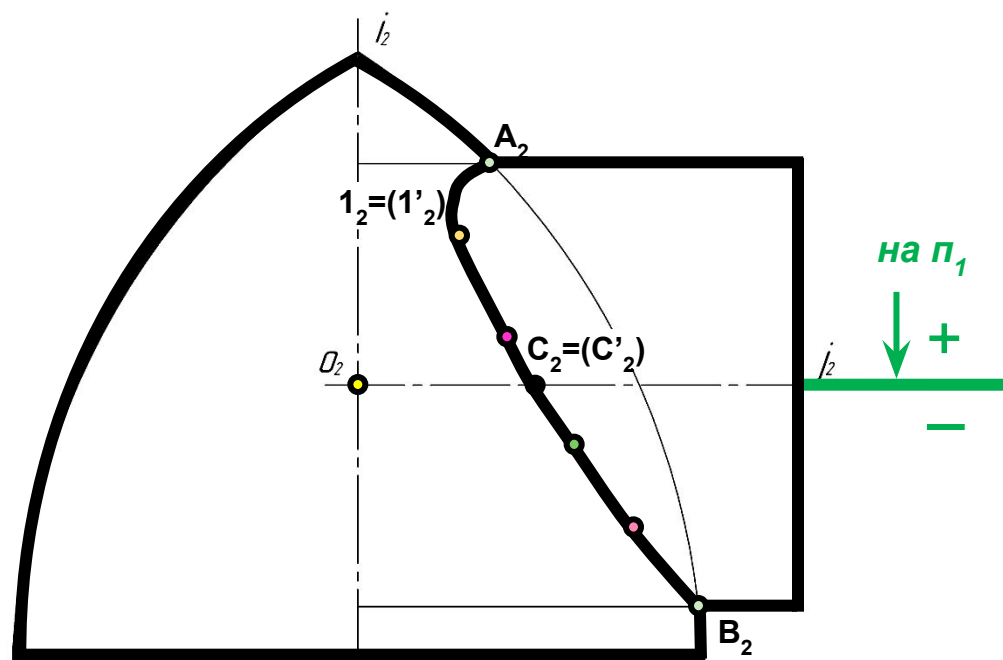
очерк цилиндра

основание тора

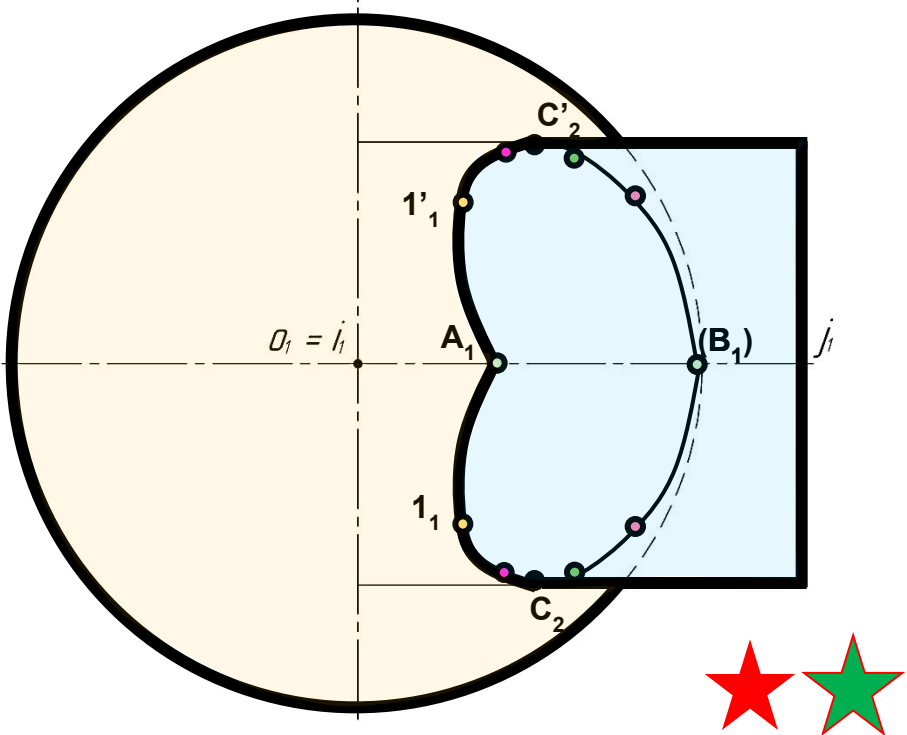
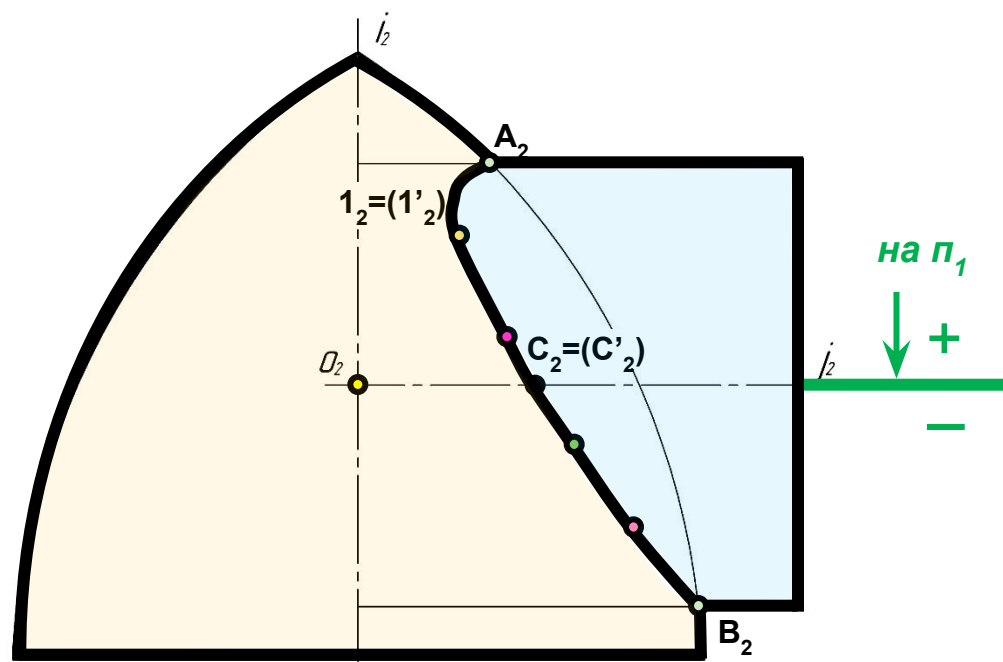
### 9. очерки поверхностей на $\Pi_2$

цилиндр

очерк тора



# СПОСОБ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР





# Содержание лекции

методы построения линии пересечения  
двух поверхностей (Часть 2)

**метод сфер-посредников  
(способ вспомогательных секущих сфер)**

основные термины (соосные, концентрические)

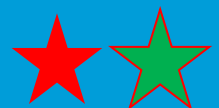
способ концентрических сфер

**частный случай пересечения поверхностей  
(теорема Монжа)**

способ эксцентрических сфер

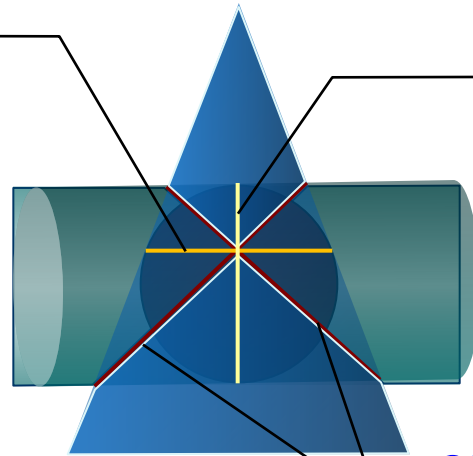
примеры решений задач из методички [2]

литература



# теорема Монжа

проекция линии  
касания конуса и  
сферы  
(окружность)



проекция линии  
касания цилиндра и  
сферы  
(окружность)

эллипсы

**если две поверхности второго порядка  
описаны около третьей поверхности второго порядка  
или вписаны в нее,  
то линия их пересечения распадается  
на две плоские кривые второго порядка**



**построить  
проекции линии пересечения  
двух поверхностей**

**1. пересекаются  
поверхности вращения**

**два конуса**

**2. оси вращения  
поверхностей пересекаются**

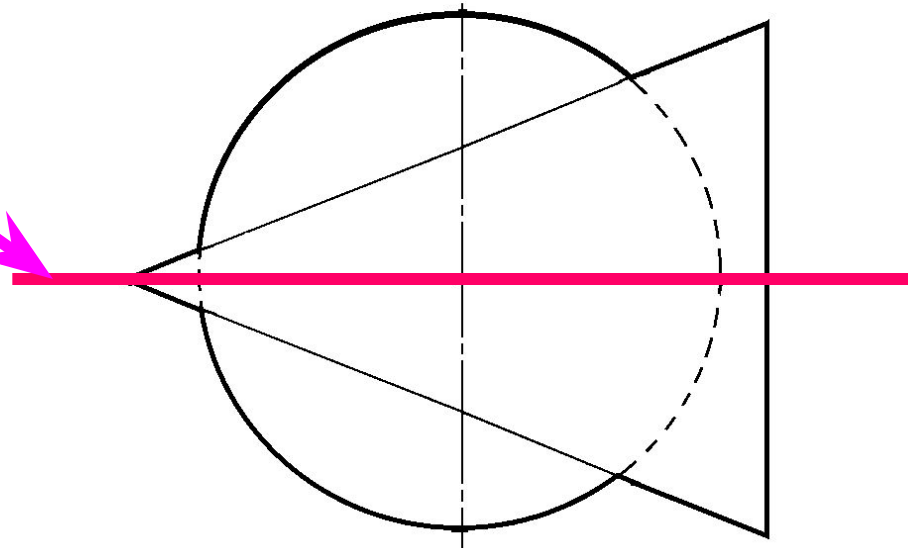
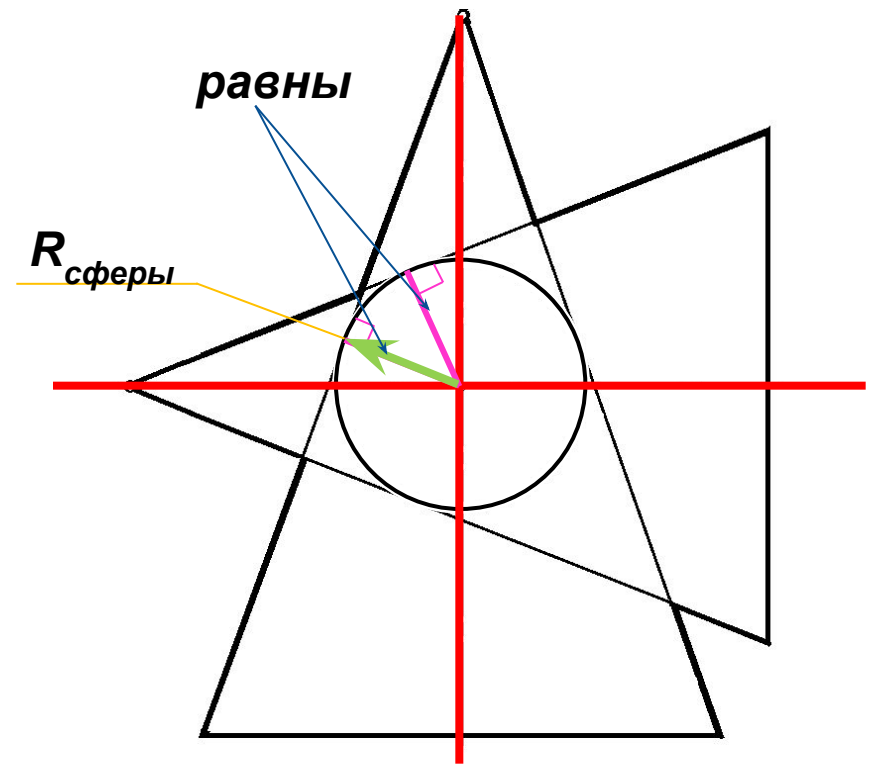
**на  $\Pi_2$**

**3. пересекающиеся  
оси вращения образуют  
плоскость уровня**

**параллельную  $\Pi_2$**

**4. конусы описаны около  
сферы**

**теорема Монжа**



# теорема Монжа

(конусы описаны вокруг сферы)



линия пересечения – два эллипса  
(фронтально-проецирующие)

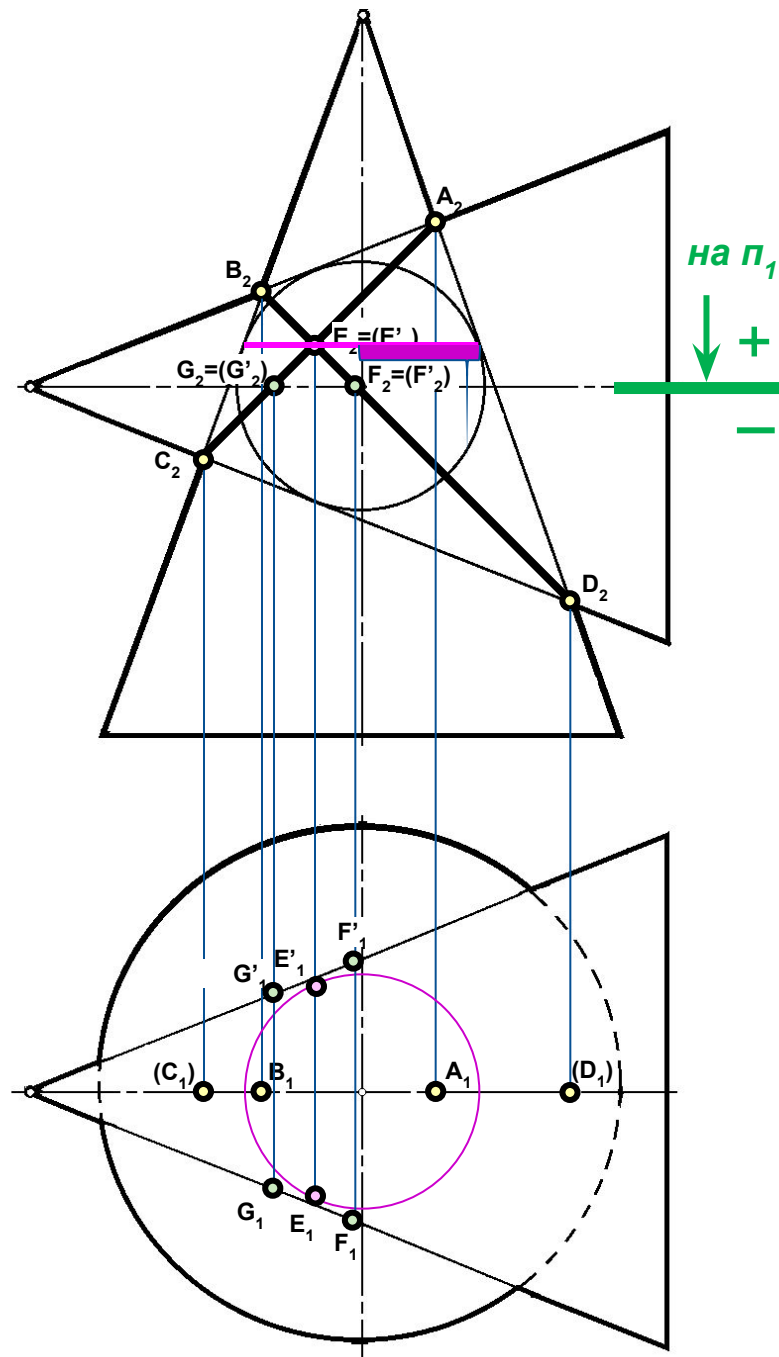
граница видимости на  $\pi_1$

опорные точки

пересечение главных  
фронтальных меридианов  
(четыре точки)

пересечение эллипсов – линий  
пересечения  
(две фронтально-конкурирующие точки)

ТОЧКИ СМЕНЫ ВИДИМОСТИ  
(четыре точки)



# теорема Монжа

(конусы описаны вокруг сферы)

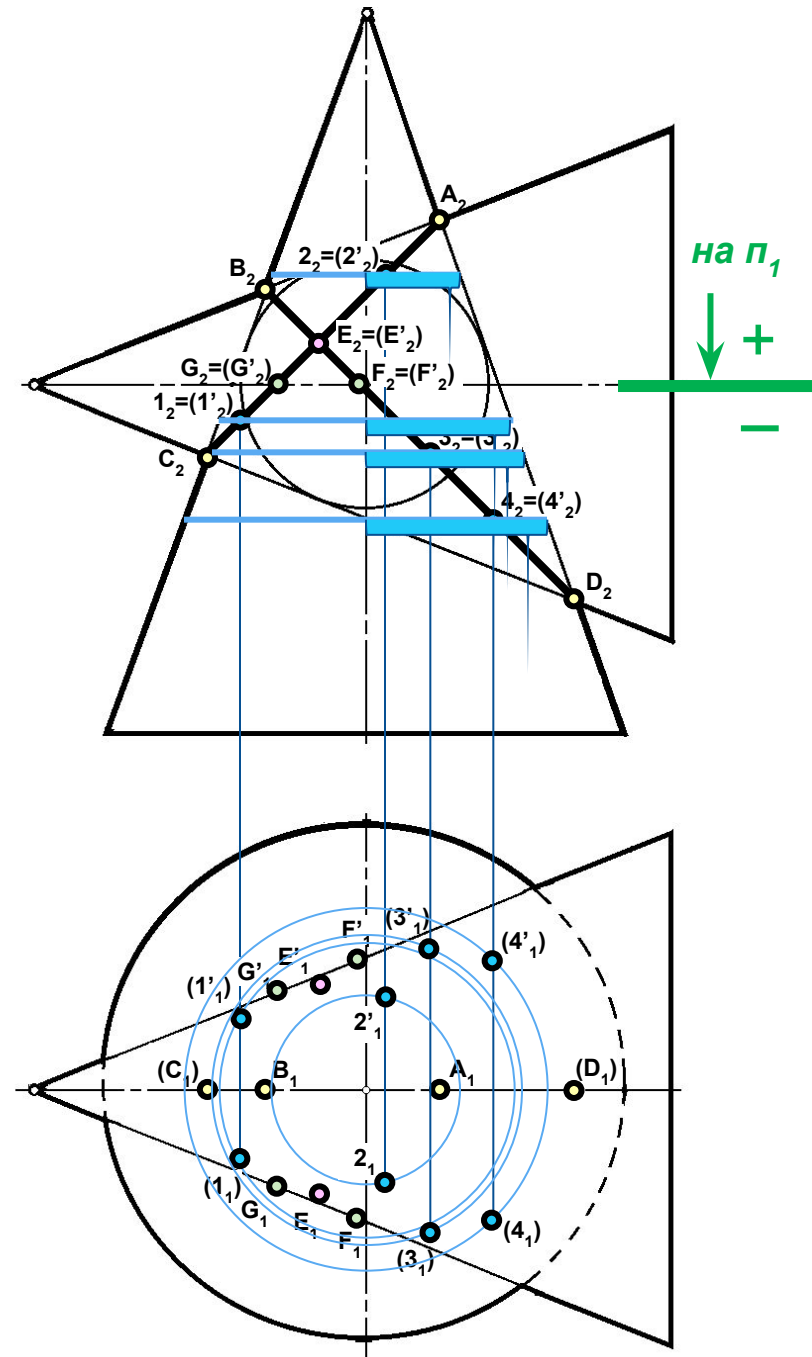


линия пересечения – два эллипса

(фронтально-проецирующие)

граница видимости на  $\pi_1$

промежуточные точки



# теорема Монжа

(конусы описаны вокруг сферы)

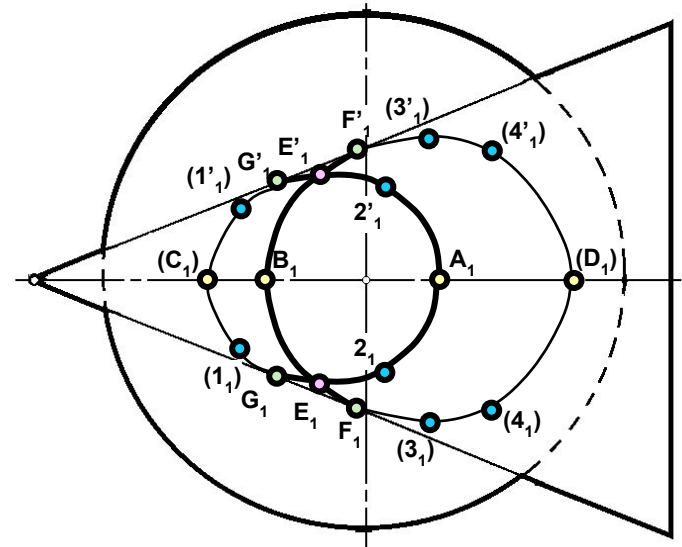
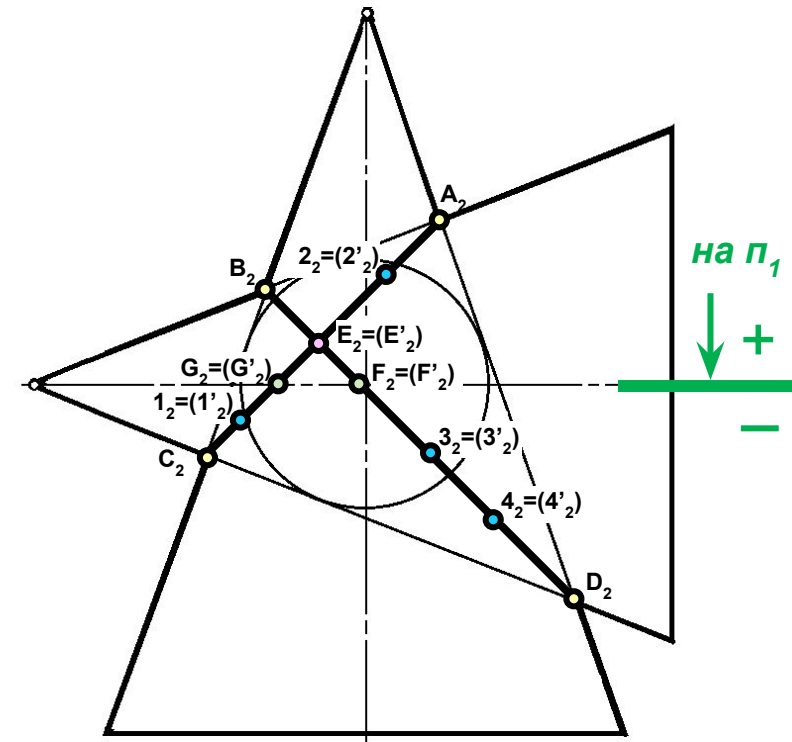


линия пересечения – два эллипса

(фронтально-проецирующие)

граница видимости на  $\Pi_1$

соединить  
полученные проекции точек на  $\Pi_1$   
плавной линией  
с учетом видимости  
(два пересекающихся эллипса)



# теорема Монжа

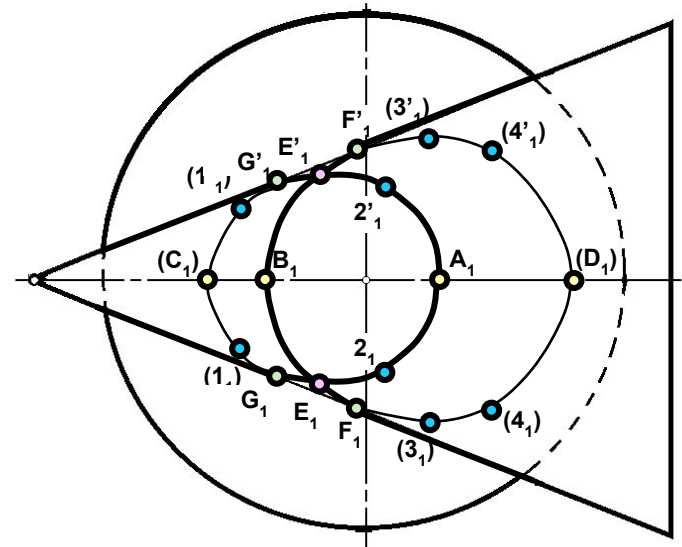
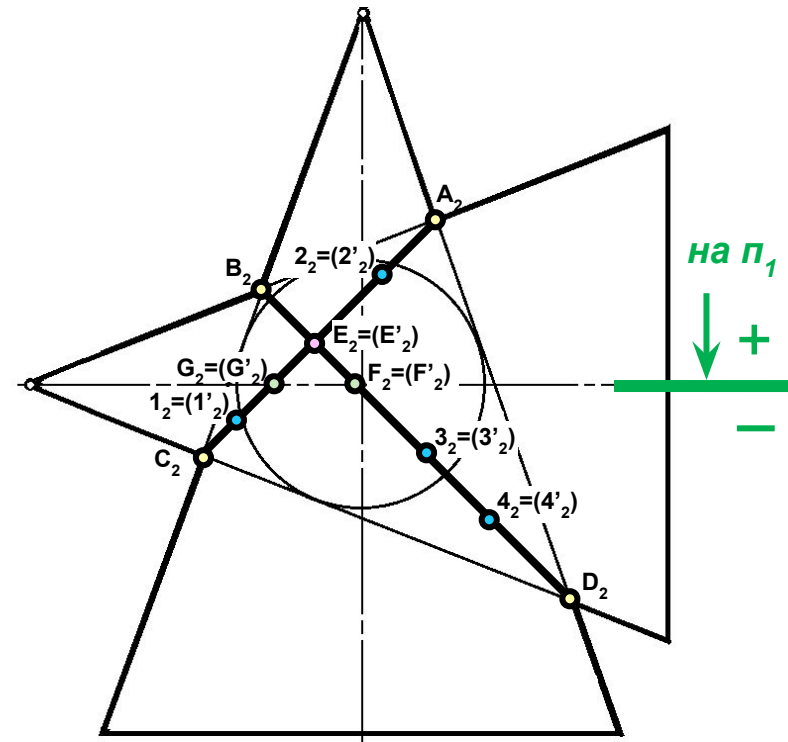
(конусы описаны вокруг сферы)



линия пересечения – два эллипса  
(фронтально-проецирующие)

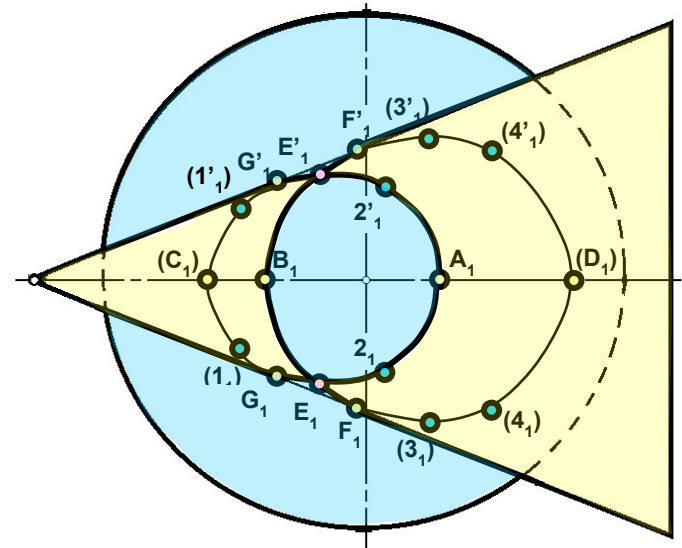
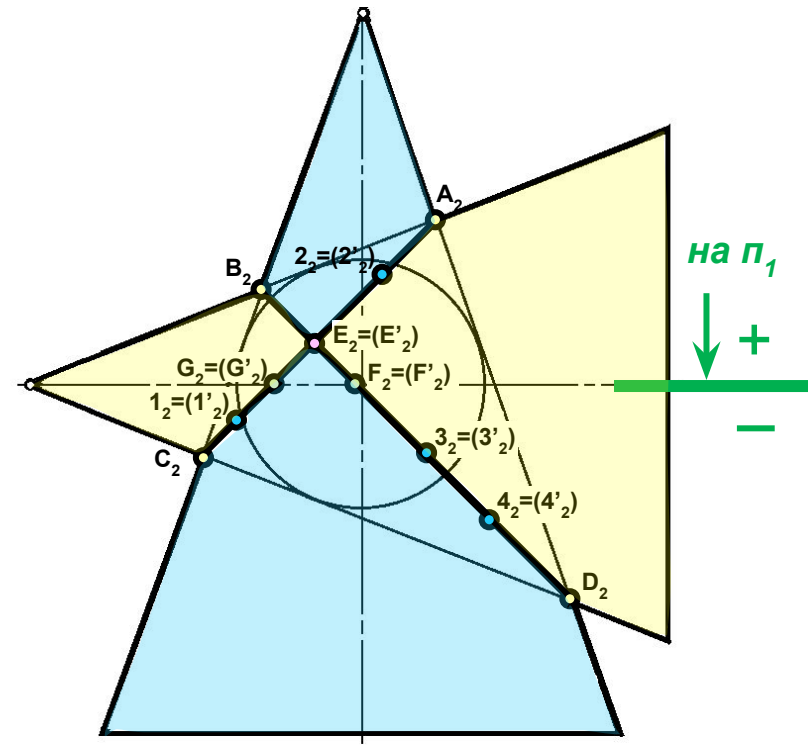
граница видимости на  $\Pi_1$

очерки поверхностей  
на  $\Pi_1$   
(остатки + их видимость)



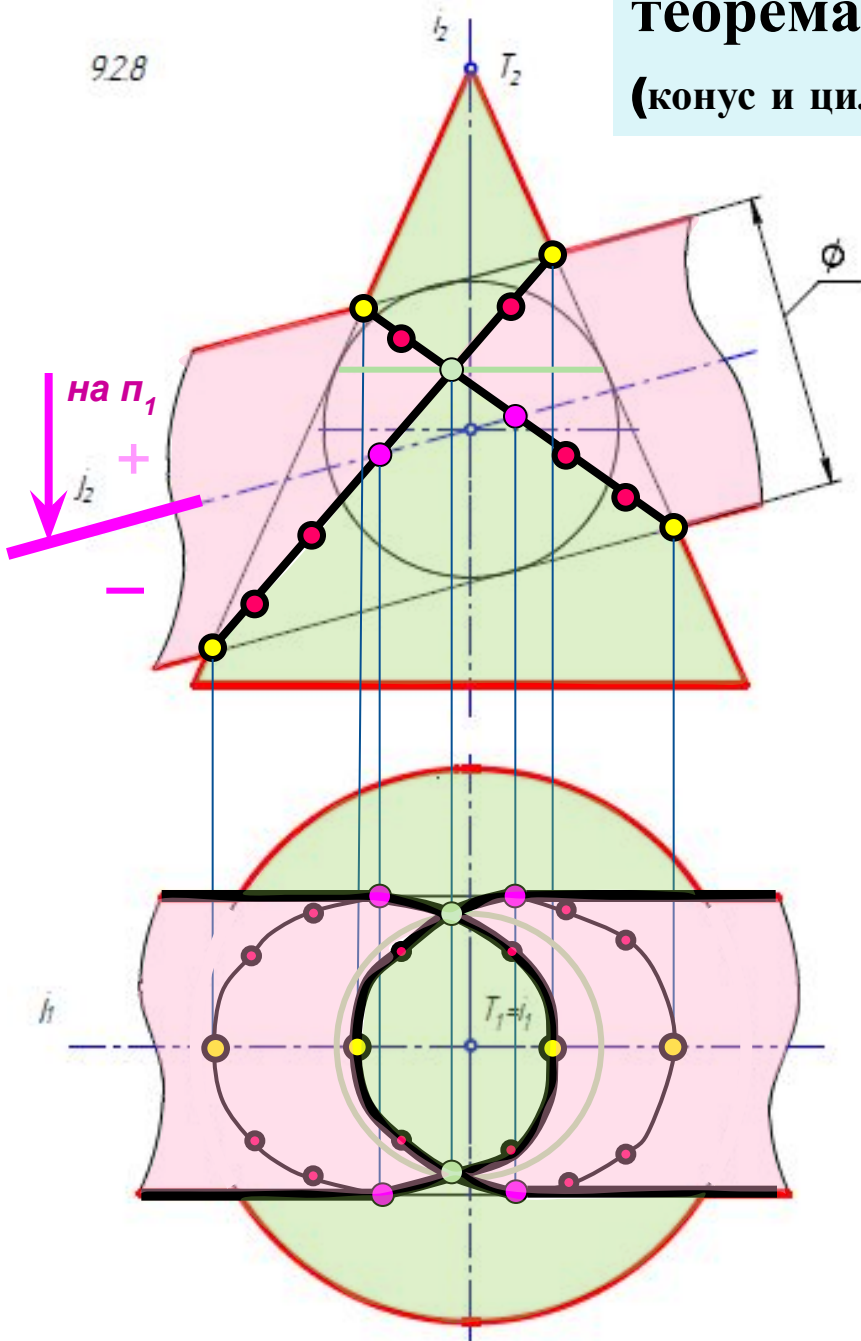
# теорема Монжа

(конусы описаны вокруг сферы)





928



# теорема Монжа

(конус и цилиндр описаны вокруг сферы)

линия пересечения конуса  
и цилиндра – два эллипса  
(фронтально-проецирующие)

**опорные точки**

Соединить  
полученные проекции  
точек на  $\Pi_1$   
плавной линией  
с учетом видимости  
(два пересекающихся эллипса)

**ВЫПОЛНИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО**

**точки смены** ↓ **видимости**

очерки поверхностей  
на  $\Pi_1$   
(остатки + их видимость)



# Содержание лекции

методы построения линии пересечения  
двух поверхностей (Часть 2)

**метод сфер-посредников  
(способ вспомогательных секущих сфер)**

основные термины (соосные, концентрические)

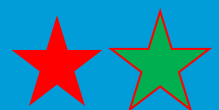
способ концентрических сфер

частный случай пересечения поверхностей  
(теорема Монжа)

**способ эксцентрических сфер**

примеры решений задач из методички [2]

литература



применим ли способ  
эксцентрических сфер для решения  
данной задачи?

1. пересекаются поверхности  
вращения

да – конус и тор

2. поверхности имеют  
общую плоскость симметрии  
параллельную одной из плоскостей  
проекции

да

3. оси вращения поверхностей  
скрещиваются

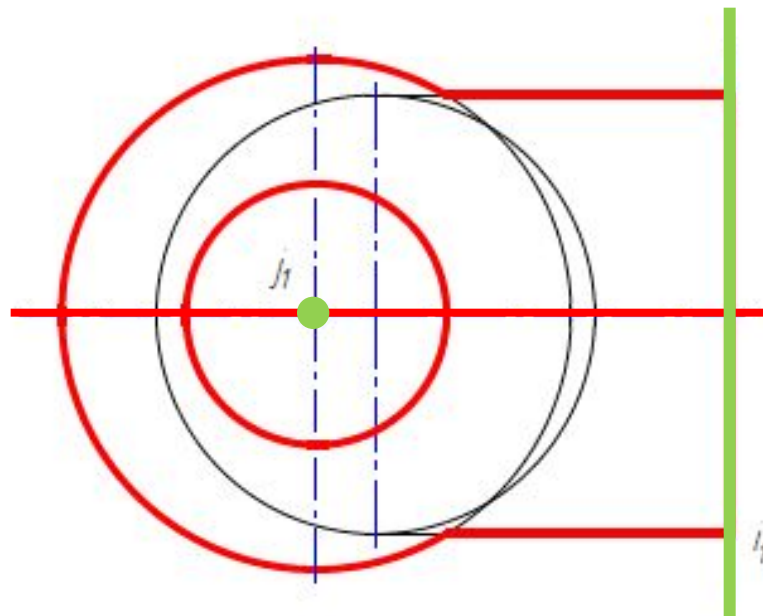
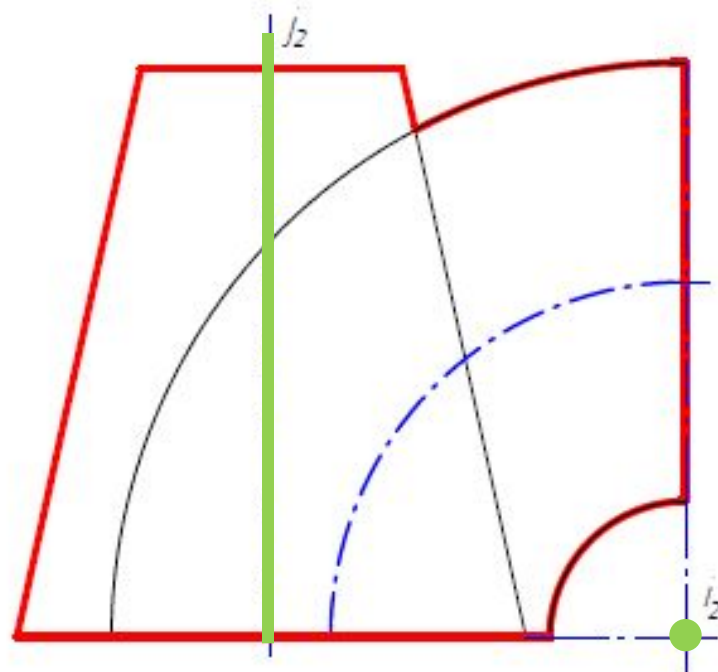
да

4. поверхности содержат семейства  
окружностей, по которым они могут  
пересекаться эксцентрическими  
сферами

да



927



# СПОСОБ ЭКЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

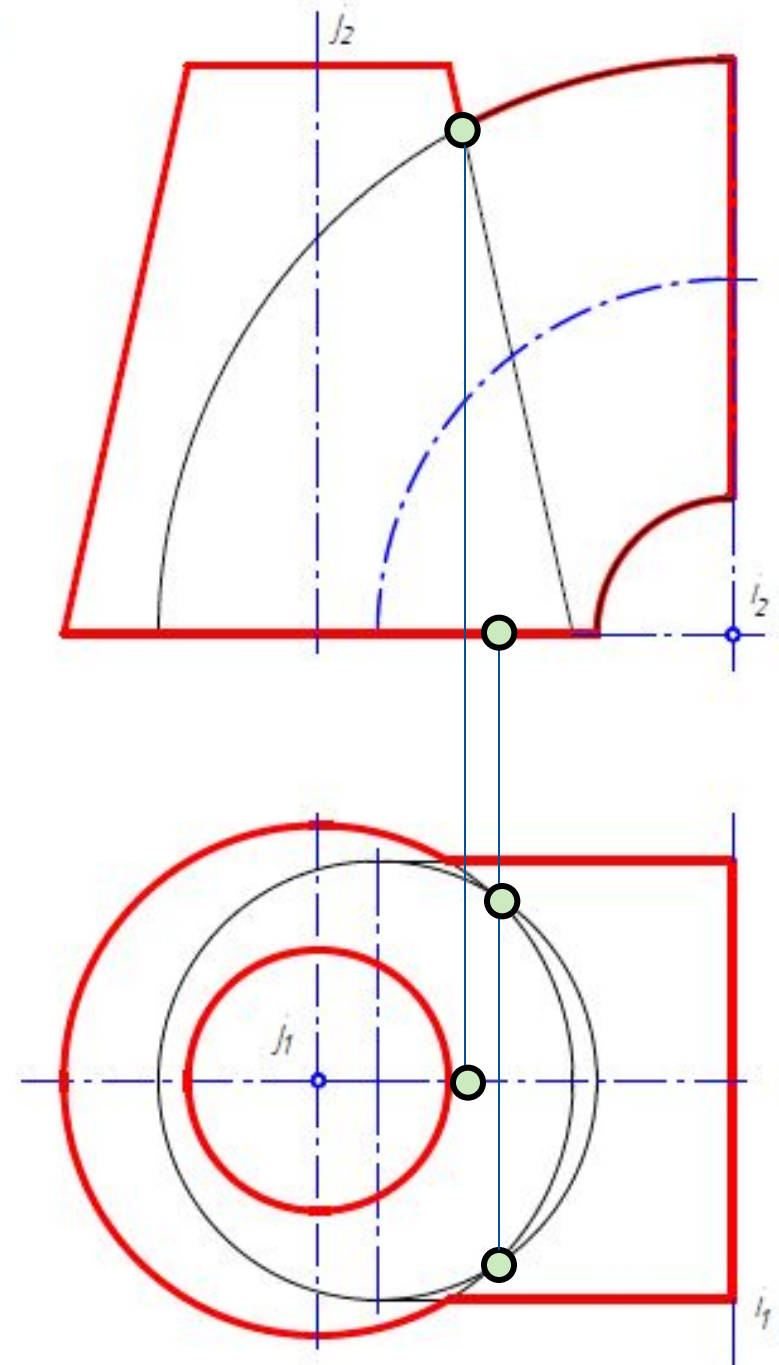
## алгоритм решения

### 1. определение опорных точек

(точки пересечения очерков на  $\Pi_2$  и  $\Pi_1$ )

(обозначить как А, В, С)

927



# СПОСОБ ЭКЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

## алгоритм решения

### 2. определение промежуточных точек

вспомогательные поверхности -  
**эксцентриские сферы**,  
центры которых лежат на оси  
конуса

строим сферу-посредник

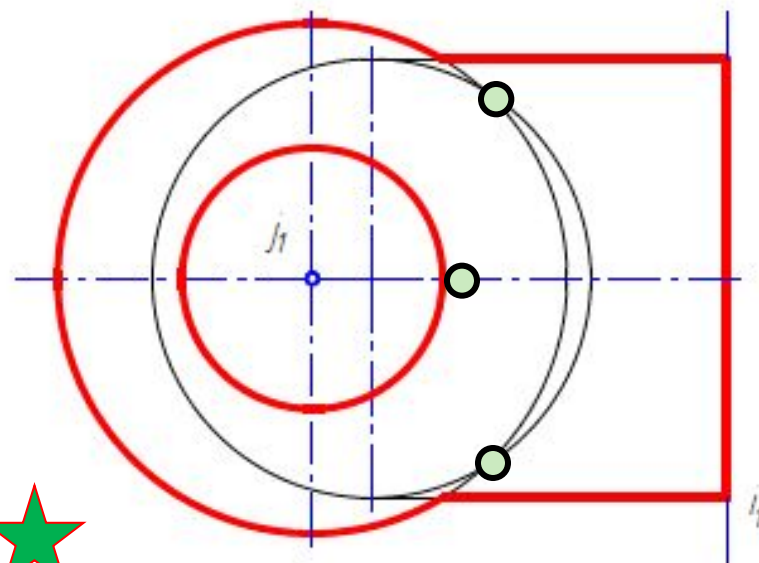
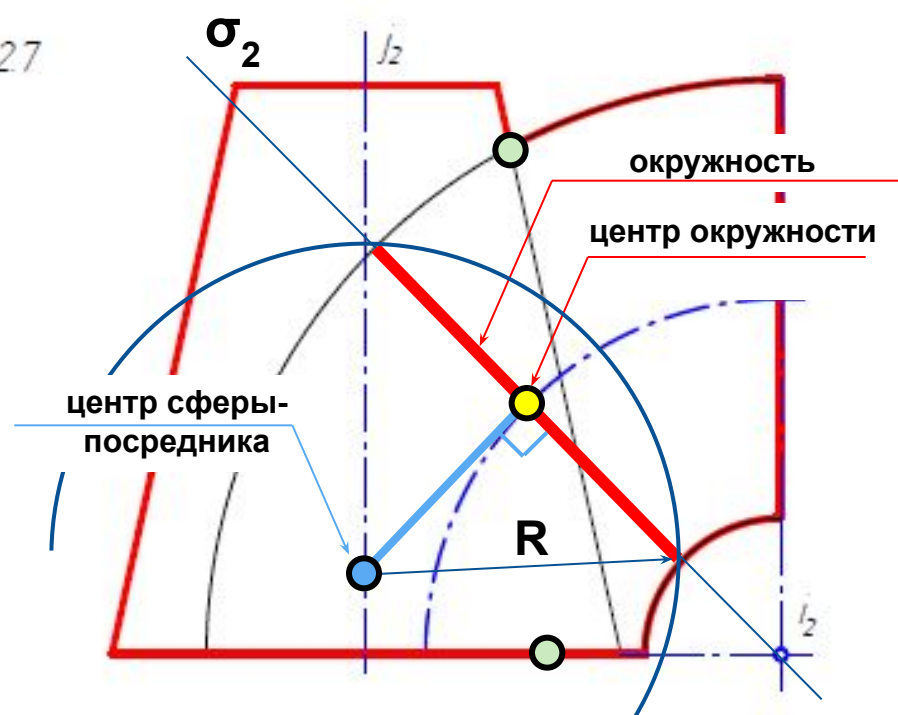
положение центра сферы-  
посредника

через ось тора проводим плоскость  $\sigma$   
( $\sigma_2$ )  $\perp$   $\Pi_2$  и пересекающую центр тора

из центра окружности проводим  
перпендикуляр до оси конуса

окружность радиусом  $R$  -  
сфера - посредник

927



# СПОСОБ ЭКЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

## алгоритм решения

### 2. определение промежуточных точек

строим линии  
пересечения  
сферы-посредника  
с заданными  
поверхностями

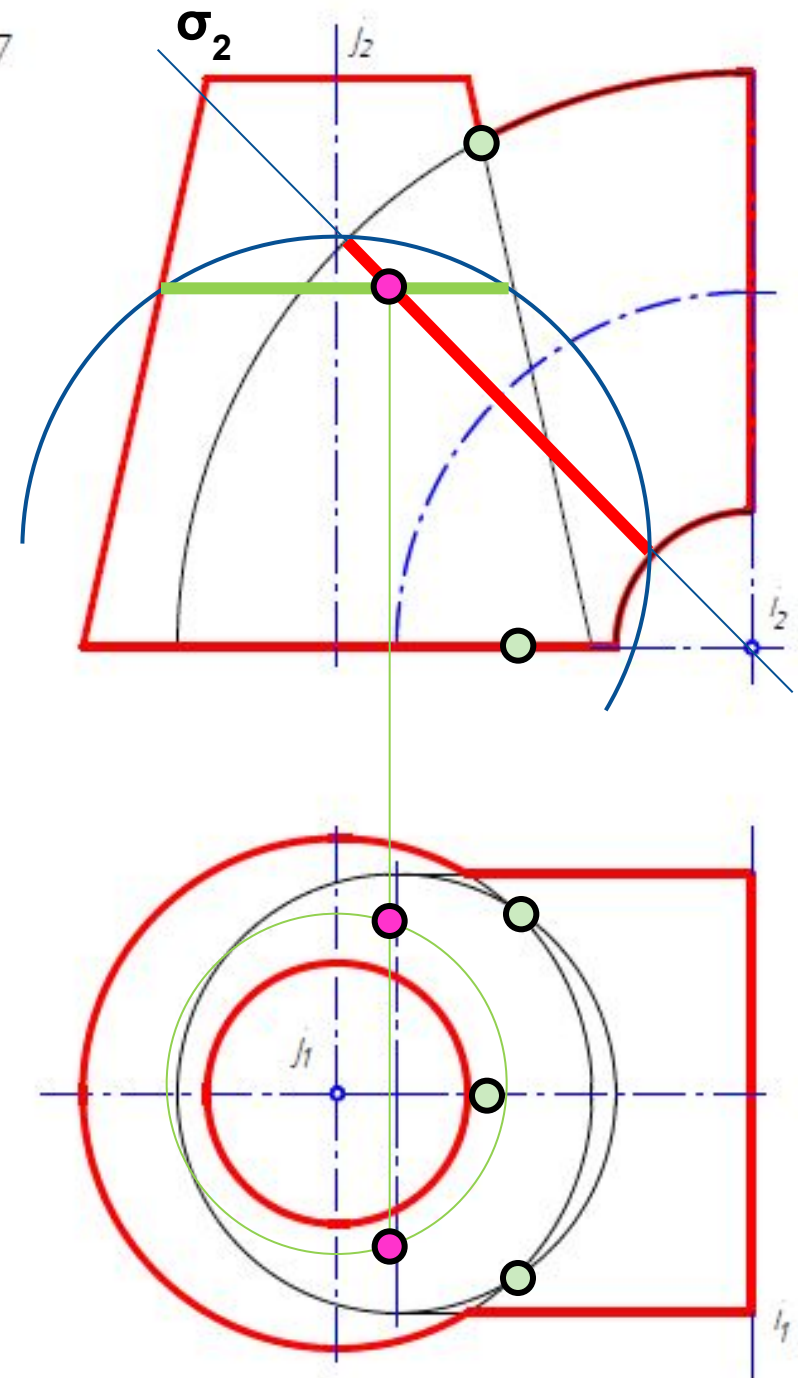
с тором  
(уже построена)

с конусом

пересечение этих линий дает  
ИСКОМЫЕ ТОЧКИ



927



# СПОСОБ ЭКЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

## алгоритм решения

6. очерки поверхностей на  $\Pi_1$   
линии пересечения на  $\Pi_1$

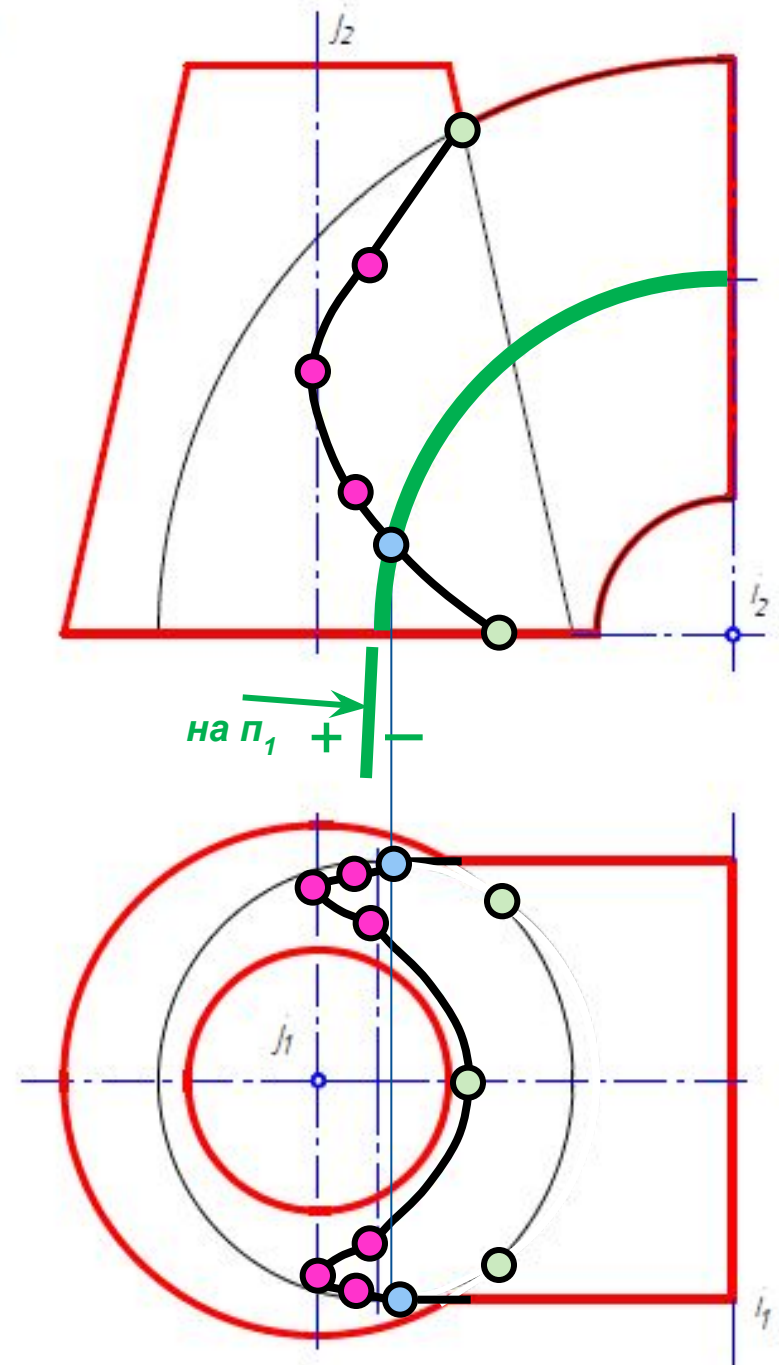
повторяют необходимое

полученные точки соединяем  
плавной линией на горизонтальной  
плоскости проекций с учетом  
видимости

задняя (невидимая) часть  
совпадает с передней)

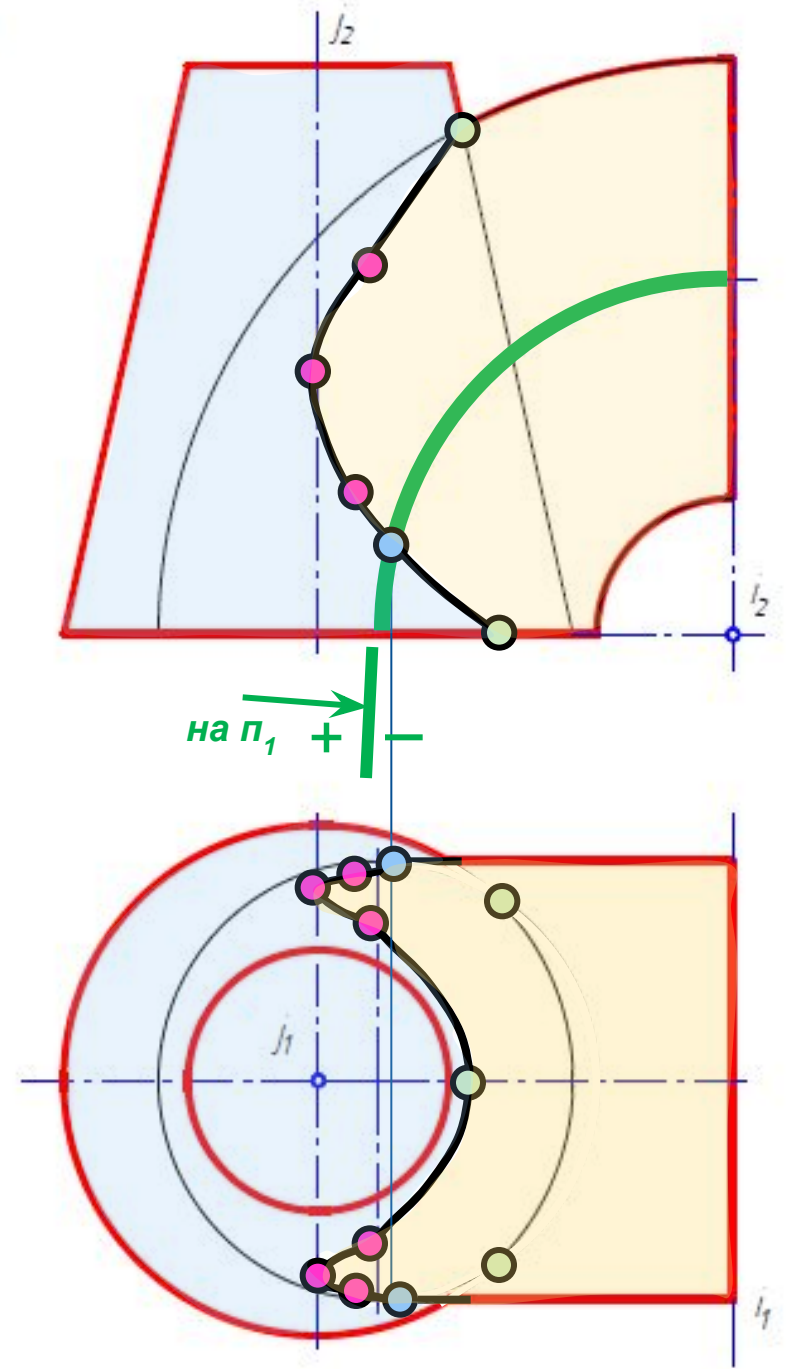


927



# СПОСОБ ЭКЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

927





# Содержание лекции

методы построения линии пересечения  
двух поверхностей (Часть 2)

метод сфер-посредников  
(способ вспомогательных секущих сфер)

основные термины (соосные, концентрические)

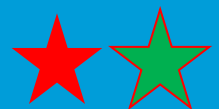
способ концентрических сфер

частный случай пересечения поверхностей  
(теорема Монжа)

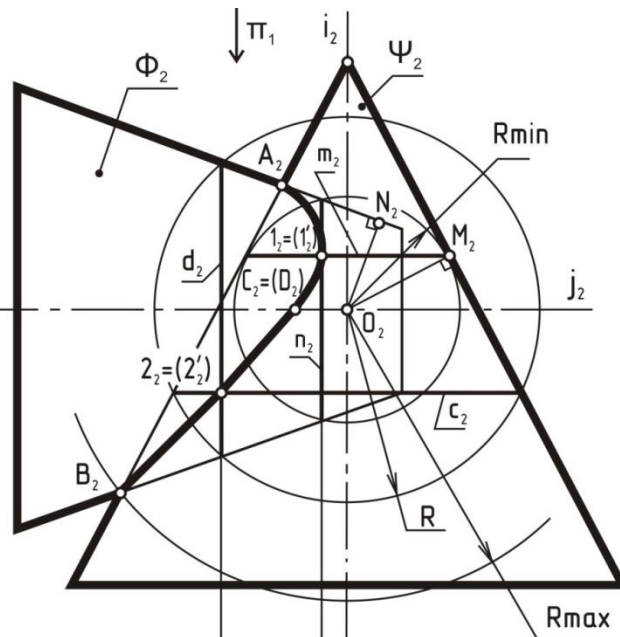
способ эксцентрических сфер

**примеры решений задач из методички [2]**

литература

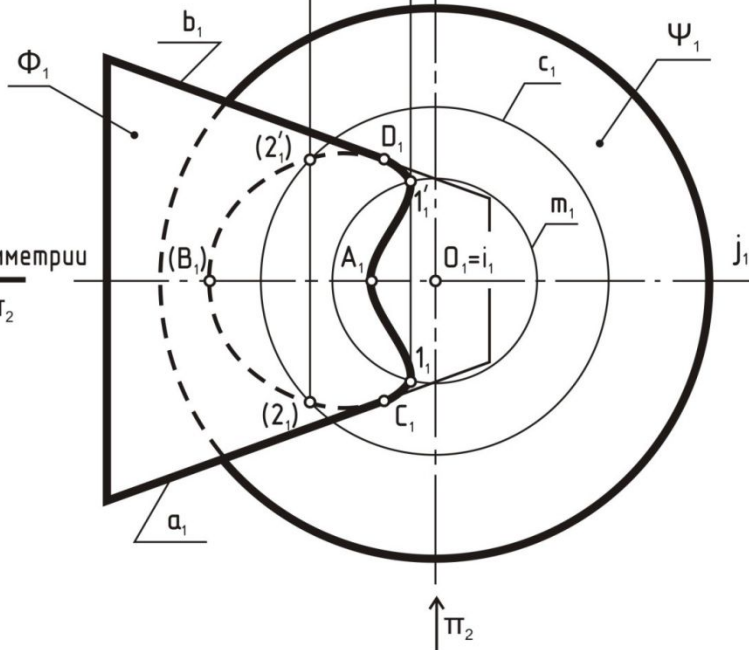


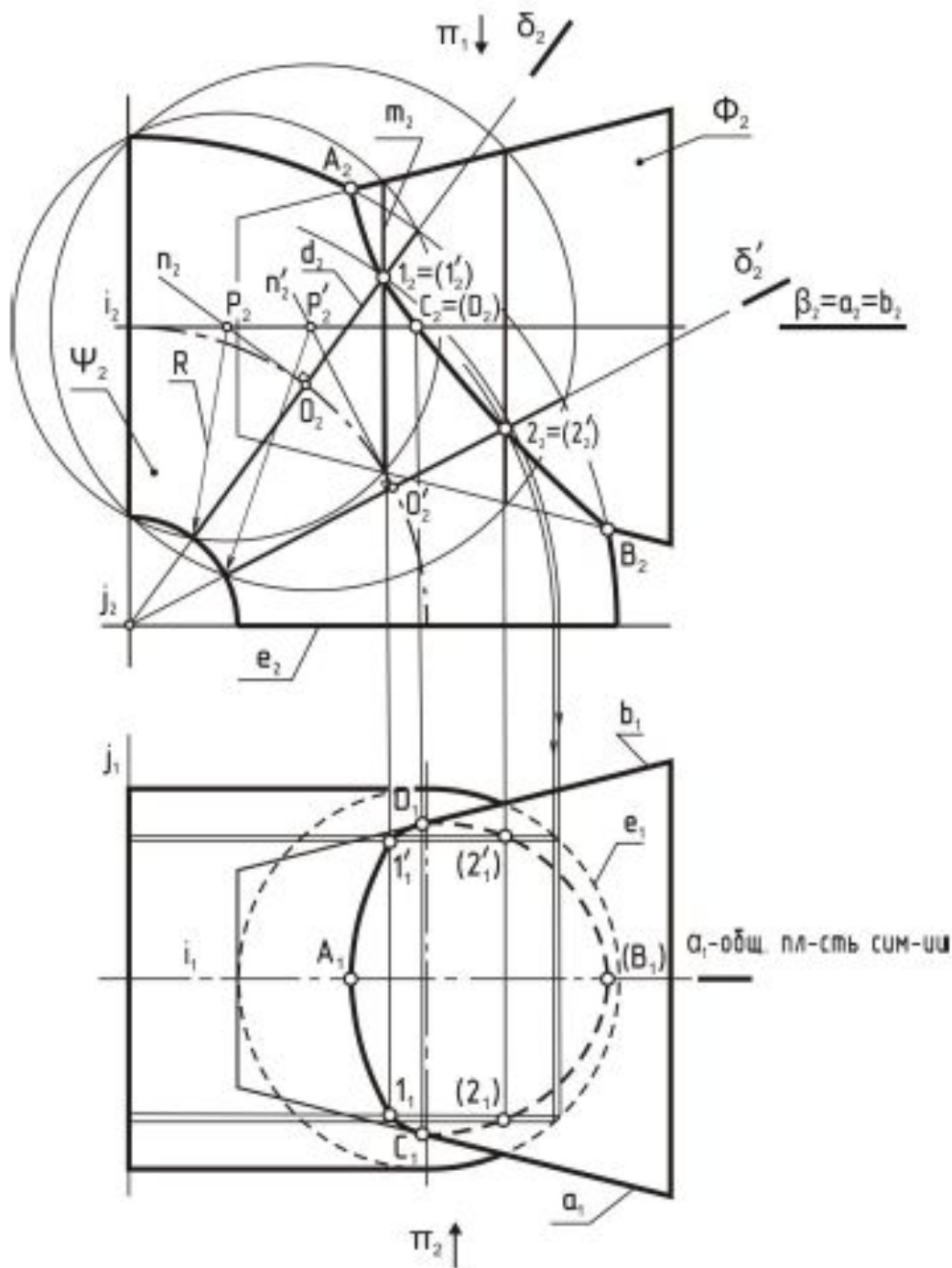
$\alpha_2 = b_2 = \beta_2 -$   
 общ. зр. вид.  $\pi_1$



# СПОСОБ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

$\alpha_1$ -общ. пл-сть симметрии  
 общ. зр. вид.  $\pi_2$

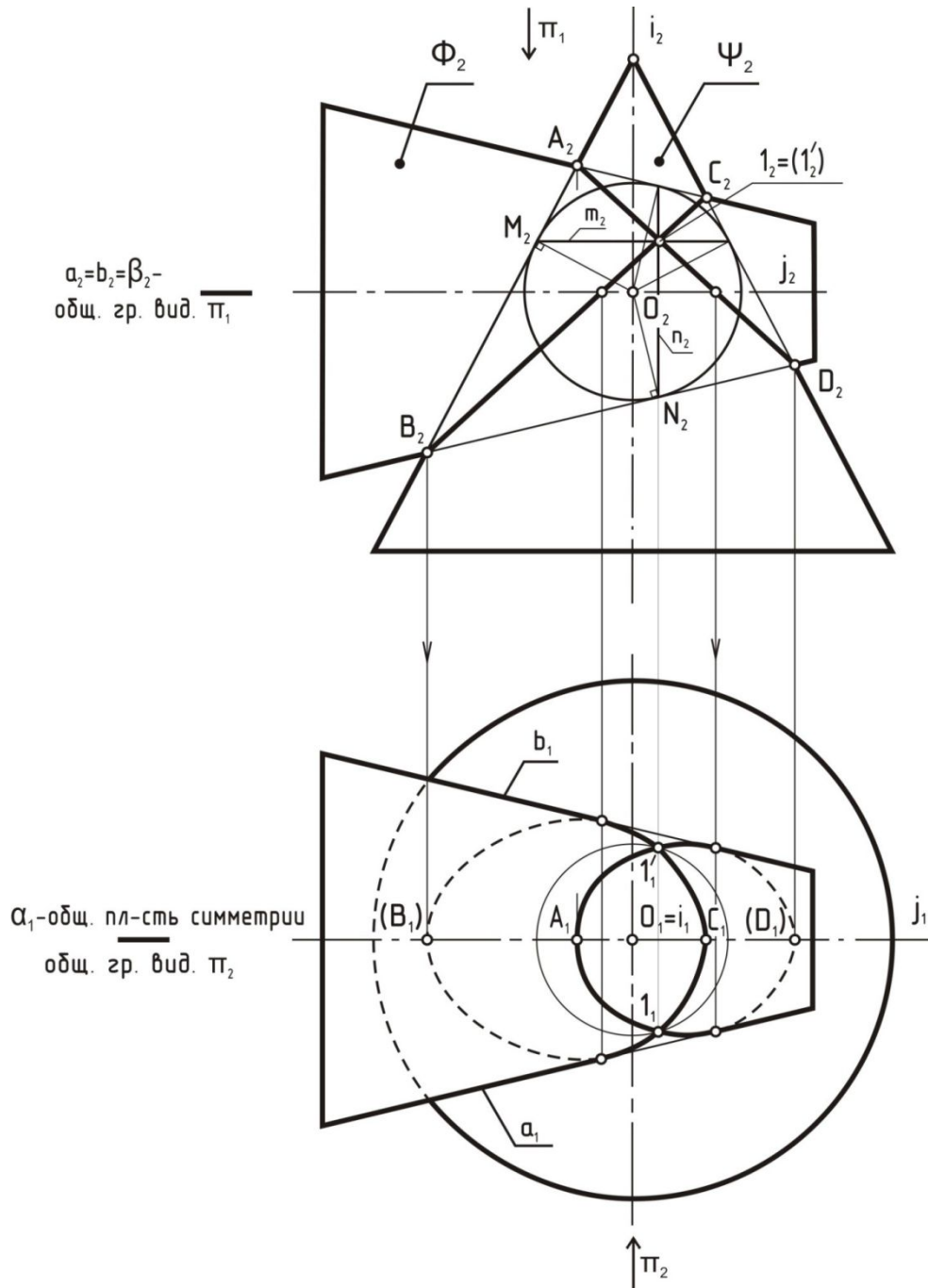




# СПОСОБ ЭКЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР



# Частный случай пересечения поверхностей (Теорема Монжа)



# литература

- 1) Адонкина Е. В. Начертательная геометрия и Инженерная графика. Мультимедийное сопровождение лекций : электронный курс для преподавателей и студентов архитектурно-строительных университетов [ Электронный ресурс ] / Е. В. Адонкина; Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). – Электрон. текст., граф. дан. – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2011.
- 2) Блинова Л.В., Куркина Л.В. Пересечение поверхностей [Электронный ресурс]: Учебно-методическое пособие.— Электрон. дан.— Барнаул: АлтГТУ, 2015.— Режим доступа: [http://new.elib.altstu.ru/eum/download/ngig/Blinova\\_peresech.pdf](http://new.elib.altstu.ru/eum/download/ngig/Blinova_peresech.pdf), авторизованный

