

# МАТЕМАТИКА

СТРОИТЕЛЬСТВО

БАКАЛАВРИАТ

2 семестр

2022



# 6. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

6.1 Теоремы о дифференцируемых функциях

6.2 Исследование функции и построение её графика

6.3 Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции

# 6. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

## 6.2 Исследование функции и построение её графика

6.2.1 Возрастание и убывание функции

6.2.2 Экстремум функции

6.2.3 Выпуклость и вогнутость графика функции

6.2.4 Точки перегиба

6.2.5 Асимптоты графика функции

6.2.6 План исследования функции и построение её графика

# 6.2.1 ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

Вспомним определения из 1 семестра

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на множестве  $D(f)$  и пусть  $D_1 \subset D(f)$ .

Если  $\forall x_1, x_2 \in D_1; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

то функция называется **возрастающей**.

Если  $\forall x_1, x_2 \in D_1; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

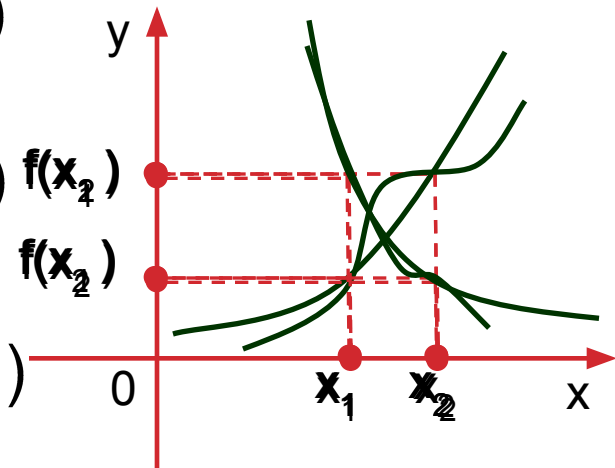
то функция называется **убывающей**.

Если  $\forall x_1, x_2 \in D_1; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

то функция называется **неубывающей**.

Если  $\forall x_1, x_2 \in D_1; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

то функция называется **невозрастающей**.



Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие функции называются **МОНОТОННЫМИ** на множестве  $D_1$ , интервал, на котором функция монотонна называется **ИНТЕРВАЛОМ МОНОТОННОСТИ**.

Возрастающие и убывающие функции называются **СТРОГО МОНОТОННЫМИ**.

## 6.2.1 ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

**Теорема.** (необходимые условия монотонности)

Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема на отрезке  $[a; b]$ .

Тогда:

$$f(x) \text{ – возрастающая} \quad \Rightarrow \quad f'(x) \geq 0,$$

$$f(x) \text{ – убывающая} \quad \Rightarrow \quad f'(x) \leq 0,$$

$$f(x) \text{ – неубывающая} \quad \Rightarrow \quad f'(x) \geq 0,$$

$$f(x) \text{ – невозрастающая} \quad \Rightarrow \quad f'(x) \leq 0.$$

**Примеры.**

$$1) \quad f(x) = 2x \quad \text{– возрастающая} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (2x)' = 2 > 0$$

$$2) \quad f(x) = x^3 \quad \text{– возрастающая} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (x^3)' = 3x^2 \geq 0$$

## 6.2.1 ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

**Теорема.** (достаточные условия монотонности)

Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема на отрезке  $[a; b]$ .

Тогда:

$$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ – возрастающая,}$$

$$f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ – убывающая,}$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ – неубывающая,}$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ – невозрастающая.}$$

Точки, в которых функция  $y = f(x)$  имеет производную, равную 0, или производная не существует, называются **критическими точками 1-го рода**.

# 6.2.1 ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

## Исследование функции на возрастание и убывание

- 1) Найти область определения функции  $y = f(x)$ .
- 2) Найти производную функции.
- 3) Найти критические точки 1-го рода, они разбивают область определения функции на интервалы монотонности.
- 4) Начертить ось  $Ox$  и отметить на ней область определения и интервалы монотонности.
- 5) Найти знак производной функции на каждом интервале монотонности и сделать выводы, используя достаточные условия монотонности:
  - а) если  $f'(x) > 0$ , то это интервал возрастания,
  - б) если  $f'(x) < 0$ , то это интервал убывания.
- 6) Выписать интервалы возрастания и убывания функции.



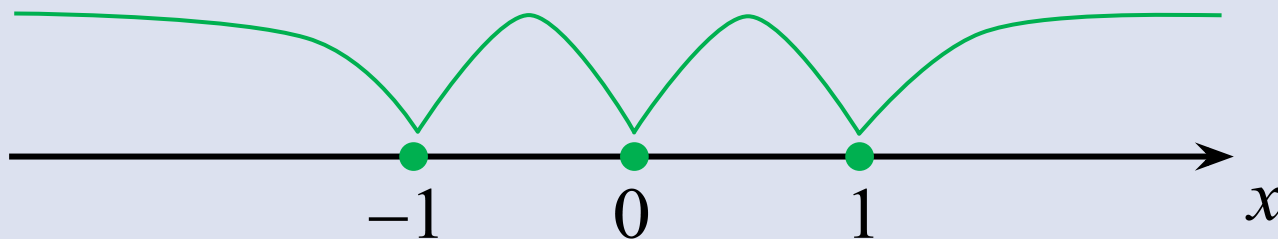
## 6.2.1 ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

### Пример

Исследовать функцию на возрастание и убывание  $y = \frac{3}{5}x - \sqrt[5]{x^3}$ .

$$D(y) = (-\infty; +\infty) \quad y' = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} \right)$$

$$y' = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$



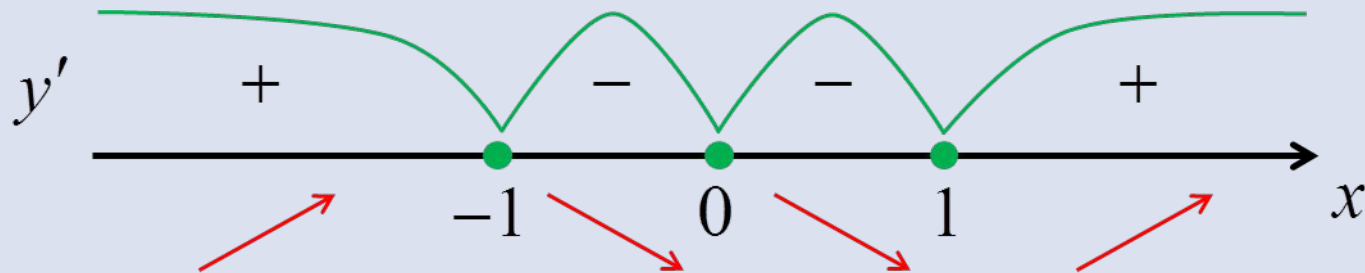


## 6.2.1 ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

Пример

$$y'(-32) = y'(32) = \frac{3}{5} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt[5]{32^2}} \right) = \frac{3}{5} \left( 1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{9}{20} > 0$$

$$y' \left( -\frac{1}{32} \right) = y' \left( \frac{1}{32} \right) = \frac{3}{5} \left( 1 - \sqrt[5]{32^2} \right) = \frac{3}{5} (1 - 4) = -\frac{9}{5} < 0$$



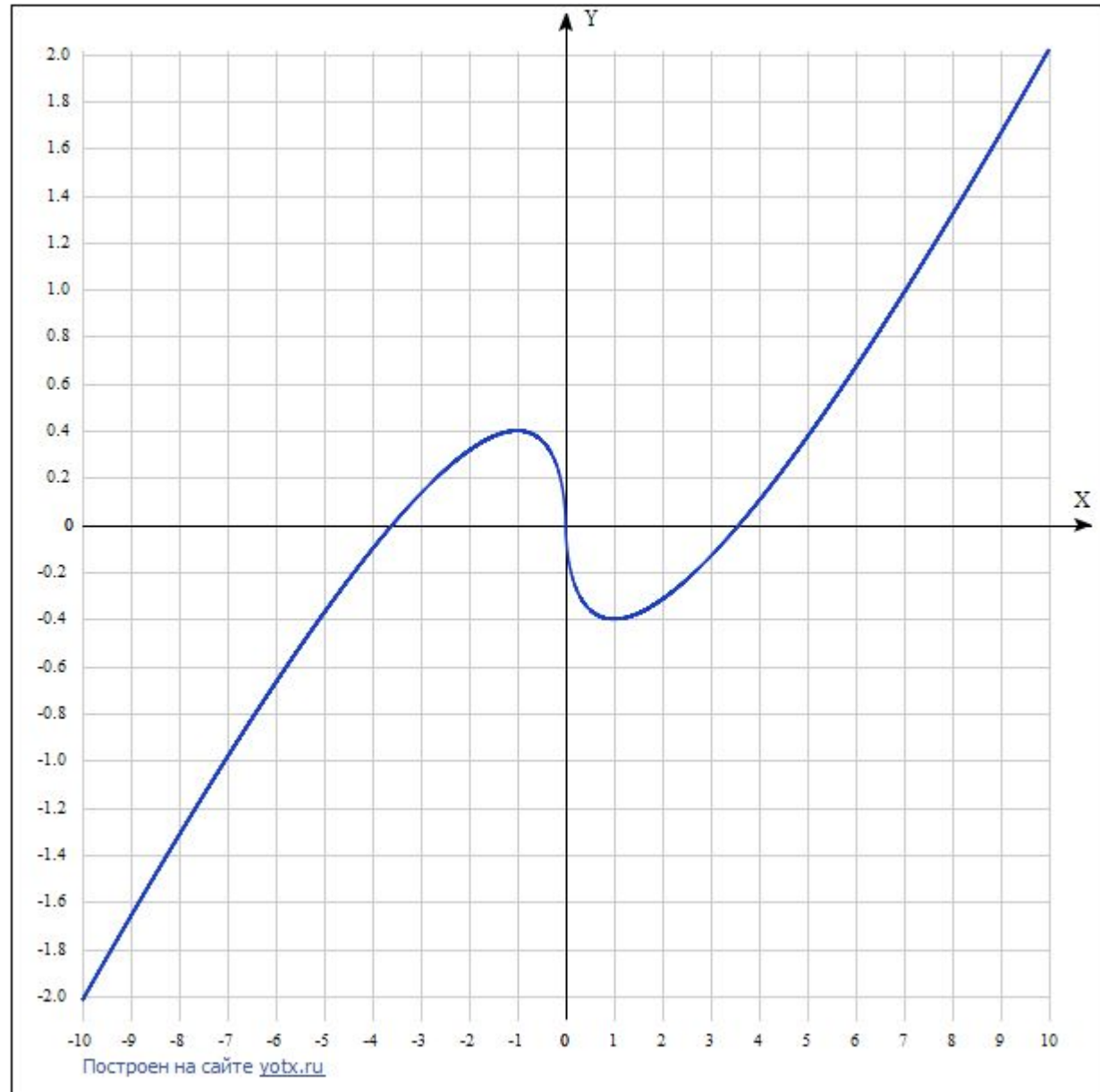
Функция возрастает при  $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Функция убывает при  $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$

## 6.2.1 ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

$$y = \frac{3}{5}x - \sqrt[5]{x^3}$$

Сравните полученные результаты с графиком функции

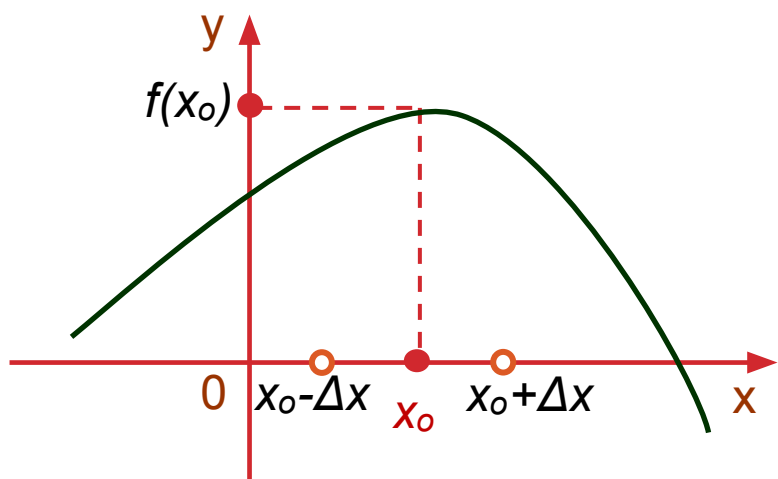


## 6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Точка  $x_0$  называется **точкой локального максимума** функции  $y = f(x)$ , если существует такая окрестность этой точки, что для любой точки из этой окрестности выполняется неравенство:  $f(x_0) \geq f(x)$ .

или

Точка  $x_0$  называется **точкой локального максимума** функции  $y = f(x)$ , если  
 $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \quad f(x_0) \geq f(x)$ .



$x_0$  — точка максимума

Значение функции в точке локального максимума называется **локальным максимумом** функции.

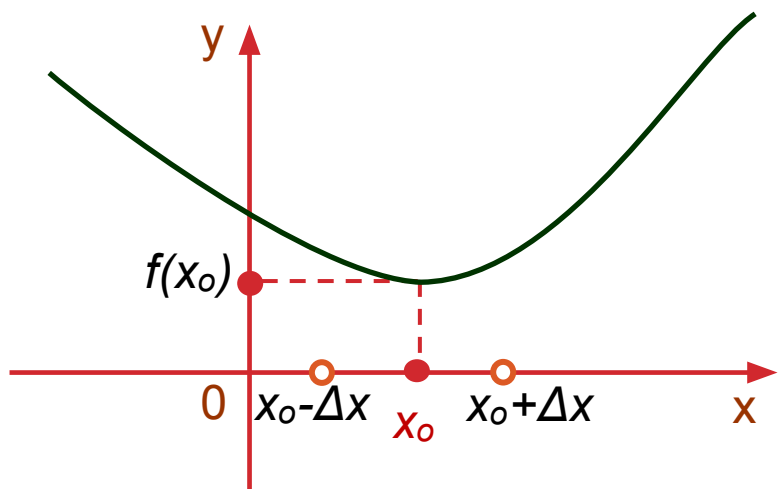
$f(x_0)$  — локальный максимум функции

## 6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Точка  $x_0$  называется **точкой локального минимума** функции  $y = f(x)$ , если существует такая окрестность этой точки, что для любой точки из этой окрестности выполняется неравенство:  $f(x_0) \leq f(x)$ .

или

Точка  $x_0$  называется **точкой локального минимума** функции  $y = f(x)$ , если  
 $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \quad f(x_0) \leq f(x)$ .

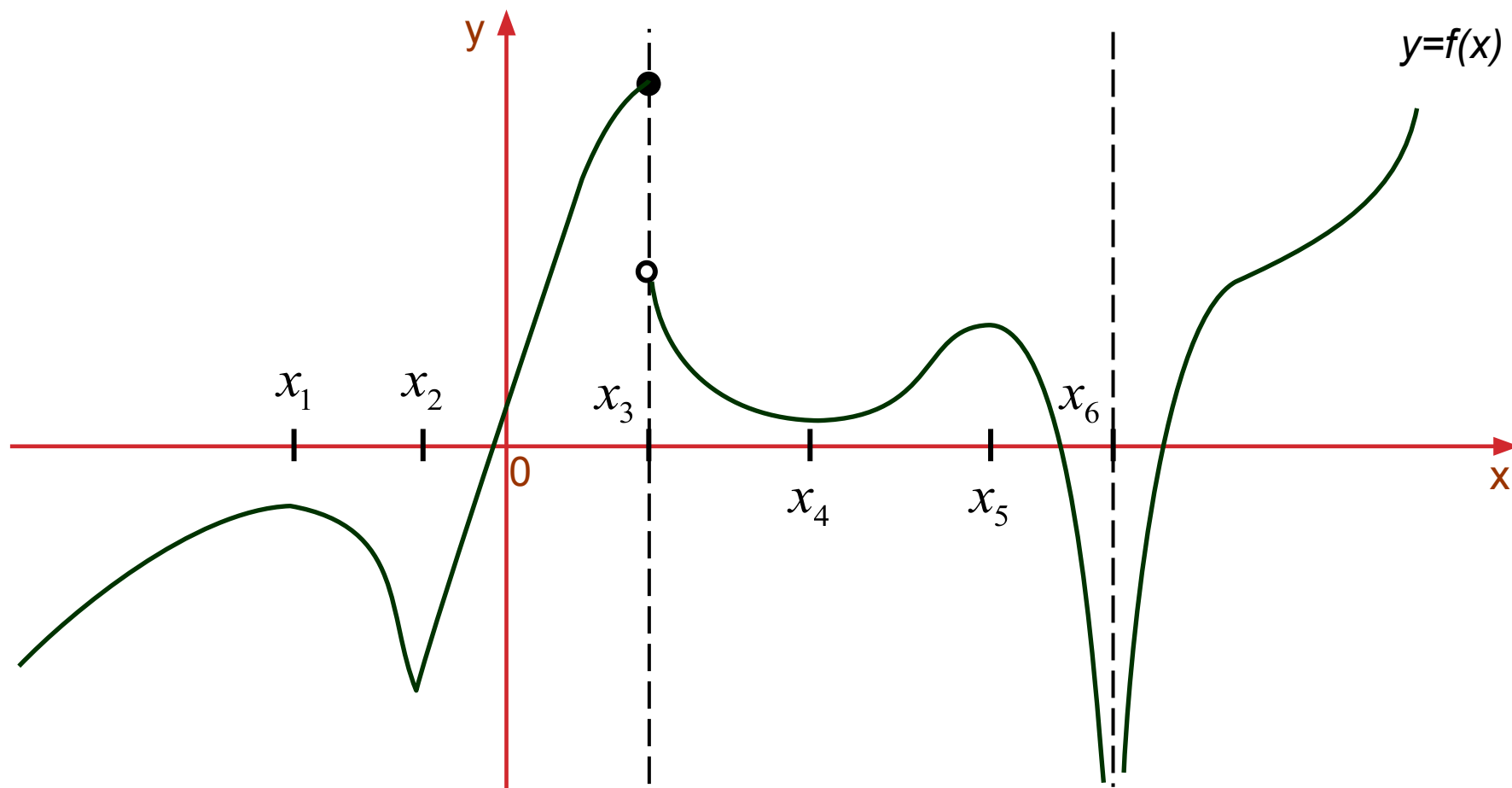


$x_0$  — точка минимума

Значение функции в точке локального минимума называется **локальным минимумом** функции.

$f(x_0)$  — минимум функции

## 6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ



Точки экстремума:

ТОЧКИ МИНИМУМА:  $x_2, x_4,$

ТОЧКИ МАКСИМУМА:  $x_1, x_3, x_5$

## 6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Значение функции в точке локального максимума называется **локальным максимумом функции**.

Значение функции в точке локального минимума называется **локальным минимумом функции**.

Понятие «**экстремум**» является обобщающим, это или локальный максимум, или локальный минимум.

### **Замечания.**

- 1) Слово «локальный» можно опускать, не забывая, что речь идёт о достаточно малой окрестности точки.
- 2) Функция может иметь экстремум только во внутренних точках области определения.

## 6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

**Теорема.** (необходимое условие существования экстремума)

Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема в некоторой точке и имеет в ней экстремум, то производная функции в этой точке равна 0, то есть

$$\left. \begin{array}{l} \exists f'(x_0) \\ x_0 \text{ точка экстремума} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

**Замечания.**

- 1) Обратная теорема не верна.
- 2) Есть функции, которые имеют экстремум в некоторой точке, но не имеют в ней производную.
- 3) Точками возможного экстремума являются только критические точки 1-го рода.



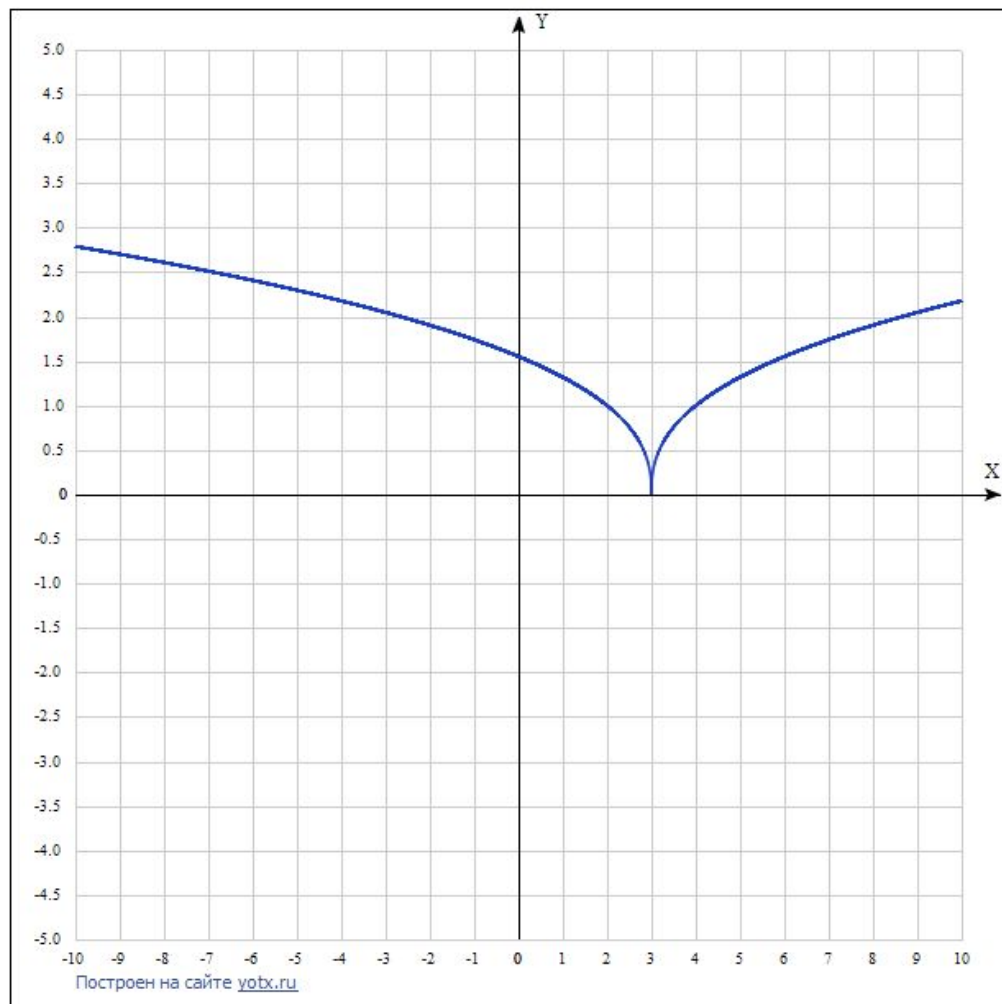
## 6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

2) Есть функции, которые имеют экстремум в некоторой точке, но не имеют в ней производную.

$$y = \sqrt[5]{(x-3)^2}$$

$$y' = \frac{2}{5 \cdot \sqrt[5]{(x-3)^3}}$$

В точке  $x = 3$  значение функции существует и равно  $0$ , а производная не существует.



## 6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

**Теорема.** (1 достаточное условие существования экстремума)

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна в некоторой окрестности точки  $x_0$  и дифференцируема в ней, за исключением, быть может, самой точки  $x_0$ . Если производная функции меняет знак при переходе через точку  $x_0$  то  $x_0$  – точка локального экстремума, причём:

- а) если с «+» на «-», то это точка максимума,
- б) если с «-» на «+», то это точка минимума.

## 6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

**Теорема.** (2 достаточное условие существования экстремума)

Пусть функция  $y = f(x)$  дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки  $x_0$ ,

пусть  $f'(x_0) = 0$ , а  $f''(x_0) \neq 0$ .

Тогда  $x_0$  – точка локального экстремума, причём:

- а) если  $f''(x_0) < 0$ , то это точка максимума,
- б) если  $f''(x_0) > 0$ , то это точка минимума.

## 6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

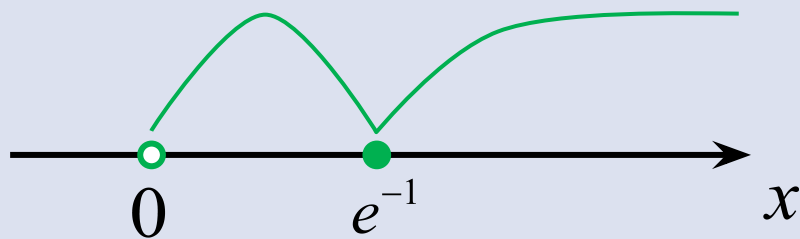
### Пример

Исследовать функцию на экстремум  $y = x \cdot \ln x$ .

$$D(y) = (0; +\infty) \quad y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$y' = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

I способ:

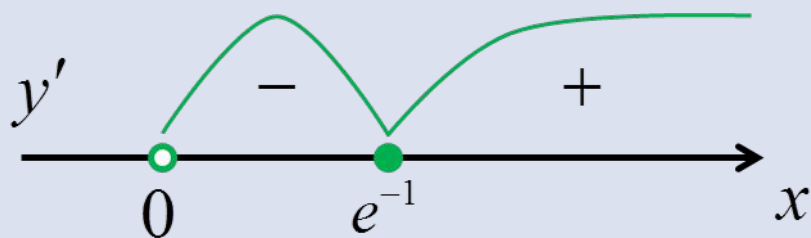


$$y'(e^{-2}) = \ln e^{-2} + 1 = -2 + 1 = -1 < 0$$

$$y'(e) = \ln e + 1 = 1 + 1 = 2 > 0$$

## 6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

### Пример



$x = e^{-1}$  – точка минимума.

$$y(e^{-1}) = e^{-1} \cdot \ln e^{-1} = e^{-1} \cdot (-1) = -e^{-1}$$

$y_{\min} = -e^{-1}$  – минимум функции.

### II способ:

$$y'' = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x}$$

$$y''(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}} = e > 0 \quad \Rightarrow \quad x = e^{-1} \text{ – точка минимума.}$$

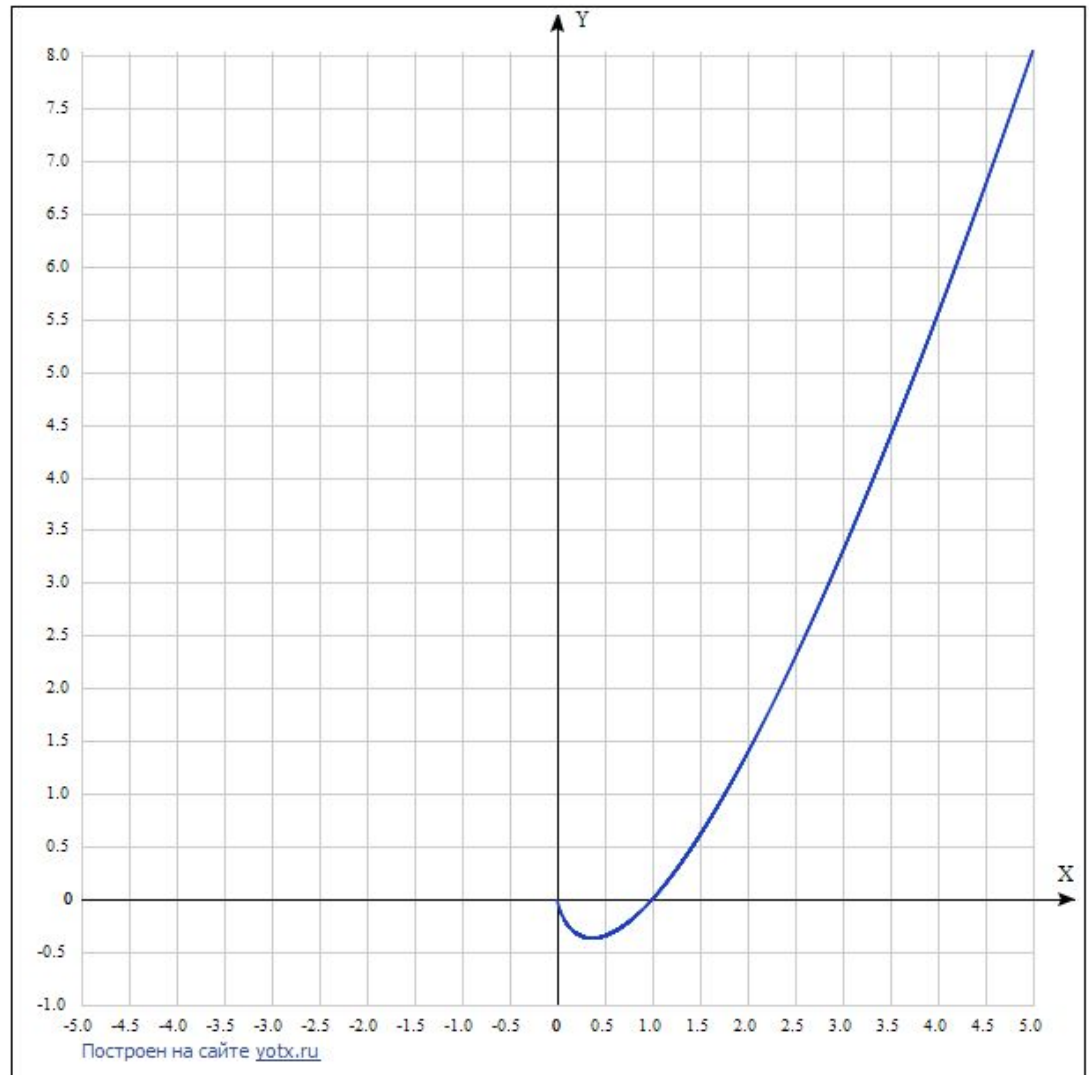
$$y(e^{-1}) = e^{-1} \cdot \ln e^{-1} = e^{-1} \cdot (-1) = -e^{-1}$$

$y_{\min} = -e^{-1}$  – минимум функции.

## 6.2.2 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

$$y = x \cdot \ln x$$

Сравните полученные  
результаты с графиком  
функции

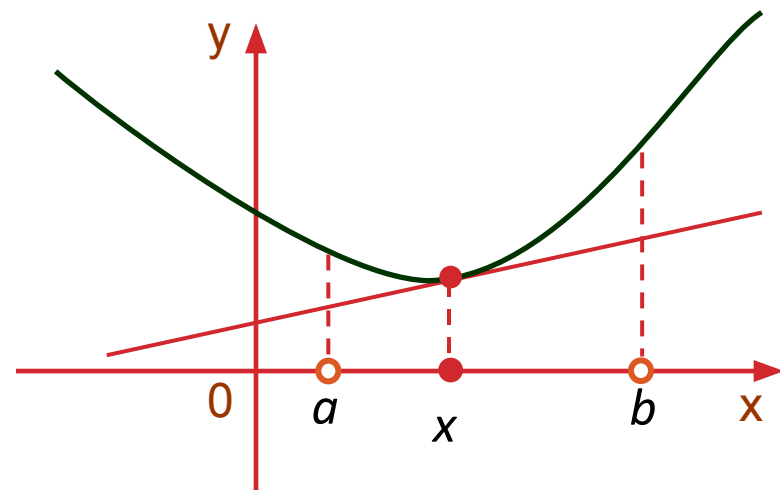
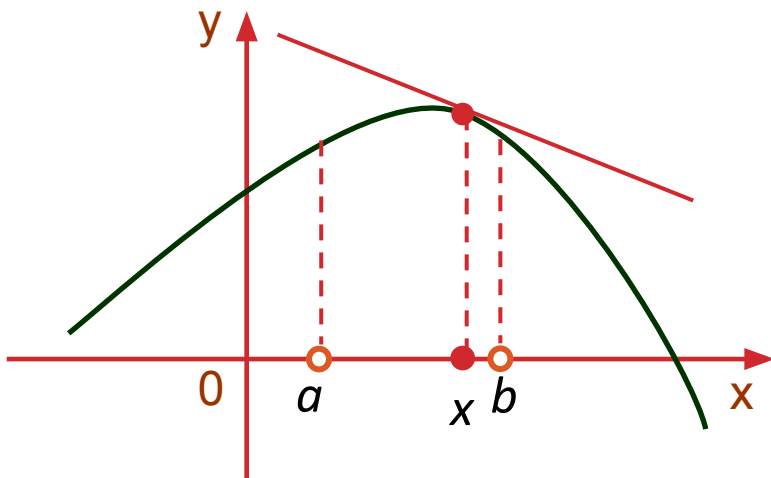


## 6.2.3 ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a; b)$ .

Тогда:

- 1) Если график функции на интервале  $(a; b)$  расположен **ниже** касательной, проведённой через любую точку графика с абсциссой  $x \in (a; b)$ , то он называется **выпуклым**.
- 2) Если график функции на интервале  $(a; b)$  расположен **выше** касательной, проведённой через любую точку графика с абсциссой  $x \in (a; b)$ , то он называется **вогнутым**.





## 6.2.3 ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

**Теорема.** (необходимое и достаточное условие выпуклости и вогнутости)

Пусть функция  $y = f(x)$  дважды непрерывно дифференцируема на интервале  $(a; b)$ .

Тогда для любой точки из этого интервала:

$f''(x) \leq 0 \iff$  график функции является выпуклым,



$f''(x) \geq 0 \iff$  график функции является вогнутым.



## 6.2.4 ТОЧКИ ПЕРЕГИБА ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Точка  $M(x_0; f(x_0))$  графика функции  $y = f(x)$  называется **точкой перегиба**, если она разделяет выпуклую и вогнутую части этого графика.

**Замечание:**  $x_0$  – только точка непрерывности.

**Теорема.** (необходимое условие существования точки перегиба)

Пусть функция  $y = f(x)$  дважды непрерывно дифференцируема в точке  $x_0$ .

Пусть точка  $M(x_0; f(x_0))$  есть точка перегиба графика функции.

Тогда  $f''(x_0) = 0$ .

Точки, в которых функция  $y = f(x)$  имеет производную второго порядка, равную 0, или эта производная не существует, называются **критическими точками 2-го рода**.

## 6.2.4 ТОЧКИ ПЕРЕГИБА ГРАФИКА ФУНКЦИИ

### Замечания.

- 1) График функции может иметь точку перегиба  $M(x_0; f(x_0))$ , но  $f''(x_0)$  может не существовать.
- 2) Производная второго порядка в точке  $x_0$  может быть равна 0, но точка  $M(x_0; f(x_0))$  не будет являться точкой перегиба, поэтому обратная теорема не верна.
- 3) Возможными абсциссами точек перегиба являются только критические точки 2-го рода.

**Теорема.** (достаточное условие существования точки перегиба)

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна в некоторой окрестности критической точки 2-го рода  $x_0$  и дважды дифференцируема в ней, за исключением, быть может, самой точки  $x_0$ .

Если производная второго порядка функции меняет знак при переходе через точку  $x_0$ , то точка  $M(x_0; f(x_0))$  есть точка перегиба графика функции.

## 6.2.4 ТОЧКИ ПЕРЕГИБА ГРАФИКА ФУНКЦИИ

### Исследование функции на выпуклость и вогнутость Нахождение точек перегиба

- 1) Найти область определения функции  $y = f(x)$ .
- 2) Найти производную второго порядка функции.
- 3) Найти критические точки 2-го рода, они разбивают область определения функции на интервалы.
- 4) Начертить ось  $Ox$  и отметить на ней область определения и эти интервалы.
- 5) Найти знак производной второго порядка функции на каждом интервале и сделать выводы о выпуклости и вогнутости графика на них.
- 6) Выписать интервалы, где график является выпуклым или вогнутым.
- 7) Найти и выписать точки перегиба графика функции.

## 6.2.4 ТОЧКИ ПЕРЕГИБА ГРАФИКА ФУНКЦИИ

### Пример

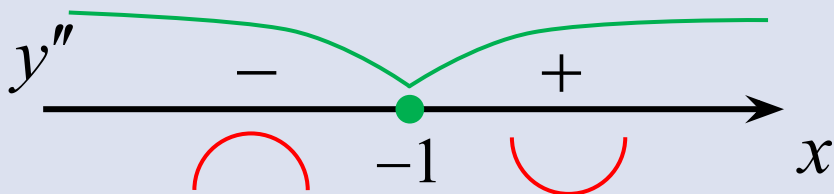
Исследовать функцию на выпуклость и вогнутость, найти точки перегиба

$$D(y) = (-\infty; +\infty)$$

$$y = (x+1)^3 - 4x.$$

$$y' = 3(x+1)^2 - 4 \quad y'' = 6(x+1)$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 6(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$$



$$y''(-2) = 6(-2+1) = -6 < 0$$

$$y''(0) = 6(0+1) = 6 > 0$$

График выпуклый на интервале  $(-\infty; -1)$ .

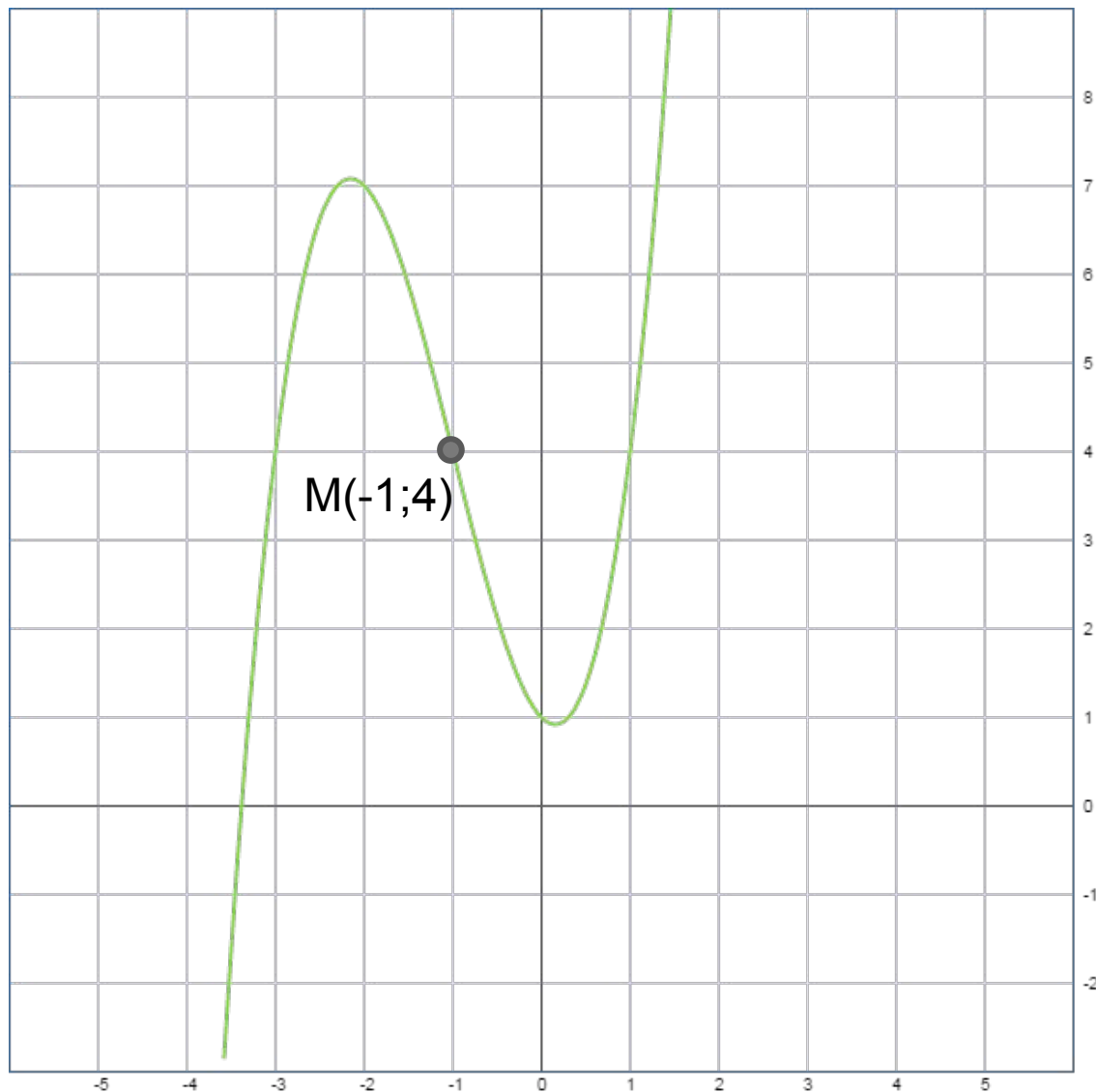
График вогнутый на интервале  $(-1; +\infty)$ .

$$y(-1) = (-1+1)^3 - 4 \cdot (-1) = 4 \Rightarrow A(-1; 4) \text{ – точка перегиба.}$$

## 6.2.4 ТОЧКИ ПЕРЕГИБА ГРАФИКА ФУНКЦИИ

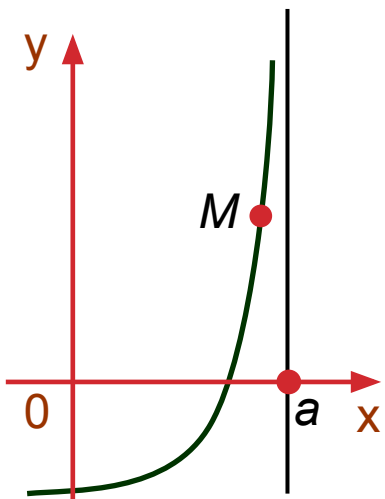
$$y = (x + 1)^3 - 4x$$

Сравните полученные  
результаты с графиком  
функции



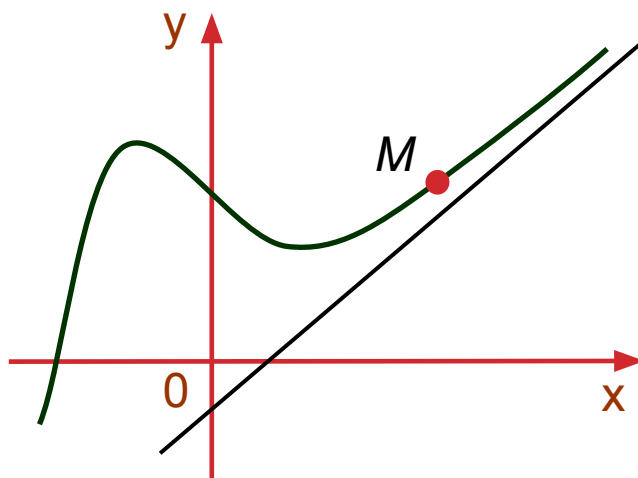
## 6.2.5 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Прямая линия  $L: Ax + By + C = 0$  называется **асимптотой** графика функции  $y = f(x)$ , если расстояние  $d$  от точки  $M(x; f(x))$  графика до этой прямой стремится к 0 при неограниченном удалении точки  $M$  от начала координат.



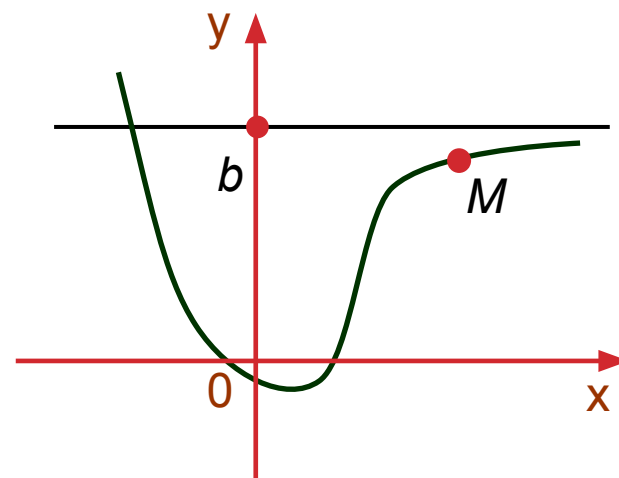
$$x = a$$

вертикальная  
асимптота



$$y = kx + b$$

наклонная  
асимптота



$$y = b$$

горизонтальная  
асимптота



## 6.2.5 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

**Теорема.** (необходимое и достаточное условие существования вертикальной асимптоты)

Прямая  $L: x = a$  является вертикальной асимптотой графика функции  $y = f(x)$  тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из соотношений:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty$$

**Замечание.**

Точки разрыва 2-го рода функции  $y = f(x)$  показывают, где могут находиться вертикальные асимптоты.

## 6.2.5 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

### Пример

Найти вертикальные асимптоты графика функции  $y = \ln \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{x}$ .

Найдём область определения:

$$\begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| < 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$D(y) = (-1; 0) \cup (0; 1)$$

Исследуем функцию на границах области определения и в точке разрыва:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+0} y &= \ln \sqrt{1 - (-1+0)^2} + \frac{1}{-1+0} = \ln \sqrt{1 - (1-0)^2} - 1 = \\ &= \ln \sqrt{0+0} - 1 = -\infty - 1 = -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \ln \sqrt{1 - (1-0)^2} + \frac{1}{-1+0} = -\infty$$

## 6.2.5 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

### Пример

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} y = \ln \sqrt{1 - (0 - 0)^2} + \frac{1}{0 - 0} = \ln 1 - \infty = 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} y = \ln \sqrt{1 - (0 + 0)^2} + \frac{1}{0 + 0} = \ln 1 + \infty = 0 + \infty = +\infty$$

Значит,  $x = 0$  – точка разрыва 2-го рода.

Получили:

$x = -1$  – правосторонняя вертикальная асимптота,

$x = 0$  – двусторонняя вертикальная асимптота,

$x = 1$  – левосторонняя вертикальная асимптота.

## 6.2.5 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

$$y = \ln \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{x}$$

$x = -1$  Правосторонняя

---

$x = 1$  Левосторонняя

---

$x = 0$  Двусторонняя

---

Сравните полученные  
результаты с графиком  
функции



## 6.2.5 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

**Теорема.** (необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты)

Прямая  $L: y = kx + b$  является наклонной асимптотой графика функции  $y = f(x)$  тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad (b) = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k \cdot x)$$

**Замечания.**

- 1) Если хотя бы один из пределов теоремы не существует или равен  $\infty$ , то наклонной асимптоты нет.
- 2) Если  $k = 0$ , а  $b$  – любое число, то получаем горизонтальную асимптоту  $L: y = b$ .
- 3) Иногда полезно рассматривать пределы отдельно на  $+\infty$  и на  $-\infty$ .

**Пример.**

Найти асимптоты графика функции 1)  $y = x \cdot 3^x$ , 2)  $y = \frac{x^3}{1 + x^2}$ .

## 6.2.5 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

### Примеры

Найти асимптоты графика функции: 1)  $y = x \cdot 3^x$ .

$D(y) = (-\infty; +\infty) \Rightarrow$  вертикальных асимптот нет.

Найдём наклонные асимптоты (сначала слева, потом справа)  $y = kx + b$  :

$$k_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot 3^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = 0$$

$$b_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot 3^x - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot 3^x = \langle \infty \cdot 0 \rangle = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3^{-x}} = \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x)'}{(3^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3^{-x} \cdot \ln 3 \cdot (-1)} = \frac{1}{-3^{+\infty}} = \frac{1}{-\infty} = -0$$

$$k_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot 3^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x = +\infty$$

Получили:

$y = 0$  – левосторонняя горизонтальная асимптота,  
справа асимптоты нет.

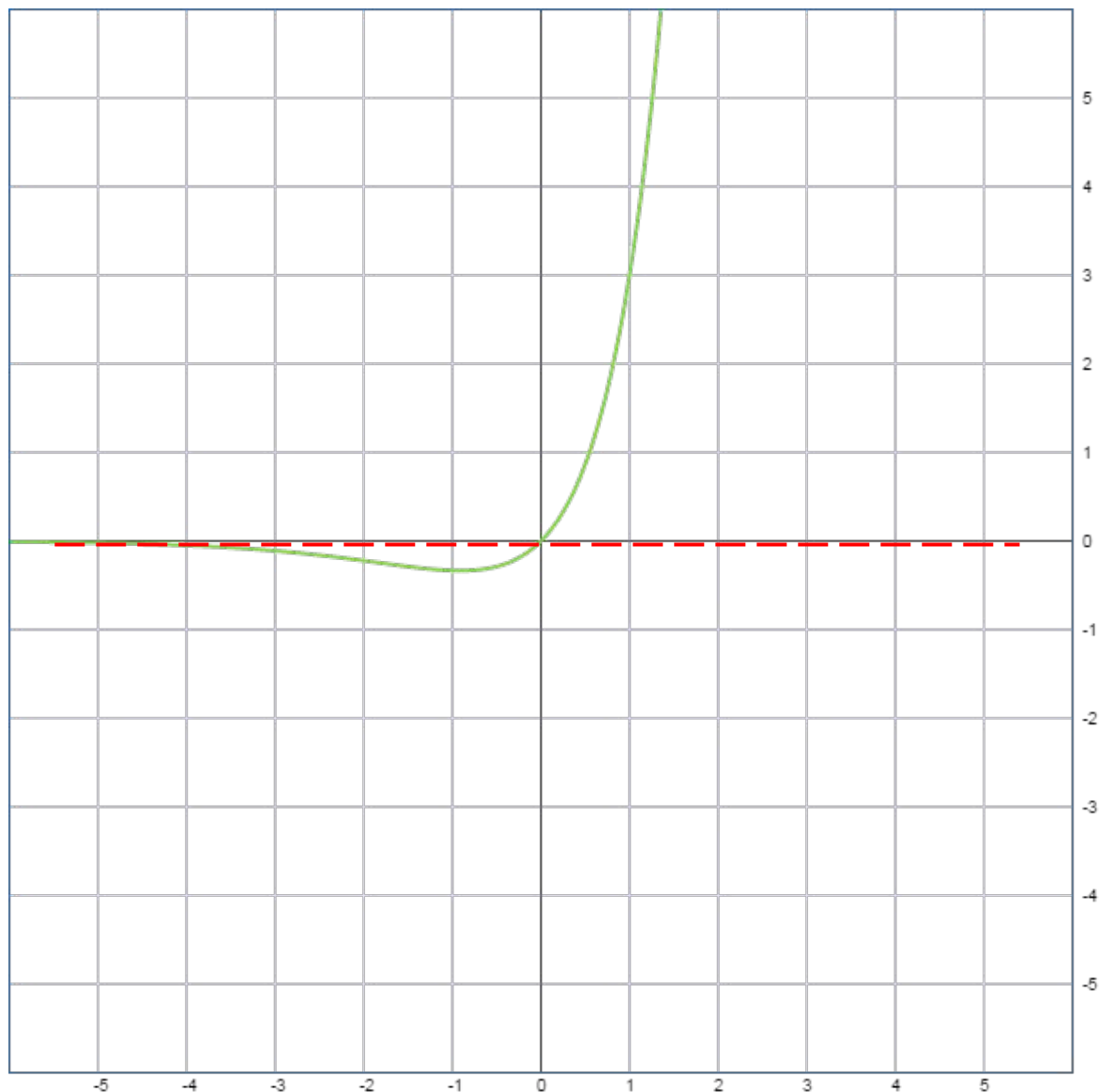
## 6.2.5 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

1)  $y = x \cdot 3^x$

$y = 0$  левосторонняя,  
горизонтальная

---

Сравните полученные  
результаты с графиком  
функции



## 6.2.5 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

### Примеры

Найти асимптоты графика функции: 2)  $y = \frac{x^3}{1+x^2}$ .

$D(y) = (-\infty; +\infty) \Rightarrow$  вертикальных асимптот нет.

Найдём наклонные асимптоты (для рациональной дроби только двусторонние)  $y = kx + b$  :

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(1+x^2)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{1+x^2} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x(1+x^2)}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x - x^3}{1+x^2} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{1+x^2} = \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-x)'}{(1+x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{2x} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

Получили:

$y = x$  – двусторонняя наклонная асимптота.



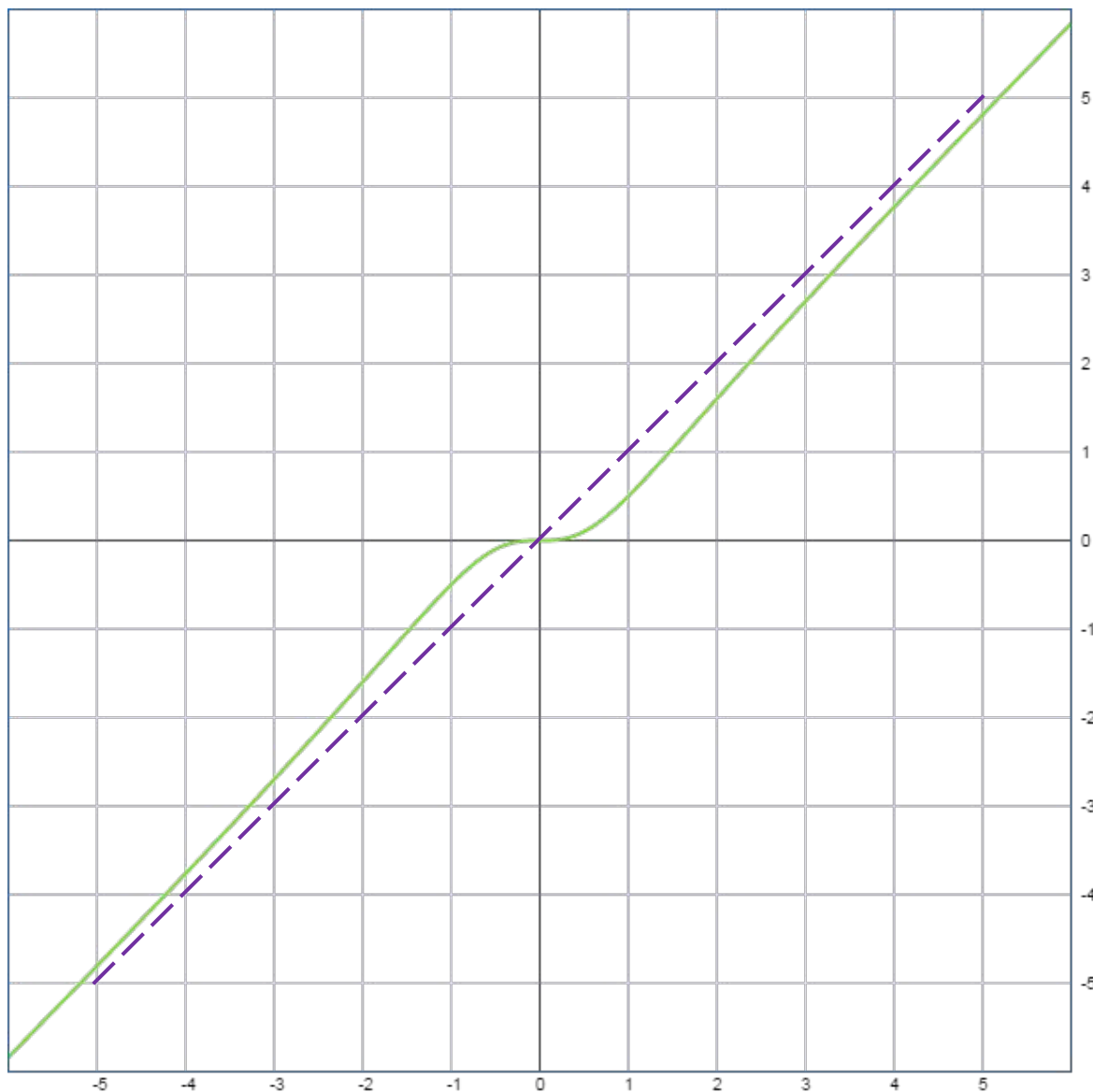
## 6.2.5 АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

$$2) y = \frac{x^3}{1+x^2}$$

$y = x$  – двусторонняя,  
наклонная

---

Сравните полученные  
результаты с графиком  
функции



## 6.2.6 ПЛАН ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЁ ГРАФИКА

- 1) Найти область определения функции  $y = f(x)$ .
- 2) Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и односторонние пределы в этих точках.
- 3) Найти асимптоты графика функции, выяснить поведение функции на границе области определения.
- 4) Исследовать функцию на чётность-нечётность, периодичность.
- 5) Найти производную 1-го порядка, исследовать функцию на экстремум, выписать интервалы возрастания и убывания функции.
- 6) Найти производную 2-го порядка, найти точки перегиба графика функции, выписать интервалы, где график является выпуклым или вогнутым.
- 7) Провести дополнительные исследования (при необходимости).
- 8) Все полученные данные записать в таблицу.
- 9) Сделать чертёж графика функции  $y = f(x)$ .

### Пример (разберём на практике)

Провести полное исследование функции и построить её график.

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ СЛЕДУЕТ...

