

# **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7**

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

## Введение

Задача Коши описывает развитие тех или иных процессов во времени. Например, изменение температуры в комнате с течением дня с указанием начальной температуры в 8 утра. Для этого применяются дифференциальные уравнения.

### *Постановка задачи Коши.*

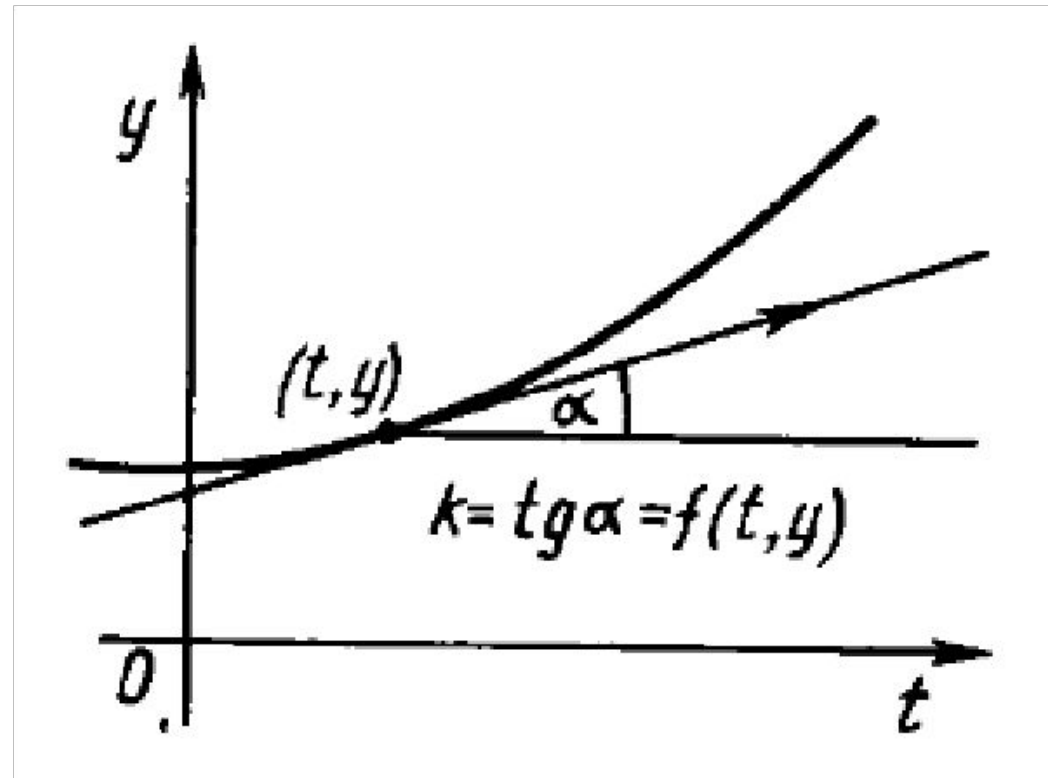
Будем рассматривать задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) первого порядка, разрешенного относительно производной:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \\ t \in [t_0, T] \end{cases}$$

Здесь  $y'(t) = f(t, y(t))$  – ОДУ первого порядка,  $y(t_0) = y_0$  – начальное условие. В общем случае, интерес представляет решение ОДУ для времени  $t > t_0$ , но часто ограничиваются некоторым конечным интервалом времени  $t \in [t_0, T]$ .

Решением обыкновенного ДУ 1 порядка вида называется дифференцируемая функция  $y(t)$ , которая при подстановке в исходное уравнение обращает его в тождество.

Исходя из геометрического смысла производной  $y'(t)$  заметим, что исходное уравнение в каждой точке  $(t, y)$  плоскости переменных  $t, y$  задает значение  $f(t, y(t))$  тангенса угла  $\alpha$  наклона касательной к графику решения, проходящего через точку  $(t, y)$ .



*При численном решении задачи Коши* на первом этапе проводят дискретизацию временной оси и вводят на непрерывном отрезке времени  $t \in [t_0, T]$  множество точек, называемое *сеткой*:

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N = T ,$$

Сами точки называют *узлами сетки*. Расстояние между соседними узлами называется *шагом*. Для упрощения будем считать, что весь интервал  $[t_0, T]$  разбит на  $N$  равных отрезков. Тогда шаг сетки постоянен и равен  $h = \frac{(T - t_0)}{N}$ , а  $t_n = t_0 + n \cdot h$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

## Задание

Вариант 29.

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{y(t)}{t+1} + t + 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$
$$t_0 = 1; \quad T = 2$$

В дальнейшем, для облегчения записи, будем опускать зависимость  $y$  от переменной  $t$ , помня при этом, что  $y'(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ .

## 1. Найдем точное решение.

1.1 Прежде всего, необходимо определить тип ОДУ в задаче. В данном случае имеем *линейное ДУ*. ДУ называется линейным, если неизвестная функция  $y(t)$  и ее производная  $y'(t)$  входят в уравнение первой степени вида

$$\frac{dy(t)}{dt} + p(t)y(t) = q(t),$$

где  $p(t)$ ,  $q(t)$  – непрерывные функции.

1.2 Воспользуемся методом вариации произвольной постоянной. Для этого приведем наше ОДУ к виду линейного и занулим правую часть.

$$y' - \frac{1}{t+1}y = t+1 \quad \Rightarrow$$

$$y' - \frac{y}{t+1} = 0, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t+1},$$

1.3 Получили ОДУ «с разделенными переменными». «Растащим»

переменные в разные стороны, например, умножим обе части на  $\frac{dt}{y}$ :

$$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{t+1},$$

1.4 Проинтегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t+1},$$

$$\ln |y| = \ln |t+1| + \ln |C|$$

1.5 Избавляемся от логарифма и получаем  $y$ :

$$y = e^{\ln|C(t+1)|} = (t+1)C,$$

(поскольку по свойствам логарифма  $e^{\ln(x)} = x$ )

Далее заменяем  $C = C(t)$ , т. е. сами вводим неизвестную функцию  $C(t)$  (как бы варьируем произвольную постоянную):

$$y = C(t)(t+1)$$

1.6 Находим  $y'$ :

$$y' = [C(t)(t+1)]' = [u'v + uv'] = C'(t)(t+1) + C(t),$$

1.7 Подставляем найденные  $y$  и  $y'$  в исходное неоднородное уравнение:

$$C'(t)(t+1) + C(t) - \frac{C(t)(t+1)}{t+1} = t+1,$$

Сокращаем, что можем:

$$C'(t) = 1,$$



1.8 Проинтегрируем, чтобы найти  $C(t)$ :

$$C(t) = \int 1 dt = t + C_1$$

1.9 Подставим в найденное уравнение:

$$y = C(t)(t+1) = (t + C_1)(t+1),$$

Это мы нашли общее решение ОДУ. Для решения задачи Коши воспользуемся начальным условием.

1.10 Найдем точное решение задачи Коши, подставим начальное условие:

$$y(t_0) = (t_0 + C_1)(t+1),$$

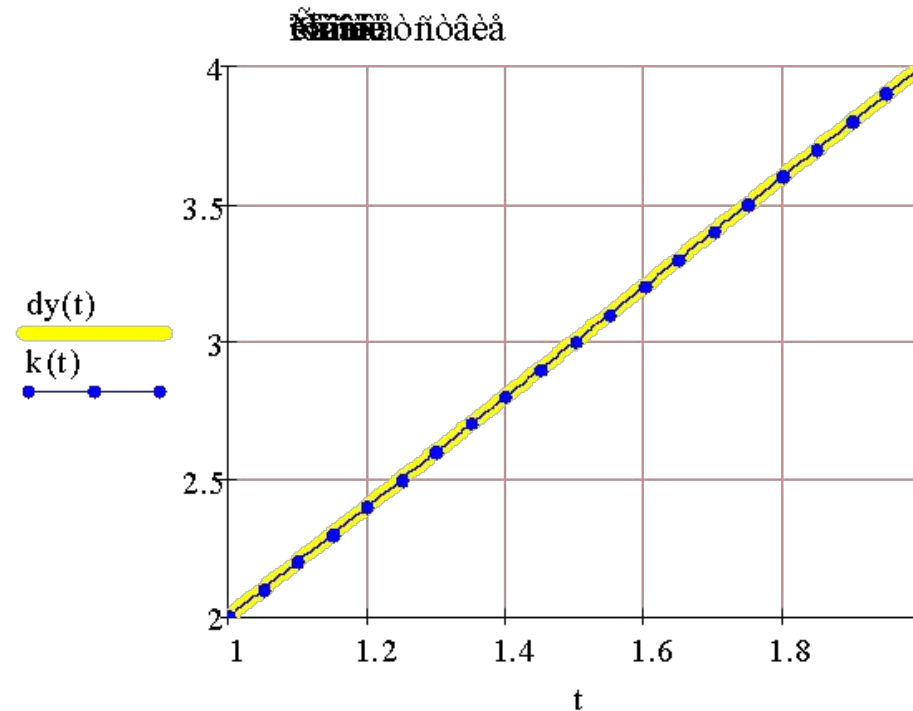
$$0 = (1 + C_1)(t+1),$$

$$C_1 = -1$$

Итоговое решение:

$$y = (t - 1)(t + 1).$$

Для проверки построим графики левой и правой частей исходного уравнения  $y' = f(y, t)$  с найденным  $y(t)$ , где  $k(t) = f(y, t)$



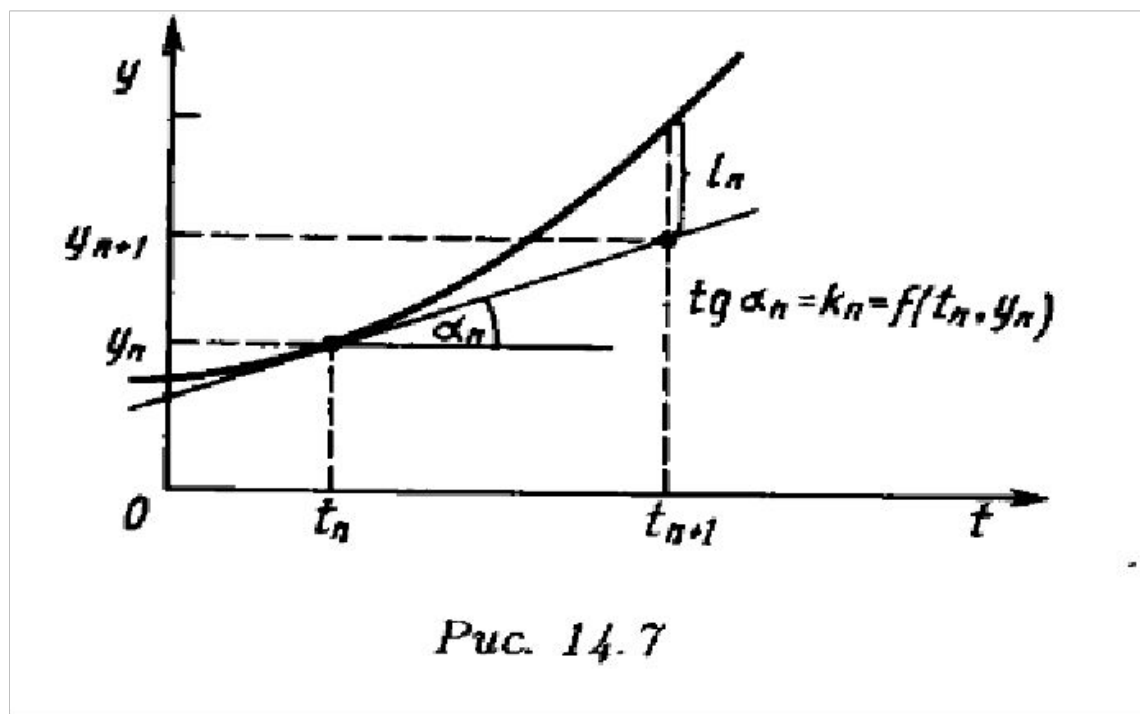
## Теория

При решении задачи Коши методом Эйлера вычисления значений функции проводят заменой выражения  $y'(t) = f(t, y(t))$  формулой:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

При этом на каждом шаге кривая решения заменяется касательной вида

$$y = y_n + y'(t_n)(t - t_n):$$



Проведем расчет в точках интервала  $[t_0; T]$  с шагом  $h = 0.2$  :

$$t = [1; 1.2; 1.4; 1.6; 1.8; 2]$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

$$\text{где } f(t, y) = \frac{y}{t+1} + t + 1,$$

$$n = 0, 1, \dots, N$$

	$t$	Метод Эйлера	Точное решение	Погрешность
$y_0$ (Н.У.) $\rightarrow$	1	0	0	0
$y_1 \rightarrow$	1.2	0.4	0.44	0.04
$y_2 \rightarrow$	1.4	0.8763	0.96	0.084
$y_3 \rightarrow$	1.6	1.4293	1.56	0.131
$y_4 \rightarrow$	1.8	2.0593	2.24	0.181
$y_5 \rightarrow$	2	2.7664	3	0.234

## 2.3 Метод Рунге-Кутты 2 порядка

Общая формула для расчетов по методу Рунге-Кутты 2 порядка имеет вид:

$$y_{n+1} = y_n + h \left[ \left( 1 - \frac{1}{2\alpha} \right) f(t_n, y_n) + \frac{1}{2\alpha} f(t_n + \alpha h, y_n + \alpha h f(t_n, y_n)) \right],$$

где  $\alpha \in (0, 1]$  - произвольная константа,  $\alpha \neq 0$ .

При  $\alpha = 1$  формула дает метод Эйлера-Коши, при  $\alpha = 1/2$  - модифицированный метод Эйлера. Выбор  $\alpha$  предлагается сделать самостоятельно подбором, исходя из минимизации погрешности данного метода относительно точного решения (значения  $\alpha < 0.1$ ).

	$t$	Метод Р-К-2	Точное решение	Погрешность
$y_0$ (Н.У.) $\rightarrow$	1	0	0	0
$y_1 \rightarrow$	1.2	0.43998	0.44	$-1.998 \cdot 10^{-5}$
$y_2 \rightarrow$	1.4	0.95996	0.96	$-3.996 \cdot 10^{-5}$
$y_3 \rightarrow$	1.6	1.55994	1.56	$-5.994 \cdot 10^{-5}$
$y_4 \rightarrow$	1.8	2.23992	2.24	$-7.993 \cdot 10^{-5}$
$y_5 \rightarrow$	2	2.9999	3	$-9.991 \cdot 10^{-5}$

## 2.4 Оценка погрешности по правилу Рунге

Для оценки погрешности решения  $y^{h/2}$  по правилу Рунге используется формула:

$$y(t) - y^{h/2}(t) \approx \frac{y^{h/2}(t) - y^h(t)}{2^p - 1},$$

где  $p = 2$ .

Таким образом, для оценки погрешности текущего решения (с шагом  $h = 0.2$ ) требуется найти более грубое решение с шагом  $h = 0.4$ . Найдем его:

<b><i>t</i></b>	<b>Метод Р-К-2</b> <i>h</i> = 0.2	<b>Метод Р-К-2</b> <i>h</i> = 0.4	<b>Оценка</b> <b>по Рунге</b>
1	0	0	0
1.2	0.43998	-	-
1.4	0.95996	0.95984	$3.991 \cdot 10^{-5}$
1.6	1.55994	-	-
1.8	2.23992	2.23968	$7.983 \cdot 10^{-5}$
2	2.9999	-	-



Приведем графики точного и приближенных решений:

