ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Введение

Задача Коши описывает развитие тех или иных процессов во времени. Например, изменение температуры в комнате с течением дня с указанием начальной температуры в 8 утра. Для этого применяются дифференциальные уравнения.

Постановка задачи Коши.

Будем рассматривать задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) первого порядка, разрешенного относительно производной:

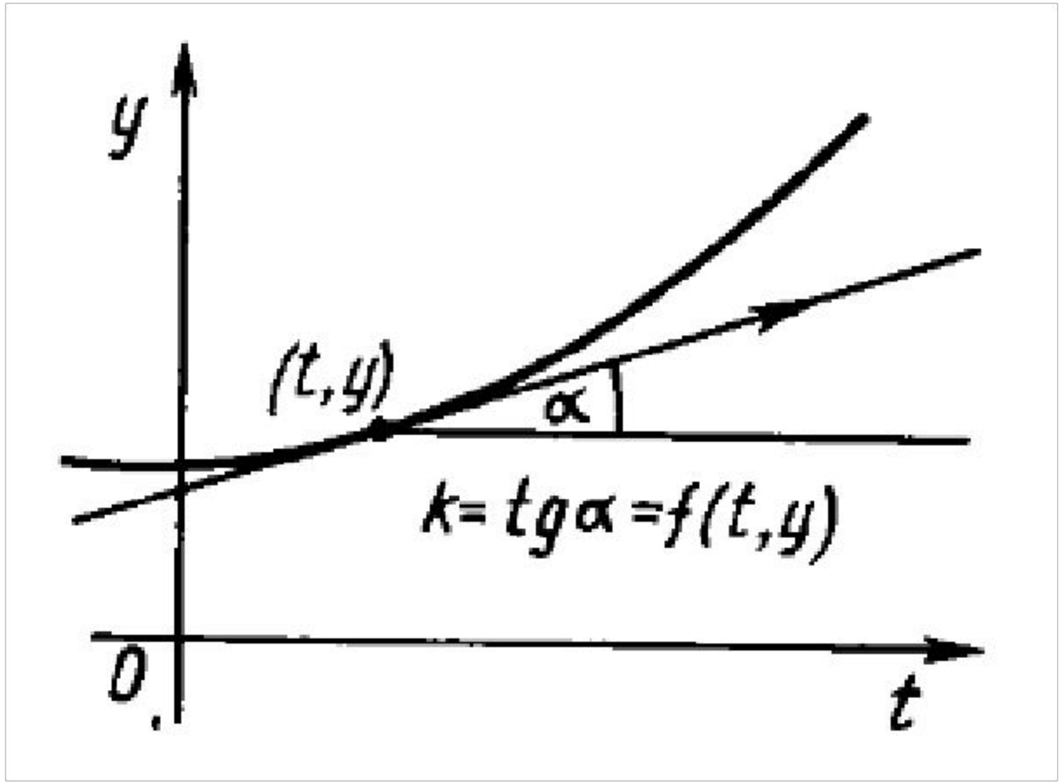
$$\begin{cases} y'(t) = f\left(t, y(t)\right) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$t \in \left[t_0,\ T\right]$$

Здесь $y'(t) = f(t, y(t))$ – ОДУ первого порядка, $y(t_0) = y_0$ – начальное условие. В общем случае, интерес представляет решение ОДУ для времени $t > t_0$, но часто ограничиваются некоторым конечным интервалом времени $t \in \left[t_0,\ T\right]$.

Решением обыкновенного ДУ 1 порядка вида называется дифференцируемая функция $y(t)$, которая при подстановке в исходное уравнение обращает его в тождество.

Исходя из геометрического смысла производной $y'(t)$ заметим, что исходное уравнение в каждой точке (t, y) плоскости переменных t, y задает значение $f(t, y(t))$ тангенса угла α наклона касательной к графику решения, проходящего через точку (t, y).



При численном решении задачи Коши на первом этапе проводят дискретизацию временной оси и вводят на непрерывном отрезке времени $t \in \left[t_0,\ T \right]$ множество точек, называемое *сеткой*:

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T \ ,$$

Сами точки называют *узлами сетки*. Расстояние между соседними узлами называется *шагом*. Для упрощения будем считать, что весь интервал $\left[t_0,\ T \right]$ разбит на N равных отрезков. Тогда шаг сетки постоянен и равен $h = \dfrac{\left(T - t_0\right)}{N}$, а $t_n = t_0 + n \cdot h,\ \ n = 1, 2, \ldots, N$

.

Задание

Вариант 29.

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{y(t)}{t+1} + t + 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$t_0 = 1; \quad T = 2$$

В дальнейшем, для облегчения записи, будем опускать зависимость y от переменной t, помня при этом, что $y'(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$.

1. Найдем точное решение.

1.1 Прежде всего, необходимо определить тип ОДУ в задаче. В данном случае имеем ***линейное ДУ***. ДУ называется линейным, если неизвестная функция $y(t)$ и ее производная $y'(t)$ входят в уравнение первой степени вида

$$\frac{dy(t)}{dt}+p(t)\,y(t)=q(t),$$

где $p(t)$, $q(t)$ – непрерывные функции.

1.2 Воспользуемся методом вариации произвольной постоянной. Для этого приведем наше ОДУ к виду линейного и занулим правую часть.

$$y'-\frac{1}{t+1}y=t+1 \quad =>$$

$$y'-\frac{y}{t+1}=0, \quad =>$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{y}{t+1},$$

1.3 Получили ОДУ «с разделенными переменными». «Растащим» переменные в разные стороны, например, умножим обе части на $\frac{dt}{y}$:

$$\frac{dy}{y}=\frac{dt}{t+1},$$

1.4 Проинтегрируем:

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dt}{t+1},$$

$$\ln|\mathrm{y}|=\ln\left|t+1\right|+\ln\left|C\right|$$

1.5 Избавляемся от логарифма и получаем y:

$$y = \mathrm{e}^{\ln\left|\tilde{C}(t+1)\right|} = (t+1)\tilde{C},$$

(поскольку по свойствам логарифма $e^{\ln(x)} = x$)

Далее заменяем $\tilde{C} = C(t)$, т. е. сами вводим неизвестную функцию $C(t)$ (как бы варьируем произвольную постоянную):

$$y = C(t)(t+1)$$

1.6 Находим y':

$$y' = \left[C(t)(t+1)\right]' = [u'v + uv'] = C'(t)(t+1) + C(t),$$

1.7 Подставляем найденные y и y' в исходное неоднородное уравнение:

$$C'(t)(t+1) + C(t) - \frac{C(t)(t+1)}{t+1} = t+1,$$

Сокращаем, что можем:

$$C'(t) = 1,$$

1.8 Проинтегрируем, чтобы найти $C(t)$:

$$C(t) = \int 1dt = t + C_1$$

1.9 Подставим в найденное уравнение:

$$y = C(t)\left(t+1\right) = (t + C_1)\left(t+1\right),$$

Это мы нашли общее решение ОДУ. Для решения задачи Коши воспользуемся начальным условием.

1.10 Найдем точное решение задачи Коши, подставим начальное условие:

$$y(t_0) = (t_0 + C_1)\left(t+1\right),$$

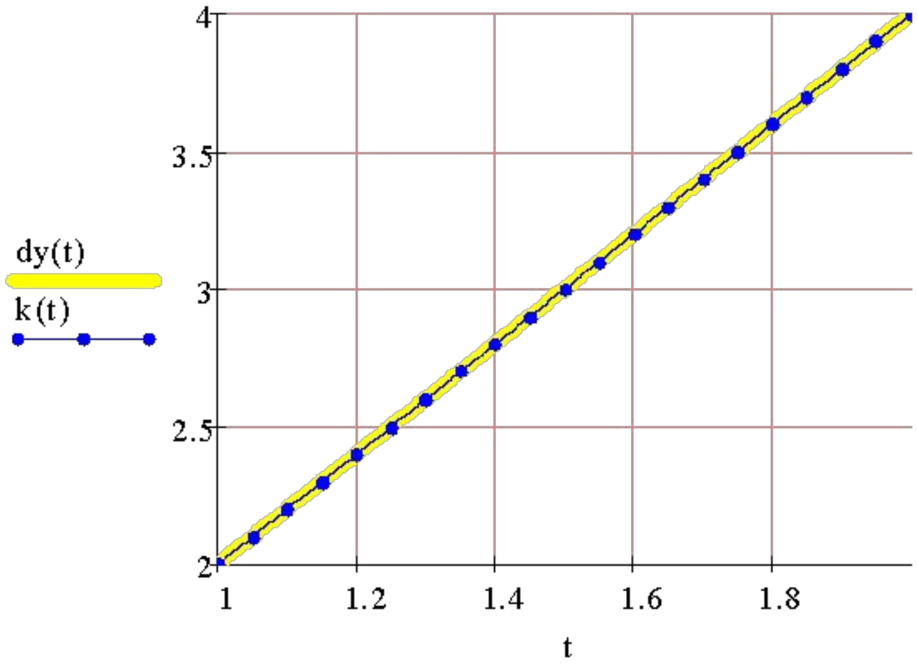
$$0 = (1 + C_1)\left(t+1\right),$$

$$C_1 = -1$$

Итоговое решение:

$$y = (t-1)(t+1).$$

Для проверки построим графики левой и правой частей исходного уравнения $y' = f(y,t)$ с найденным $y(t)$, где $k(t) = f(y,t)$



Теория

При решении задачи Коши методом Эйлера вычисления значений функции проводят заменой выражения $y'(t) = f(t, y(t))$ формулой:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

При этом на каждом шаге кривая решения заменяется касательной вида $y = y_n + y'(t_n)(t - t_n)$:

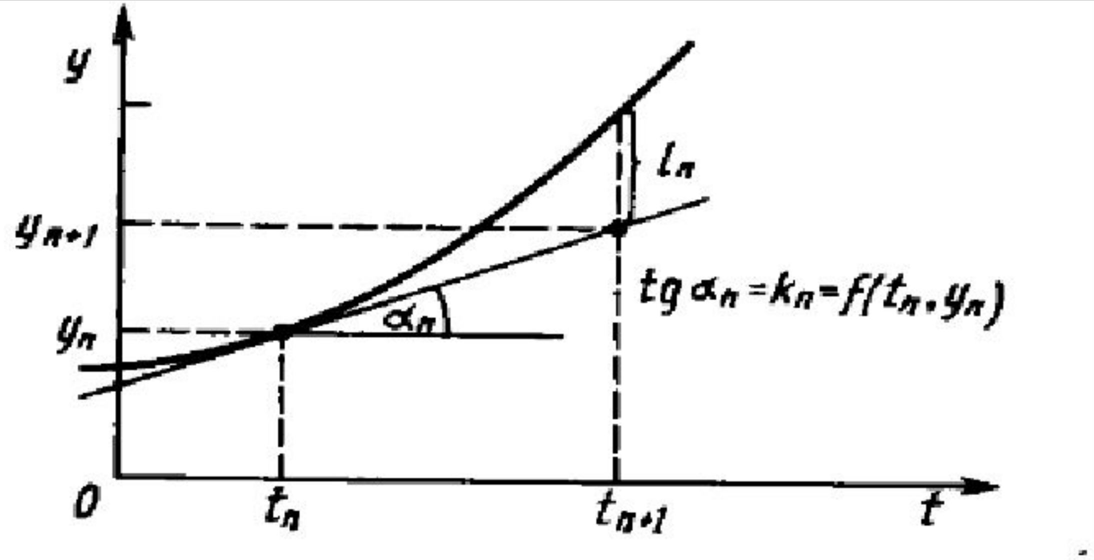


Рис. 14.7

Проведем расчет в точках интервала $[t0;\ T]$ с шагом $h = 0.2$:

$$t = [1;\ 1.2;\ 1.4;\ 1.6;\ 1.8;\ 2]$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

$$\text{где } f(t, y) = \frac{y}{t+1} + t + 1,$$

$$n = 0, 1, ..., N$$

	t	**Метод Эйлера**	**Точное решение**	**Погрешность**
y_0 (Н.У.) $\rightarrow$	1	0	0	0
$y_1 \rightarrow$	1.2	0.4	0.44	0.04
$y_2 \rightarrow$	1.4	0.8763	0.96	0.084
$y_3 \rightarrow$	1.6	1.4293	1.56	0.131
$y_4 \rightarrow$	1.8	2.0593	2.24	0.181
$y_5 \rightarrow$	2	2.7664	3	0.234

2.3 Метод Рунге-Кутты 2 порядка

Общая формула для расчетов по методу Рунге-Кутты 2 порядка имеет вид:

$$y_{n+1} = y_n + h\left[\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) f\left(t_n, y_n\right) + \frac{1}{2\alpha} f\left(t_n + \alpha h,\ y_n + \alpha h f\left(t_n, y_n\right)\right)\right],$$

где $\alpha = (0,1]$ - произвольная константа, $\alpha \neq 0$.

При $\alpha = 1$ формула дает метод Эйлера-Коши, при $\alpha = 1/2$ - модифицированный метод Эйлера. Выбор α предлагается сделать самостоятельно подбором, исходя из минимизации погрешности данного метода относительно точного решения (значения $\alpha < 0.1$).

	t	**Метод Р-К-2**	**Точное решение**	**Погрешность**
y_0 (Н.У.) $\rightarrow$	1	0	0	0
$y_1 \rightarrow$	1.2	0.43998	0.44	-1.998*10^-5
$y_2 \rightarrow$	1.4	0.95996	0.96	-3.996*10^-5
$y_3 \rightarrow$	1.6	1.55994	1.56	-5.994*10^-5
$y_4 \rightarrow$	1.8	2.23992	2.24	-7.993*10^-5
$y_5 \rightarrow$	2	2.9999	3	-9.991*10^-5

2.4 Оценка погрешности по правилу Рунге

Для оценки погрешности решения $y^{h/2}$ по правилу Рунге используется формула:

$$y(t) - y^{h/2}(t) \approx \frac{y^{h/2}(t) - y^{h}(t)}{2^{p} - 1},$$

где p = 2.

Таким образом, для оценки погрешности текущего решения (с шагом $h = 0.2$) требуется найти более грубое решение с шагом $h = 0.4$. Найдем его:

t	**Метод Р-К-2** $h = 0.2$	**Метод Р-К-2** $h = 0.4$	**Оценка по Рунге**
1	0	0	0
1.2	0.43998	-	-
1.4	0.95996	0.95984	3.991*10^-5
1.6	1.55994	-	-
1.8	2.23992	2.23968	7.983*10^-5
2	2.9999	-	-

Приведем графики точного и приближенных решений: