МАТЕМАТИКА

СТРОИТЕЛЬСТВО

БАКАЛАВРИАТ

2 семестр

2022

6. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

6.1 Теоремы о дифференцируемых функциях

6.2 Исследование функции и построение её графика

6.3 Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции

6. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

6.2 Исследование функции и построение её графика

6.2.1 Возрастание и убывание функции

6.2.2 Экстремум функции

6.2.3 Выпуклость и вогнутость графика функции

6.2.4 Точки перегиба

6.2.5 Асимптоты графика функции

6.2.6 План исследования функции и построение её графика

6.2.1 ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

Вспомним определения из 1 семестра

Пусть функция ***y = f(x)*** определена на множестве ***D(f)*** и пусть ***$D_1 \subset D(f)$***.

Если $\forall x_1, x_2 \in D_1;\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

то функция называется возрастающей.

Если $\forall x_1, x_2 \in D_1;\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

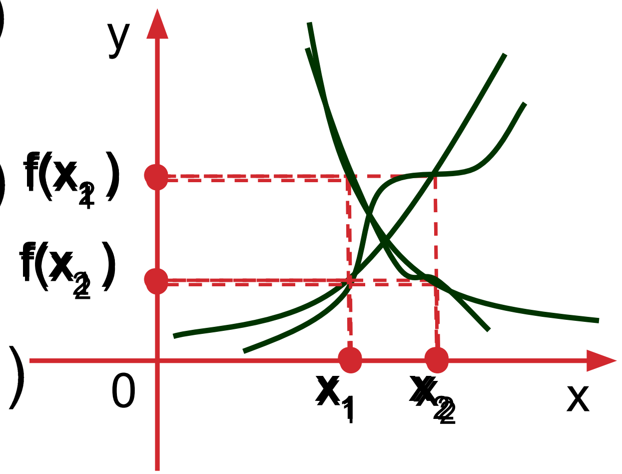
то функция называется убывающей.

Если $\forall x_1, x_2 \in D_1;\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

то функция называется неубывающей.

Если $\forall x_1, x_2 \in D_1;\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

то функция называется невозрастающей.



Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие функции называются монотонными на множестве D_1, интервал, на котором функция монотонна называется интервалом монотонности.

Возрастающие и убывающие функции называются строго монотонными.

6.2.1 ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

Теорема. (необходимые условия монотонности)

Пусть функция ***y* = *f*(*x*)** дифференцируема на отрезке ***[a; b]***.
Тогда:

***f*(*x*)** – возрастающая $\Rightarrow f'(x) \geq 0,$

***f*(*x*)** – убывающая $\Rightarrow f'(x) \leq 0,$

***f*(*x*)** – неубывающая $\Rightarrow f'(x) \geq 0,$

***f*(*x*)** – невозрастающая $\Rightarrow f'(x) \leq 0.$

Примеры.

1) $f(x) = 2x$ – возрастающая $\Rightarrow$ $f'(x) = (2x)' = 2 > 0$

2) $f(x) = x^3$ – возрастающая $\Rightarrow$ $f'(x) = (x^3)' = 3x^2 \geq 0$

6.2.1 ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

Теорема. (достаточные условия монотонности)

Пусть функция ***y = f(x)*** дифференцируема на отрезке ***[a; b]***.
Тогда:

$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow$ ***f(x)*** – возрастающая,

$f'(x) < 0 \quad \Rightarrow$ ***f(x)*** – убывающая,

$f'(x) \geq 0 \quad \Rightarrow$ ***f(x)*** – неубывающая,

$f'(x) \leq 0 \quad \Rightarrow$ ***f(x)*** – невозрастающая.

Точки, в которых функция ***y = f(x)*** имеет производную, равную 0, или производная не существует, называются критическими точками 1-го рода.

6.2.1 ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

Исследование функции на возрастание и убывание

1) Найти область определения функции ***y = f(x)***.

2) Найти производную функции.

3) Найти критические точки 1-го рода, они разбивают область определения функции на интервалы монотонности.

4) Начертить ось Ох и отметить на ней область определения и интервалы монотонности.

5) Найти знак производной функции на каждом интервале монотонности и сделать выводы, используя достаточные условия монотонности:

а) если $f'(x) > 0,$ то это интервал возрастания,

б) если $f'(x) < 0,$ то это интервал убывания.

6) Выписать интервалы возрастания и убывания функции.

6.2.1 ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

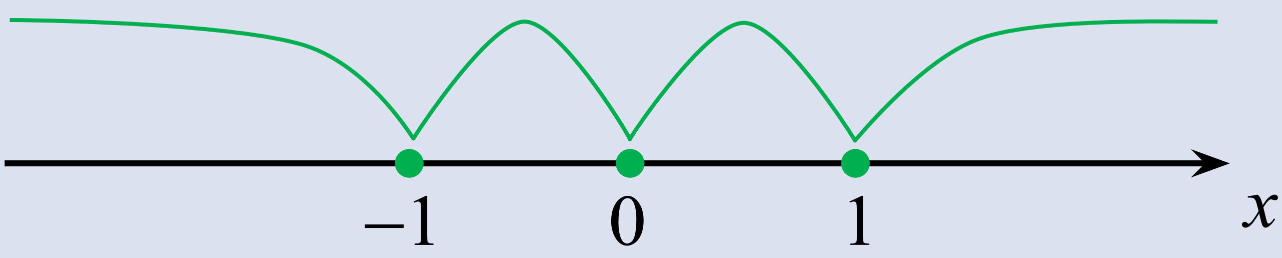
Пример

Исследовать функцию на возрастание и убывание $y = \frac{3}{5}x - \sqrt[5]{x^3}.$

$$D(y) = (-\infty; +\infty)$$

$$y' = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)$$

$$y' = 0 \;\Rightarrow\; 1 - \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = 0 \;\Rightarrow\; 1 = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

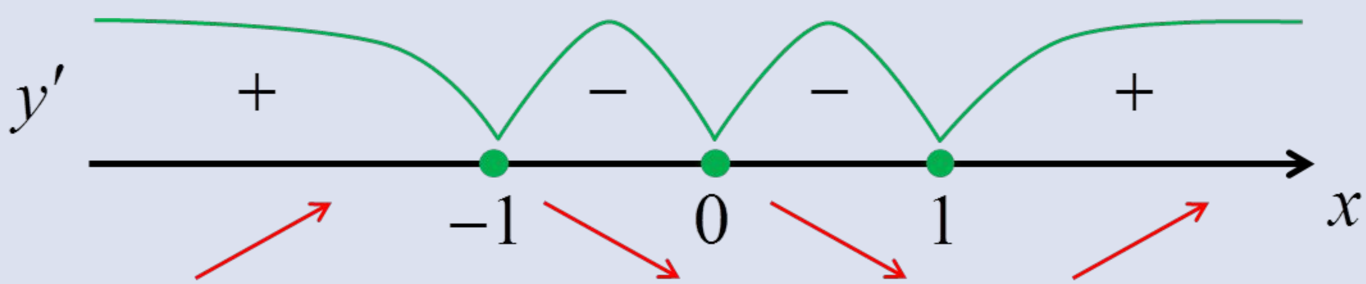


6.2.1 ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

Пример

$$y'(-32) = y'(32) = \frac{3}{5}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[5]{32^2}}\right) = \frac{3}{5}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{20} > 0$$

$$y'\left(-\frac{1}{32}\right) = y'\left(\frac{1}{32}\right) = \frac{3}{5}\left(1 - \sqrt[5]{32^2}\right) = \frac{3}{5}(1-4) = -\frac{9}{5} < 0$$



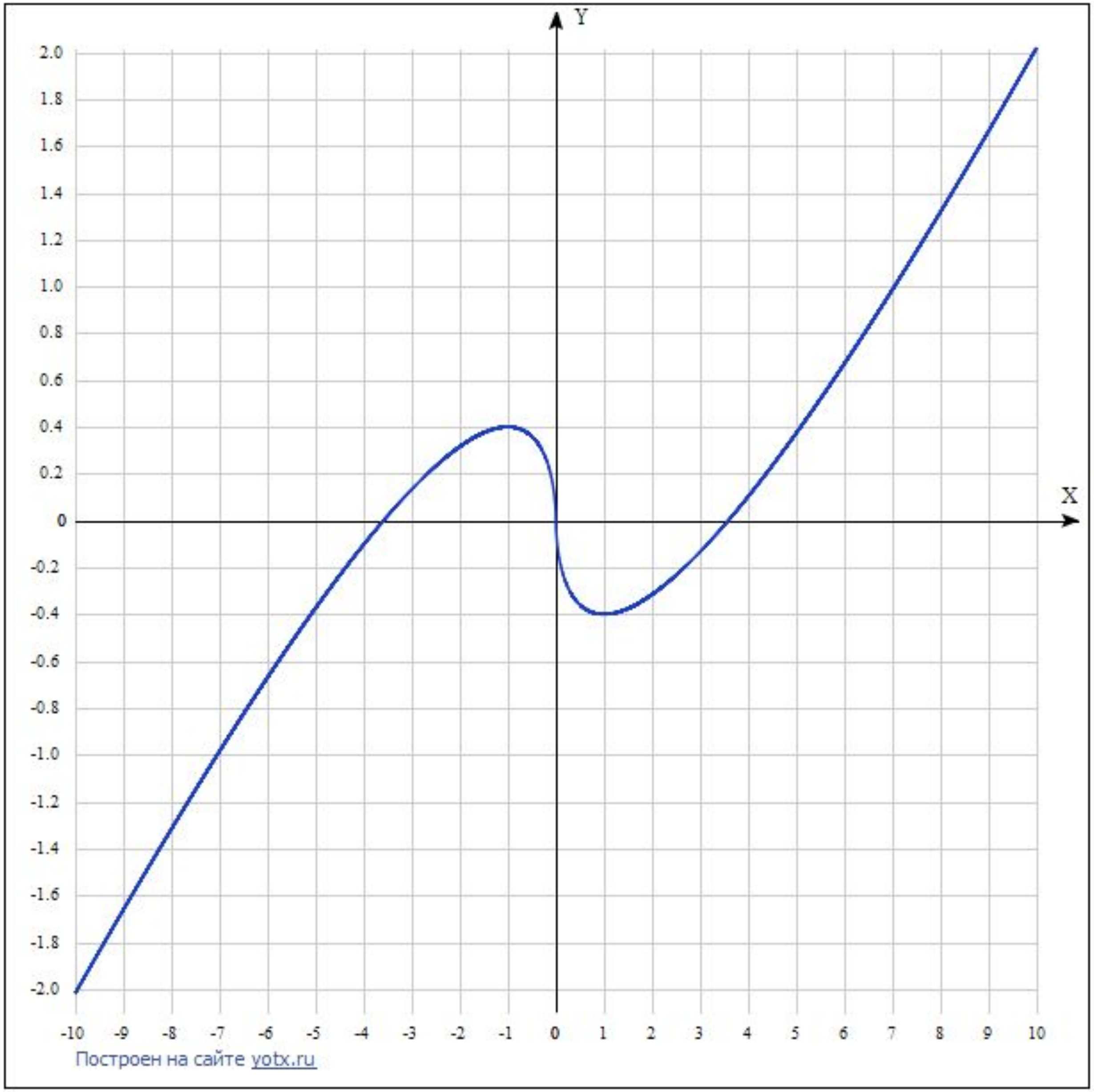
Функция возрастает при $x \in (-\infty; -1)$ и $x \in (1; +\infty)$

Функция убывает при $x \in (-1; 0)$ и $x \in (0; 1)$

6.2.1 ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

$$y = \frac{3}{5}x - \sqrt[5]{x^3}$$

Сравните полученные результаты с графиком функции



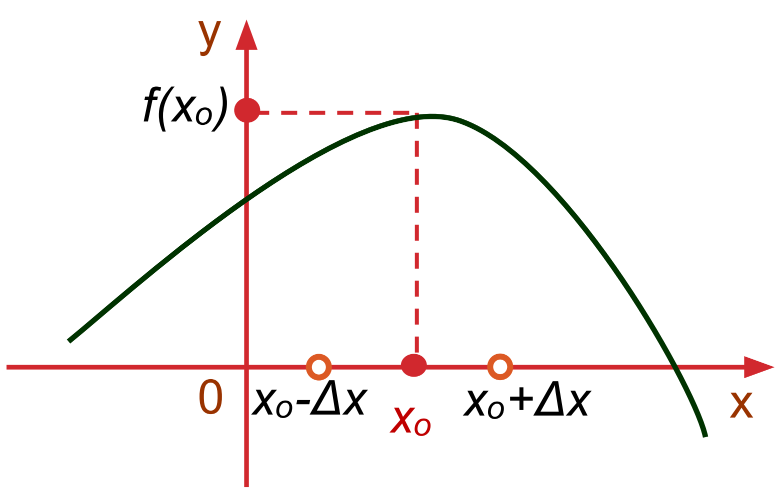
6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Точка x_0 называется **точкой локального максимума** функции ***y = f(x)***, если существует такая окрестность этой точки, что для любой точки из этой окрестности выполняется неравенство: $f(x_0) \ge f(x)$.

или

Точка x_0 называется **точкой локального максимума** функции ***y = f(x)***, если

$$\exists U(x_0)\ :\ \forall x \in U(x_0)\quad f(x_0) \ge f(x).$$



x_0 – точка максимума

Значение функции в точке локального максимума называется **локальным максимумом функции**.

$f(x_0)$ – максимум функции

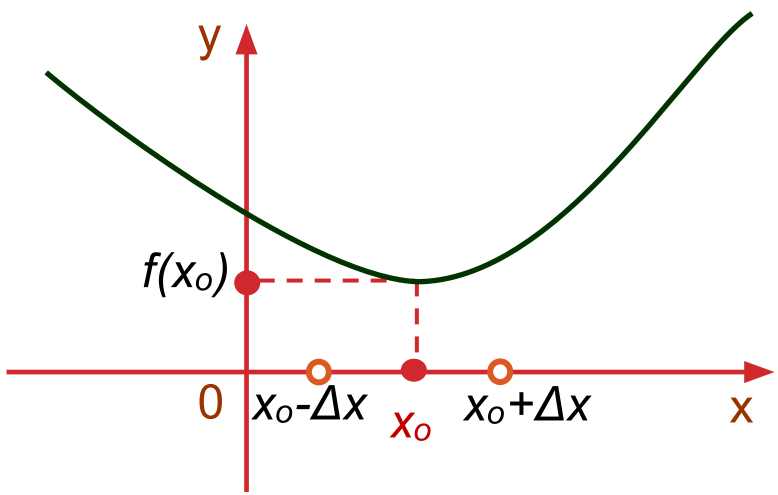
6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Точка x_0 называется **точкой локального минимума** функции ***y = f(x)***, если существует такая окрестность этой точки, что для любой точки из этой окрестности выполняется неравенство: $f(x_0) \le f(x)$.

или

Точка x_0 называется **точкой локального минимума** функции ***y = f(x)***, если

$$\exists U(x_0)\ :\ \forall x \in U(x_0)\quad f(x_0) \le f(x).$$

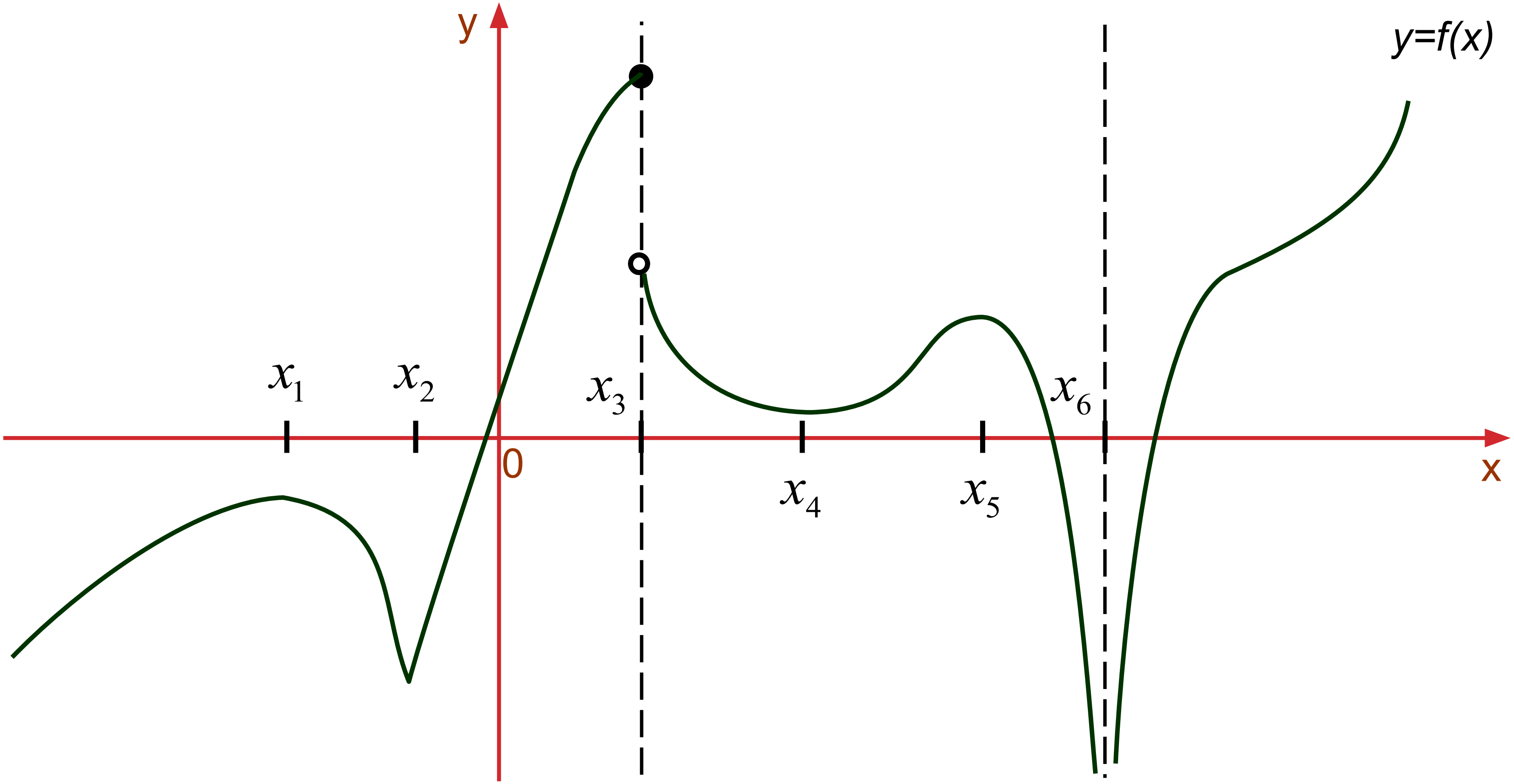


x_0 – точка минимума

Значение функции в точке локального минимума называется **локальным минимумом функции**.

$f(x_0)$ – минимум функции

6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ



Точки экстремума: точки минимума: $x_2, x_4,$

точки максимума: x_1, x_3, x_5

6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Значение функции в точке локального максимума называется локальным максимумом функции.

Значение функции в точке локального минимума называется локальным минимумом функции.

Понятие «экстремум» является обобщающим, это или локальный максимум, или локальный минимум.

Замечания.

1) Слово «локальный» можно опускать, не забывая, что речь идёт о достаточно малой окрестности точки.
2) Функция может иметь экстремум только во внутренних точках области определения.

6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Теорема. (необходимое условие существования экстремума)

Если функция ***y = f(x)*** дифференцируема в некоторой точке и имеет в ней экстремум, то производная функции в этой точке равна 0, то есть

$$\left.\begin{array}{l} \exists f'(x_0) \\ x_0 \text{ точка экстремума} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Замечания.

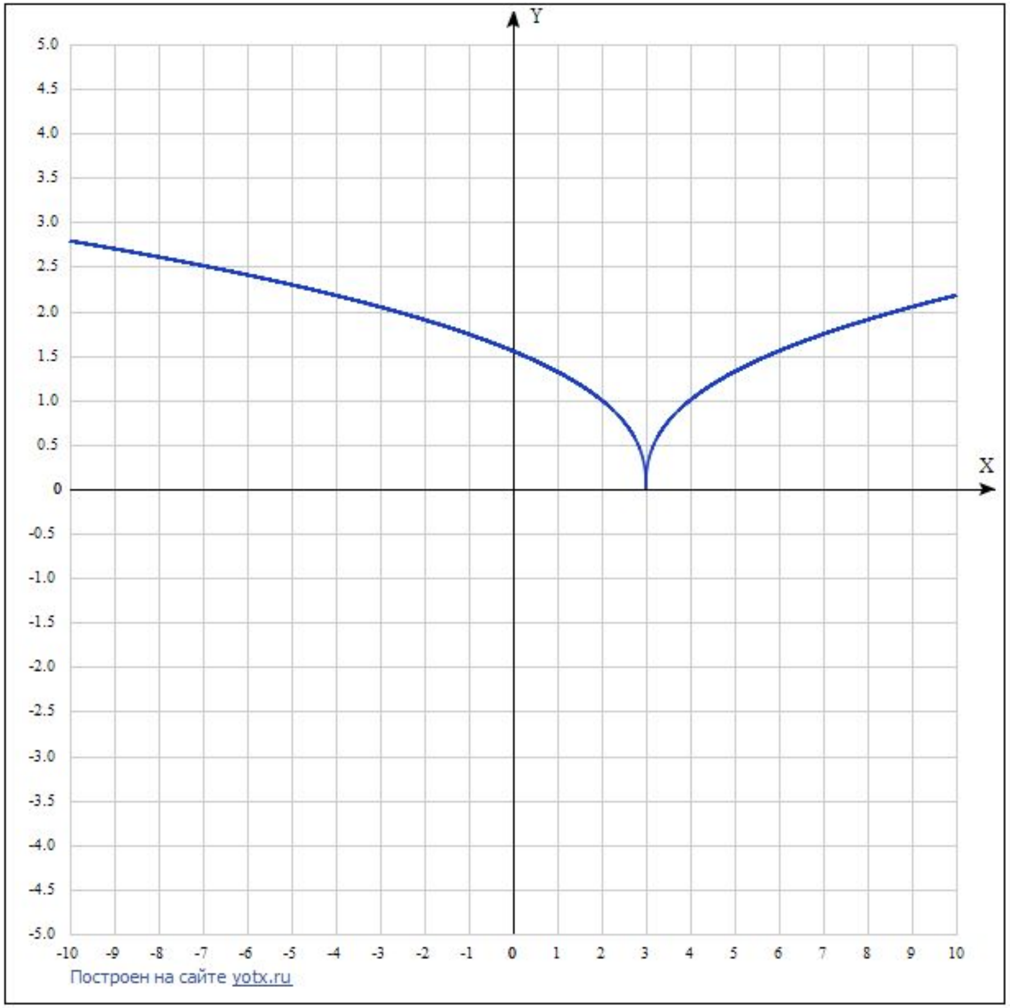
1) Обратная теорема не верна.
2) Есть функции, которые имеют экстремум в некоторой точке, но не имеют в ней производную.
3) Точками возможного экстремума являются только критические точки 1-го рода.

6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

2) Есть функции, которые имеют экстремум в некоторой точке, но не имеют в ней производную.

$$y = \sqrt[5]{(x-3)^2}$$

$$y' = \frac{2}{5 \cdot \sqrt[5]{(x-3)^3}}$$



В точке ***x* = *3*** значение функции существует и равно ***0***, а производная не существует.

6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Теорема. (1 достаточное условие существования экстремума)

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_o

и дифференцируема в ней, за исключением, быть может, самой точки x_o.

Если производная функции меняет знак при переходе через точку x_o

то x_o – точка локального экстремума, причём:

а) если с «+» на «-», то это точка максимума,

б) если с «-» на «+», то это точка минимума.

6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Теорема. (2 достаточное условие существования экстремума)

Пусть функция $y = f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_o,

пусть $f'(x_o) = 0$, а $f''(x_o) \neq 0$.

Тогда x_o – точка локального экстремума, причём:

а) если $f''(x_o) < 0$, то это точка максимума,

б) если $f''(x_o) > 0$, то это точка минимума.

6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

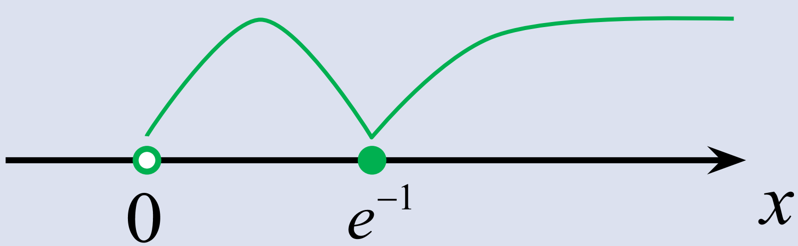
Пример

Исследовать функцию на экстремум $y = x \cdot \ln x.$

$D(y) = (0; +\infty)$ $\qquad y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

$$y' = 0 \;\Rightarrow\; \ln x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \ln x = -1 \;\Rightarrow\; x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

I способ:

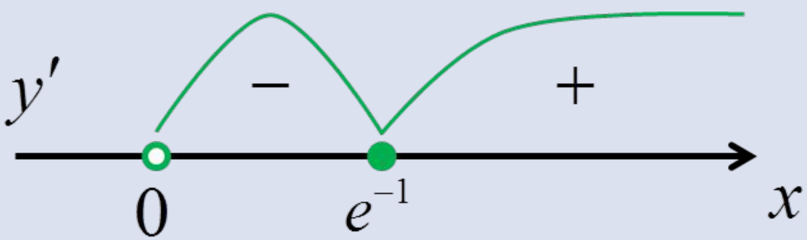


$$y'\left(e^{-2}\right) = \ln e^{-2} + 1 = -2 + 1 = -1 < 0$$

$$y'(e) = \ln e + 1 = 1 + 1 = 2 > 0$$

6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Пример



$x = e^{-1}$ – точка минимума.

$$y\left(e^{-1}\right) = e^{-1} \cdot \ln e^{-1} = e^{-1} \cdot (-1) = -e^{-1}$$

$y_{\min} = -e^{-1}$ – минимум функции.

II способ:

$$y'' = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x}$$

$$y''\left(e^{-1}\right) = \frac{1}{e^{-1}} = e > 0 \quad \Rightarrow \quad x = e^{-1}$$ – точка минимума.

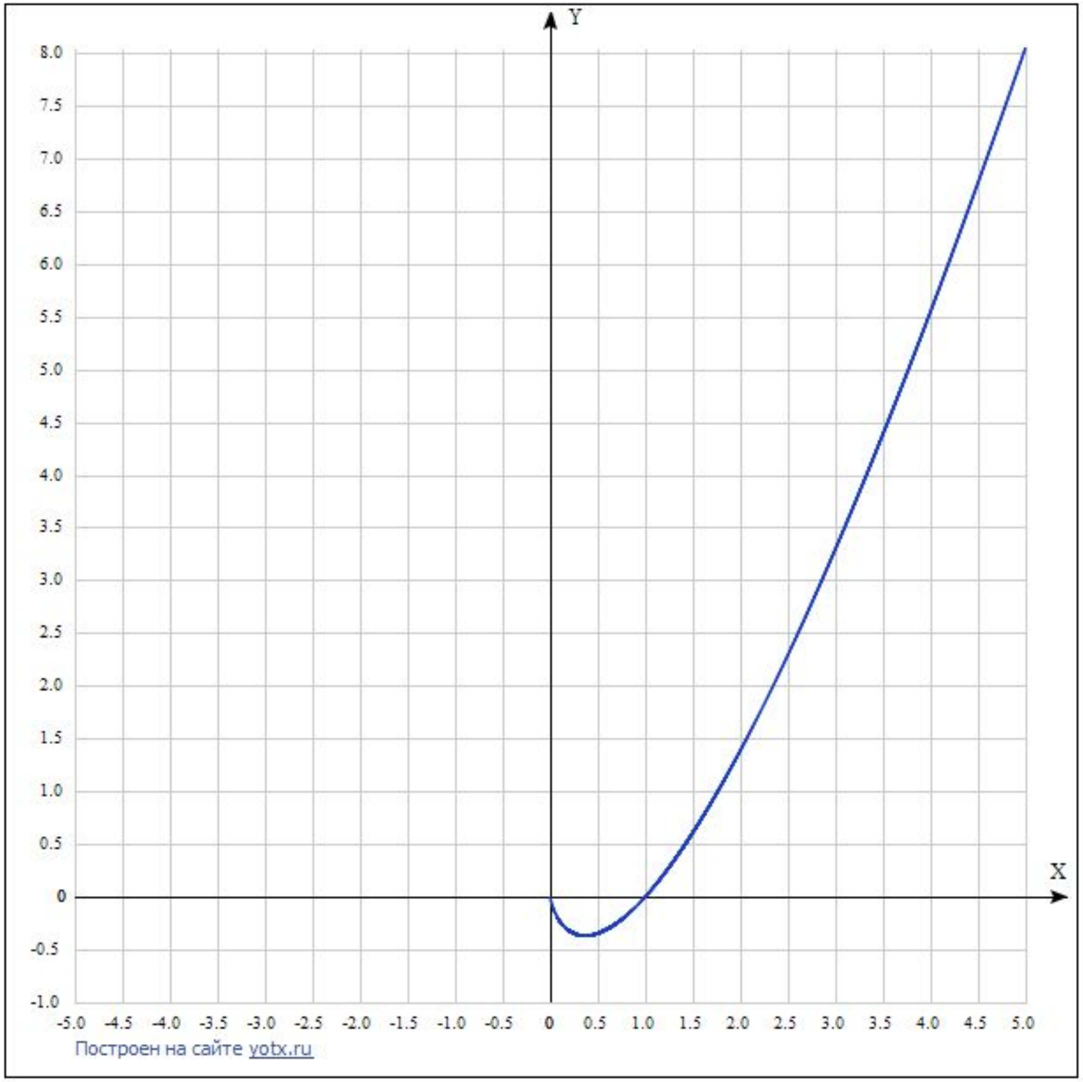
$$y\left(e^{-1}\right) = e^{-1} \cdot \ln e^{-1} = e^{-1} \cdot (-1) = -e^{-1}$$

$y_{\min} = -e^{-1}$ – минимум функции.

6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

$$y = x \cdot \ln x$$

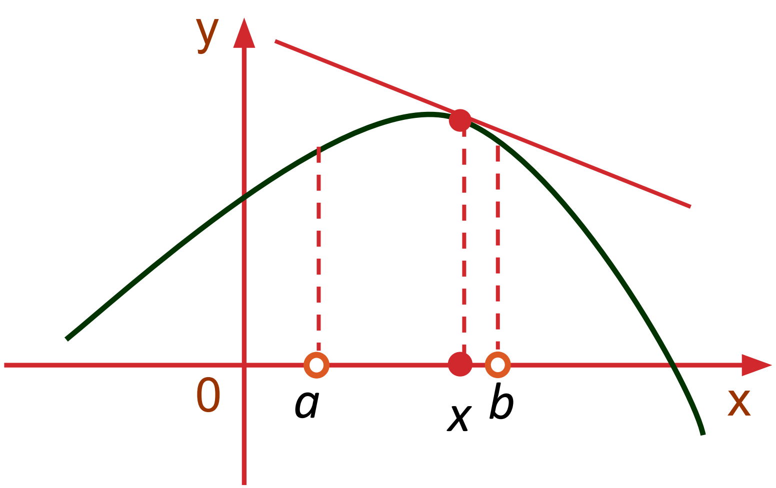
Сравните полученные результаты с графиком функции

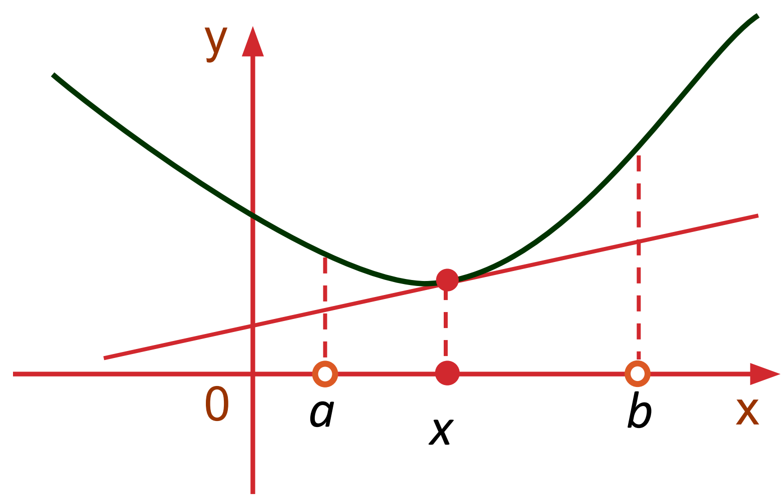


6.2.3 ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Пусть функция ***y = f(x)*** дифференцируема на интервале ***(a; b)***.
Тогда:

1) Если график функции на интервале ***(a; b)*** расположен ***ниже*** касательной, проведённой через любую точку графика с абсциссой ***x∈(a; b)***, то он называется выпуклым.
2) Если график функции на интервале ***(a; b)*** расположен ***выше*** касательной, проведённой через любую точку графика с абсциссой ***x∈(a; b)***, то он называется вогнутым.





6.2.3 ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Теорема. (необходимое и достаточное условие выпуклости и вогнутости)

Пусть функция ***y = f(x)*** дважды непрерывно дифференцируема на интервале ***(a; b)***.
Тогда для любой точки из этого интервала:

$f''(x) \le 0 \quad \Leftrightarrow$ график функции является выпуклым,

$f''(x) \ge 0 \quad \Leftrightarrow$ график функции является вогнутым.

6.2.4 ТОЧКИ ПЕРЕГИБА ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Точка $M(x_0; f(x_0))$ графика функции $y = f(x)$ называется точкой перегиба, если она разделяет выпуклую и вогнутую части этого графика.

Замечание: x_0 – только точка непрерывности.

Теорема. (необходимое условие существования точки перегиба)

Пусть функция $y = f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в точке x_0.

Пусть точка $M(x_0; f(x_0))$ есть точка перегиба графика функции.

Тогда $f''(x_0) = 0$.

Точки, в которых функция $y = f(x)$ имеет производную второго порядка, равную 0, или эта производная не существует, называются критическими точками 2-го рода.

6.2.4 ТОЧКИ ПЕРЕГИБА ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Замечания.

1) График функции может иметь точку перегиба $M(x_0; f(x_0))$, но $f''(x_0)$ может не существовать.
2) Производная второго порядка в точке x_0 может быть равна 0, но точка $M(x_0; f(x_0))$ не будет являться точкой перегиба, поэтому обратная теорема не верна.
3) Возможными абсциссами точек перегиба являются только критические точки 2-го рода.

Теорема. (достаточное условие существования точки перегиба)

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности критической точки 2-го рода x_0
и дважды дифференцируема в ней, за исключением, быть может, самой точки x_0.
Если производная второго порядка функции меняет знак при переходе через точку x_0, то точка $M(x_0; f(x_0))$ есть точка перегиба графика функции.

6.2.4 ТОЧКИ ПЕРЕГИБА ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Исследование функции на выпуклость и вогнутость
Нахождение точек перегиба

1) Найти область определения функции ***y = f(x)***.

2) Найти производную второго порядка функции.

3) Найти критические точки 2-го рода, они разбивают область определения функции на интервалы.

4) Начертить ось Ох и отметить на ней область определения и эти интервалы.

5) Найти знак производной второго порядка функции на каждом интервале и сделать выводы о выпуклости и вогнутости графика на них.

6) Выписать интервалы, где график является выпуклым или вогнутым.

7) Найти и выписать точки перегиба графика функции.

6.2.4 ТОЧКИ ПЕРЕГИБА ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Пример

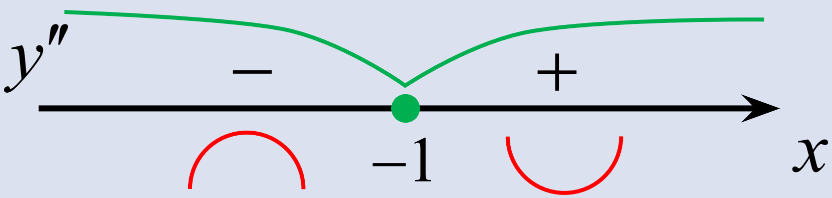
Исследовать функцию на выпуклость и вогнутость, найти точки перегиба

$$y = (x+1)^3 - 4x.$$

$$D(y) = (-\infty; +\infty)$$

$$y' = 3(x+1)^2 - 4 \qquad y'' = 6(x+1)$$

$$y'' = 0 \;\Rightarrow\; 6(x+1) = 0 \;\Rightarrow\; x = -1$$



$$y''(-2) = 6(-2+1) = -6 < 0$$

$$y''(0) = 6(0+1) = 6 > 0$$

График выпуклый на интервале $(-\infty; -1)$.

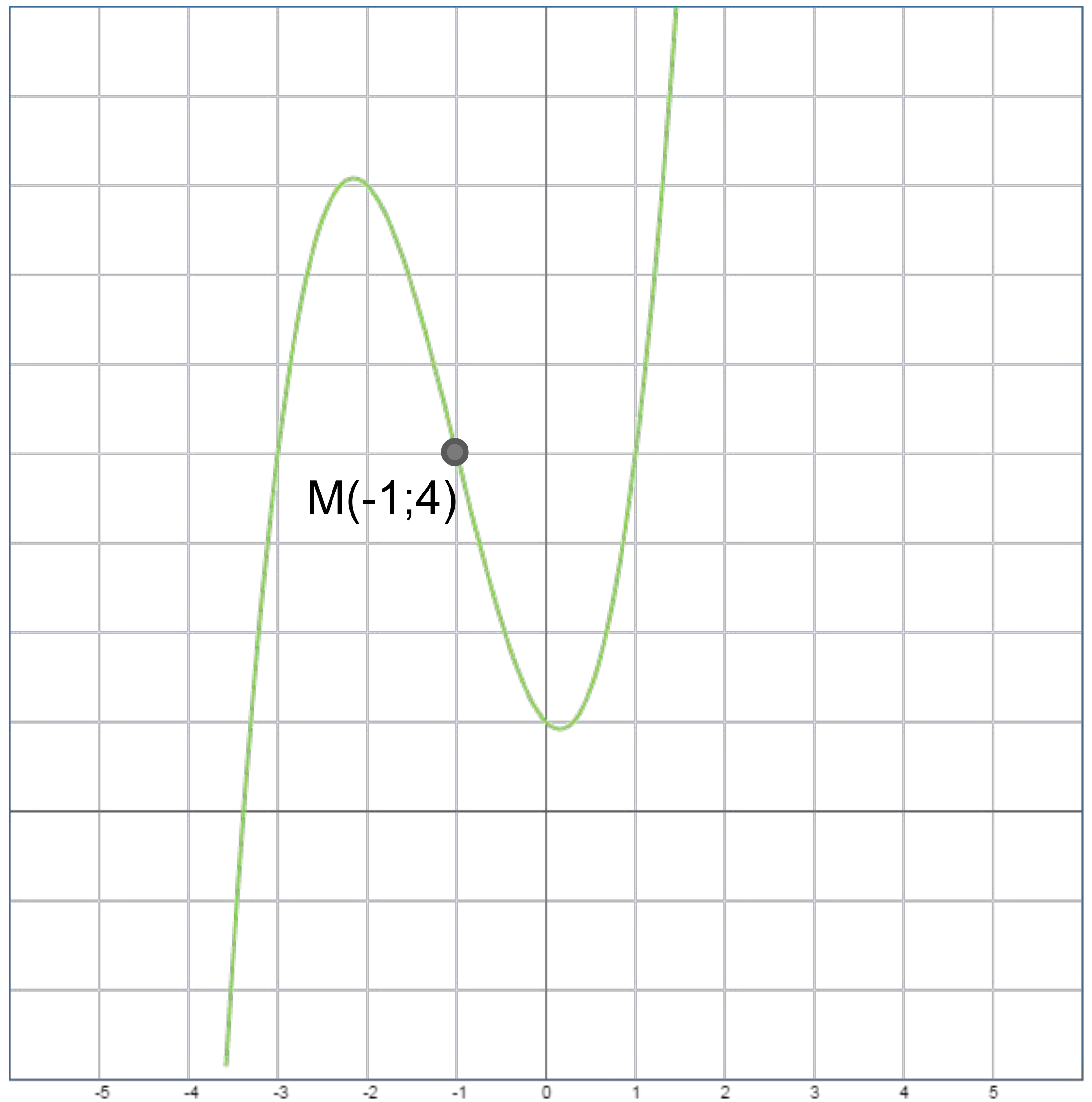
График вогнутый на интервале $(-1; +\infty)$.

$y(-1) = (-1+1)^3 - 4\cdot(-1) = 4 \;\Rightarrow\; A(-1;4)$ – точка перегиба.

6.2.4 ТОЧКИ ПЕРЕГИБА ГРАФИКА ФУНКЦИИ

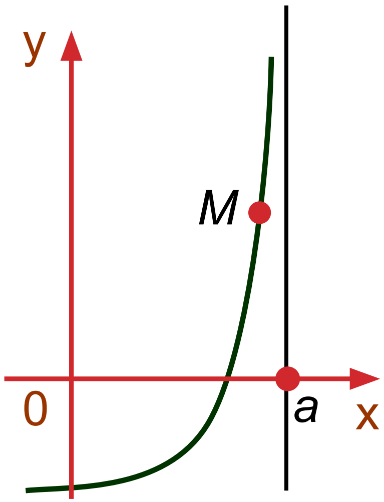
$$y = (x+1)^3 - 4x$$

Сравните полученные результаты с графиком функции

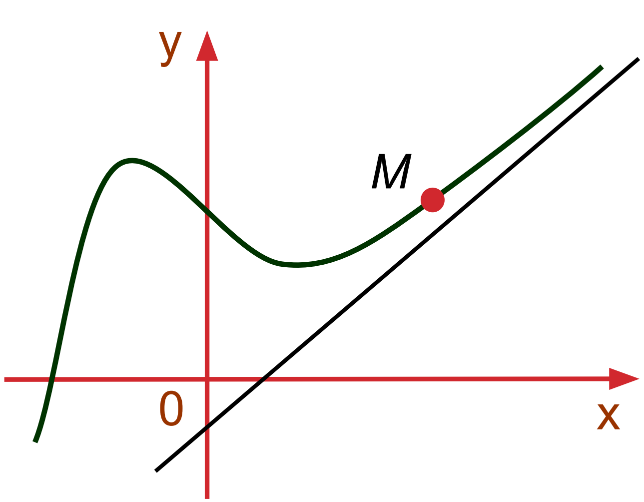


6.2.5 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

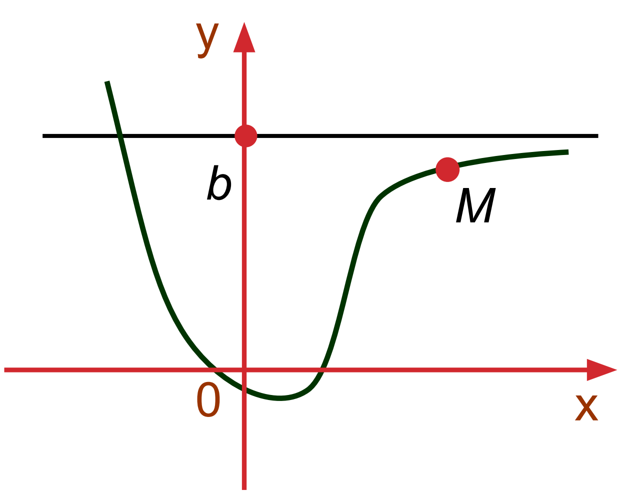
Прямая линия ***L: Ax + By + C = 0*** называется асимптотой графика функции ***y= f(x)*** , если расстояние ***d*** от точки ***M(x; f(x))*** графика до этой прямой стремится к 0 при неограниченном удалении точки ***M*** от начала координат.



x = a
вертикальная асимптота



y = kx+b
наклонная асимптота



y = b
горизонтальная асимптота

6.2.5 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Теорема. (необходимое и достаточное условие существования вертикальной асимптоты)

Прямая ***L: x = a*** является вертикальной асимптотой графика функции ***y = f(x)*** тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из соотношений:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$$

Замечание.

Точки разрыва 2-го рода функции ***y = f(x)*** показывают, где могут находиться вертикальные асимптоты.

6.2.5 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Пример

Найти вертикальные асимптоты графика функции $y = \ln\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{x}.$

Найдём область определения:

$$\begin{cases} 1-x^2>0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2<1 \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x|<1 \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1<x<1 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

$$D(y) = (-1;0)\cup(0;1)$$

Исследуем функцию на границах области определения и в точке разрыва:

$$\lim_{x\to -1+0} y = \ln\sqrt{1-(-1+0)^2} + \frac{1}{-1+0} = \ln\sqrt{1-(1-0)^2} - 1 =$$

$$= \ln\sqrt{0+0} - 1 = -\infty - 1 = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1-0} y = \ln\sqrt{1-(1-0)^2} + \frac{1}{-1+0} = -\infty$$

6.2.5 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Пример

$$\lim_{x\to 0-0} y = \ln\sqrt{1-\left(0-0\right)^2} + \frac{1}{0-0} = \ln 1 - \infty = 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0+0} y = \ln\sqrt{1-\left(0+0\right)^2} + \frac{1}{0+0} = \ln 1 + \infty = 0 + \infty = +\infty$$

Значит, $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода.

Получили:

$x = -1$ – правосторонняя вертикальная асимптота,

$x = 0$ – двусторонняя вертикальная асимптота,

$x = 1$ – левосторонняя вертикальная асимптота.

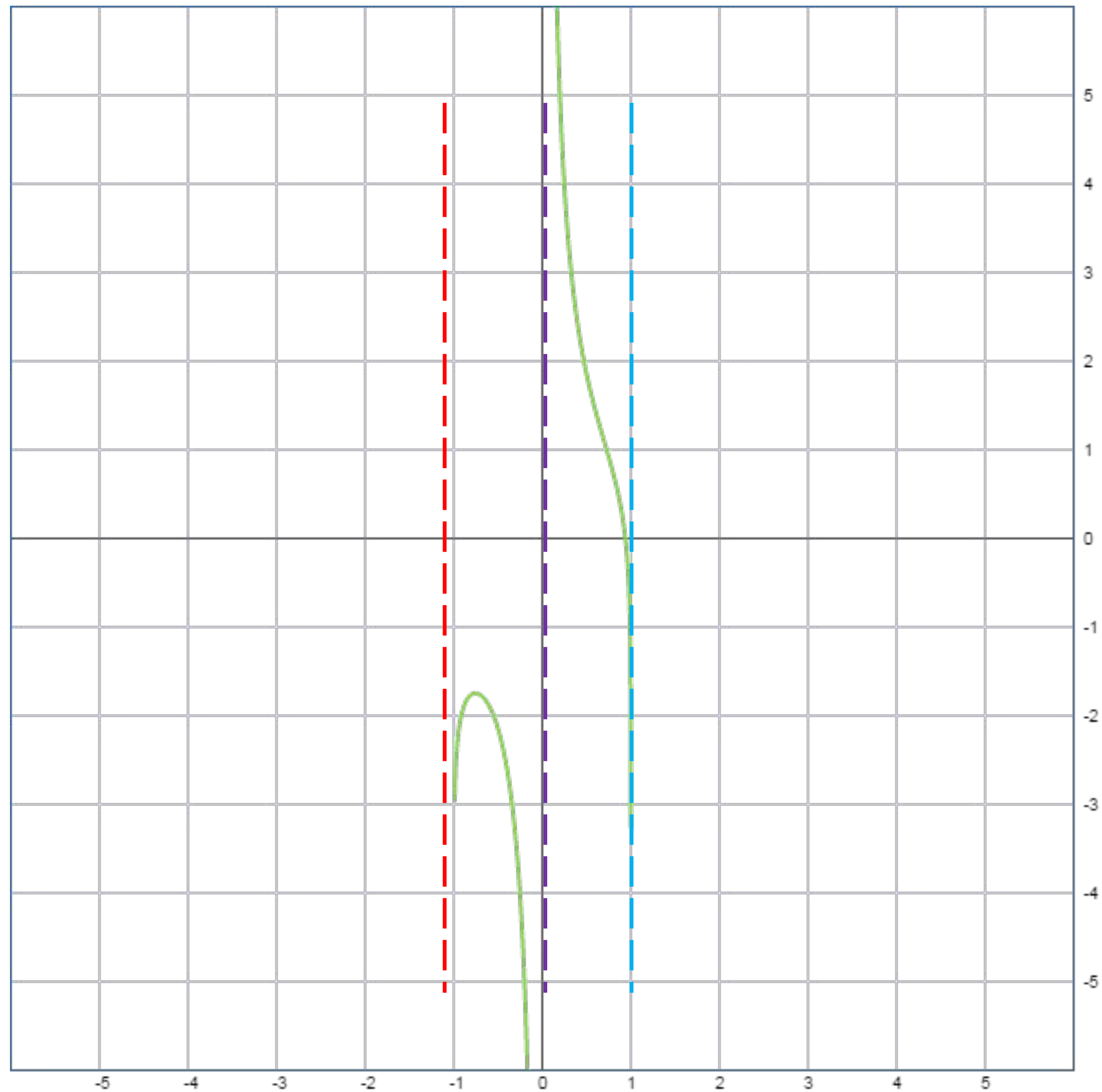
6.2.5 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

$$y = \ln\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{x}$$

$x = -1$ – правосторонняя

$x = 1$ – левосторонняя

$x = 0$ – двусторонняя



Сравните полученные результаты с графиком функции

6.2.5 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Теорема. (необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты)

Прямая ***L: y = kx+b*** является наклонной асимптотой графика функции ***y = f(x)*** тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - k \cdot x \right)$$

Замечания.

1) Если хотя бы один из пределов теоремы не существует или равен **∞**, то наклонной асимптоты нет.
2) Если ***k = 0***, а ***b*** – любое число, то получаем горизонтальную асимптоту ***L: y = b***.
3) Иногда полезно рассматривать пределы отдельно на **+ ∞** и на **- ∞**.

Пример.

Найти асимптоты графика функции $1)\ \ y = x \cdot 3^x, \qquad 2)\ \ y = \dfrac{x^3}{1+x^2}.$

6.2.5 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Примеры

Найти асимптоты графика функции: $1)\ \ y = x\cdot 3^x.$

$D(y) = (-\infty; +\infty) \quad \Rightarrow$ вертикальных асимптот нет.

Найдём наклонные асимптоты (сначала слева, потом справа) $\boldsymbol{y = kx + b}$:

$$k_- = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot 3^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} 3^x = 0$$

$$b_- = \lim_{x\to-\infty}\left(x\cdot 3^x - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot 3^x = \langle\infty\cdot 0\rangle = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{3^{-x}} = \left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x)'}{\left(3^{-x}\right)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3^{-x}\cdot\ln 3\cdot(-1)} = \frac{1}{-3^{+\infty}} = \frac{1}{-\infty} = -0$$

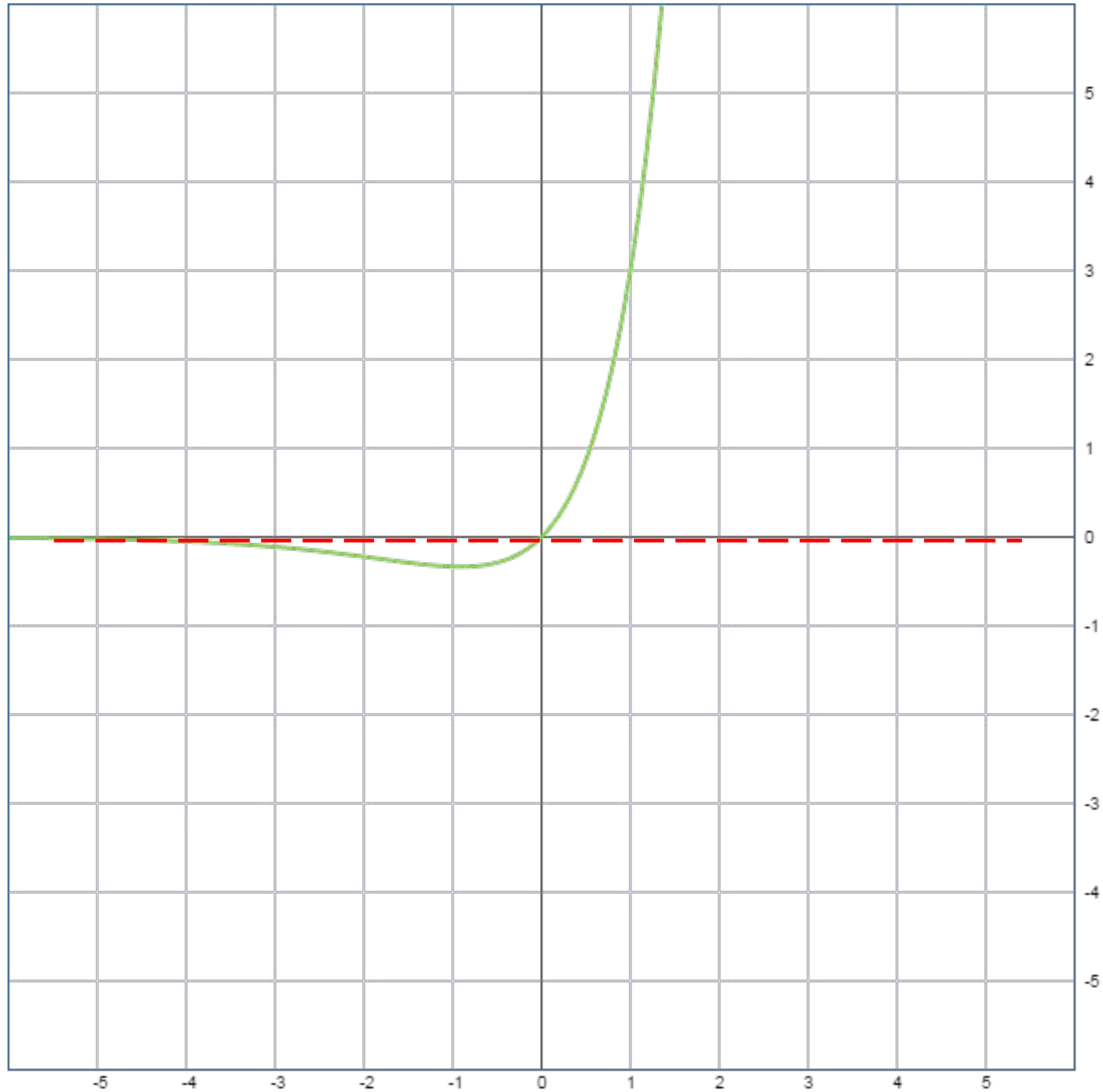
$$k_+ = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot 3^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 3^x = +\infty$$

Получили:
$\boldsymbol{y = 0}$ – левосторонняя горизонтальная асимптота,
справа асимптоты нет.

6.2.5 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

1) $y = x \cdot 3^x$

$y = 0$ — левосторонняя,
горизонтальная



Сравните полученные результаты с графиком функции

6.2.5 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Примеры

Найти асимптоты графика функции: 2) $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}$.

$D(y)=(-\infty;+\infty)$ $\Rightarrow$ вертикальных асимптот нет.

Найдём наклонные асимптоты (для рациональной дроби только двусторонние) $\boldsymbol{y=kx+b}$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\left(1+x^2\right)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{x^2}+1}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{1+x^2}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x-x^3}{1+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1+x^2}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x)'}{\left(1+x^2\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{2x}=\frac{-1}{\infty}=0$$

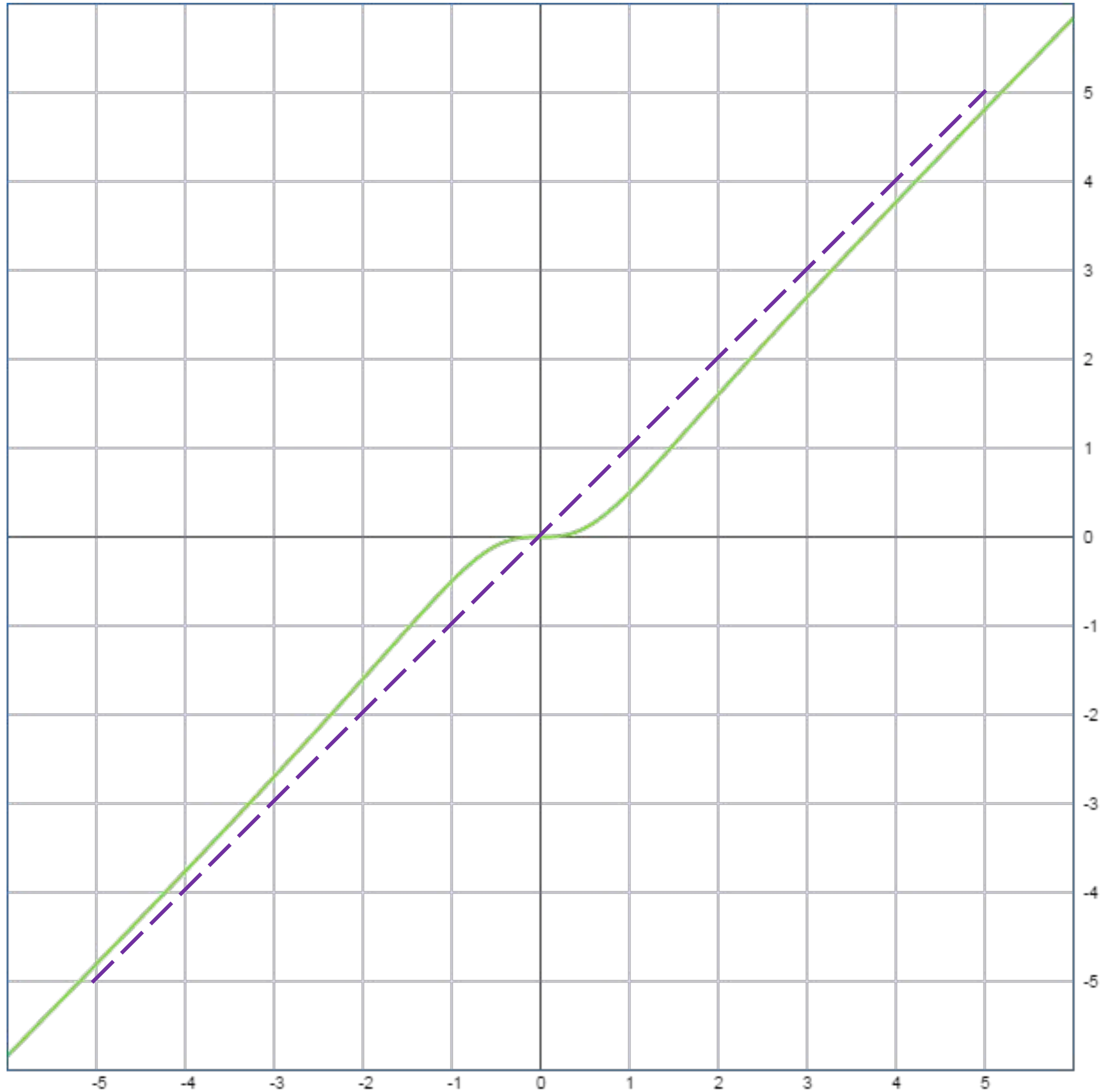
Получили:

$\boldsymbol{y=x}$ – двусторонняя наклонная асимптота.

6.2.5 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

$$2)\quad y=\frac{x^3}{1+x^2}$$

$y = x$ – двусторонняя, наклонная



Сравните полученные результаты с графиком функции

6.2.6 ПЛАН ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЁ ГРАФИКА

1) Найти область определения функции ***y = f(x)***.
2) Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и односторонние пределы в этих точках.
3) Найти асимптоты графика функции, выяснить поведение функции на границе области определения.
4) Исследовать функцию на чётность-нечётность, периодичность.
5) Найти производную 1-го порядка, исследовать функцию на экстремум, выписать интервалы возрастания и убывания функции.
6) Найти производную 2-го порядка, найти точки перегиба графика функции, выписать интервалы, где график является выпуклым или вогнутым.
7) Провести дополнительные исследования (при необходимости).
8) Все полученные данные записать в таблицу.
9) Сделать чертёж графика функции ***y = f(x)***.

Пример (разберём на практике)
Провести полное исследование функции и построить её график.

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ СЛЕДУЕТ…