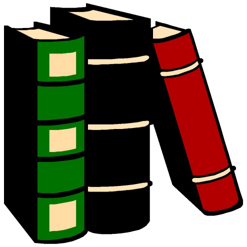
## КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
## РХТУ имени Д. И. Менделеева



# Дифференциальные уравнения

## Лекция № 1

**Дифференциальные уравнения: основные понятия. Теорема существования и единственности решения. Задача Коши. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним.**

# Литература

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Конспект лекций по высшей математике (4782)
2. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы (примеры и задачи) (4912)
3. В.В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений.
4. Б.П. Демидович, В П. Моденов. Дифференциальные уравнения.
5. Д.Т Письменный. Сборник задач по высшей математике.

## Задача.

- Скорость распада радия в каждый текущий момент времени $t$ пропорциональна количеству нераспавшегося радия. Пусть коэффициент пропорциональности $\boldsymbol{k}$ известен $(\boldsymbol{k} > \mathbf{0})$. Требуется узнать какое количество нераспавшегося радия останется к моменту $t$, если в начальный момент (при $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$) количество радия было равно $\boldsymbol{m_0}$.

**Под скоростью изменения какой-либо величины понимается производная от этой величины по времени**

Решение: $\boldsymbol{m(t)}$ – количество радия в момент $t$.

Согласно условию:

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

$$\frac{d(\ln m)}{dt} = -k$$

Или

$$\frac{d(\ln m + kt)}{dt} = 0$$

Отсюда

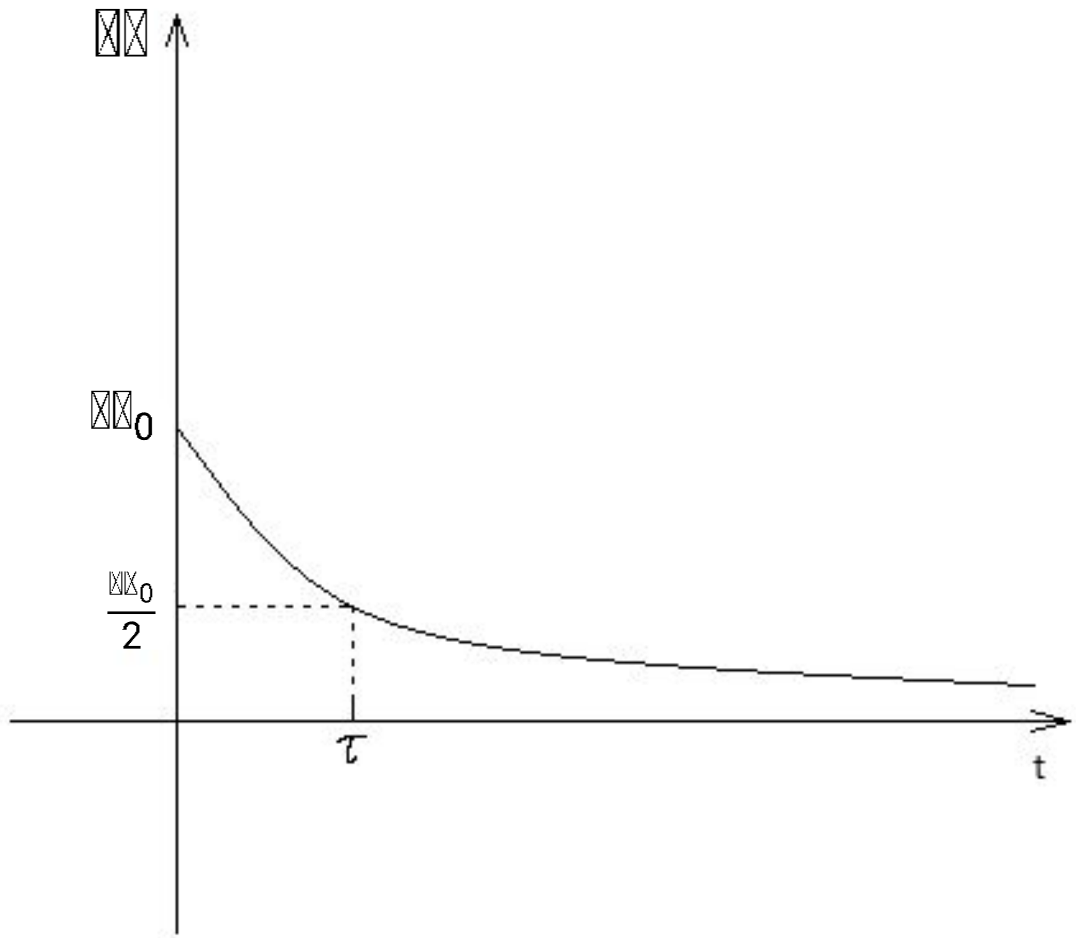
$$\ln m + kt = \ln|C|$$

$$m = Ce^{-kt}$$

Подставим начальные условия: при $t = 0$ $m = m_0$.

$$m_0 = Ce^{-k\cdot 0} \Longrightarrow C = m_0\ ; \qquad m^* = m_0 e^{-kt}.$$

$$m^* = m_0 e^{-kt}$$



# Обыкновенные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

**Определение 1**. Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) $n$-го порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную $x$, неизвестную функцию $y(x)$ и её производные $y'(x)$, $y''(x),\ldots, y^{(n)}(x)$, то есть

$$F\left(x,\ y,\ y',\ldots,y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

Если из уравнения (1) можно выразить $y^{(n)}$ через $x$, $y$, $y'$, … , $y^{(n-1)}$, то такое уравнение называется разрешённым относительно $y^{(n)}$ (или дифференциальным уравнением в нормальной форме):

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \qquad (2)$$

− дифференциальное уравнение в нормальной форме.

# Основные понятия теории дифференциальных уравнений

- ***Порядком*** дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.
- Дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным*** (ОДУ), в том случае, если неизвестная функция, входящая в него, зависит от одной переменной.
- Если неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит от двух и более переменных, то дифференциальное уравнение называется ***уравнением в частных производных***.

# Примеры дифференциальных уравнений

1) $\square' = 2\square$

2) $\frac{1}{\square + 1}\square''' + \square\square\square' - \square + 7 = 0$

3) $\frac{\square^2\square}{\square\square^2} + \frac{\square^2\square}{\square\square^2} = 0$, где $\square = \square(\square, \square)$

4) $\square^2\square\square - \square\square + \square\square\square = 0$

# Решение (интеграл) дифференциального уравнения

**Определение 2.** Функция $y = \varphi(x)$ называется ***решением*** (или ***интегралом***) дифференциального уравнения (1) на интервале $(a, b)$, если:

1) $\varphi(x)$ определена и $n$ раз дифференцируема на $(a, b)$;
2) при подстановке $\varphi(x)$ в дифференциальное уравнение (1) оно обращается в тождество относительно $x \in (a, b)$.

График решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***.

## Пример.

Проверить, что функция

$$\boldsymbol{y = cos\,2x}$$

является решением дифференциального уравнения:

$$\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$$

Решение:

$$\boldsymbol{y' = -2\sin 2x}$$

$$\boldsymbol{y'' = -4\cos 2x}$$

$$\boldsymbol{-4\cos 2x + 4\cos 2x = 0 \qquad \forall x \epsilon R}$$

# Общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения

Множество всех (или почти всех) решений дифференциального уравнения (1) можно записать в виде <u>явной</u> функции, зависящей от $x$ и $n$ произвольных констант $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

- $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ – ***общее решение*** дифференциального уравнения n-ого порядка (1).

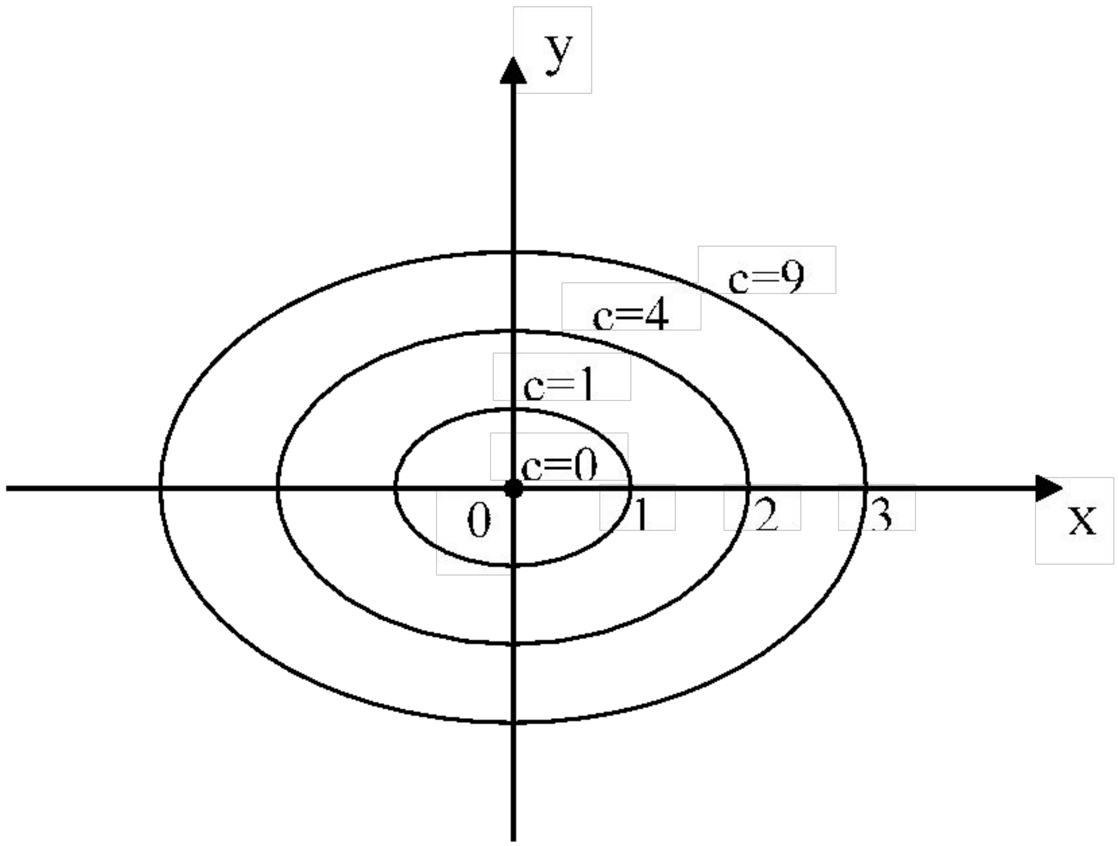
- $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ – ***общий интеграл*** дифференциального уравнения n-ого порядка (1).

С геометрической точки зрения, общее решение или общий интеграл представляют собой бесконечное множество непересекающихся интегральных кривых на плоскости

Например, для дифференциального уравнения $2x\,dx + 4y\,dy = 0$ семейство интегральных кривых, задаваемых общим интегралом

$$x^2 + 2y^2 = C, \quad C \geq 0,$$

это бесконечное семейство подобных эллипсов $\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{C/2} = 1$ с полуосями $\sqrt{C}$ и $\sqrt{C/2}$ (при $C = 0$ получаем вырожденный случай – точку $O(0,0)$


y
c=9
c=4
c=1
c=0
0
1
2
3
x

$$\mathrm{y} = x^2 + C_1 x + C_2$$

$$x^2 + y^2 = C$$

# Начальные условия для д.у. (1):

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases},$$

где $x_0, y_0, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1}$ – конкретные числа. Систему равенств (5) называют ***начальными условиями*** (или ***условиями Коши***).

## Задача Коши

**Определение 3.**

**Задачей Коши** для дифференциального уравнения

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

называется задача отыскания решения $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющего начальным условиям:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases},$$

# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА

**Определение 4.**

Обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида:

или

# Задача Коши для дифференциального уравнения 1-ого порядка

$$F(x, y, y') = 0,$$

$$y(x_0) = y_0$$

# Теорема Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка

<u>**Теорема Коши** (теорема существования и единственности решения задачи Коши)</u>

Пусть в дифференциальном уравнении $\boldsymbol{y' = f(x, y)}$ функция $\boldsymbol{f(x, y)}$ и её частная производная $\boldsymbol{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}$ непрерывны в некоторой области $\boldsymbol{D}$ плоскости $\boldsymbol{Oxy}$. Тогда для любой точки $\boldsymbol{M(x_0, y_0) \in D}$ существует и при том единственное решение $\boldsymbol{y = \varphi(x)}$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\boldsymbol{\varphi(x_0) = y_0}$.

Особым решением называется такое решение, во всех точках которого условие единственности не выполняется, т.е. в любой окрестности каждой точки $(x, y)$ особого решения существует по крайней мере две интегральные кривые, проходящие через эту точку.

Особое решение в каждой своей точке касается какой-то другой интегральной кривой, то геометрически оно представляет собой огибающую некоторого семейства интегральных кривых

Особые решения не получаются из общего решения ДУ ни при каких значениях произвольной постоянной С.

Например, общее решение уравнения $y' = \mp\sqrt{1-y^2}$ записывается в виде $y = \sin(x + c)$.

# Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

***Общим решением*** дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ называется функция $y = \varphi(x, C)$, содержащая одну произвольную константу и удовлетворяющая условиям:

1.При каждом фиксированном допустимом значении $C = C_0$ функция $y = \varphi(x, C_0)$ является решением дифференциального уравнения.

2. Для любого начального условия $(x_0, y_0) \in D$ найдётся значение константы $C = C_0$ такое, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет начальному условию $\varphi(x_0, C_0) = y_0$. ( $D$ – множество, на котором выполняются условия теоремы Коши).

# Частное решение (частный интеграл) обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

**Определение 5.** Всякая функция $\boldsymbol{y = \varphi(x,\ C_0)}$, полученная из общего решения при конкретном значении константы $\boldsymbol{C = C_0}$, называется ***частным решением*** дифференциального уравнения $1$ -го порядка.

Если бесконечное множество решений дифференциального уравнения 1-го порядка задано с помощью уравнения $\boldsymbol{\Phi(x, y, C) = 0}$, то такое уравнение называется ***общим интегралом*** дифференциального уравнения $1$-го порядка, а уравнение, полученное из общего интеграла при конкретном значении $C = C_0$: $\Phi(x, y, C_0) = 0$, называется ***частным интегралом***.

Найти $y = y(x)$, если $y' = f(x)$.

$$y = \int f(x)dx + C,$$

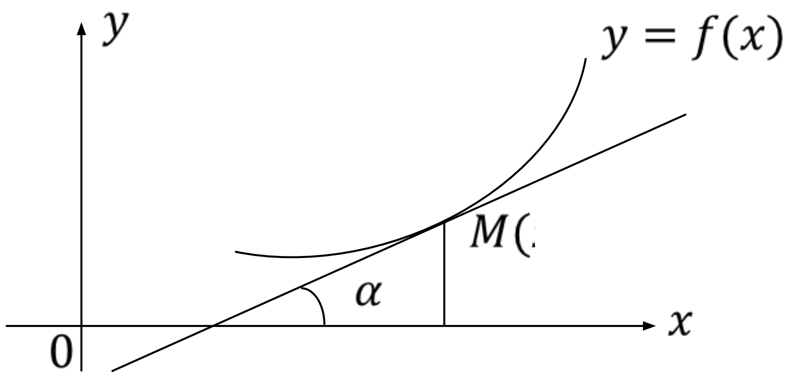
$y = F(x)$+С, где $F(x)$ – одна из первообразных функций $f(x)$.

**Задача.**

Найти уравнение кривой, если известно, что угловой коэффициент ее касательной равен удвоенной абсциссе точки касания.

Решение:

Пусть $y = f(x)$ – неизвестное уравнение кривой.

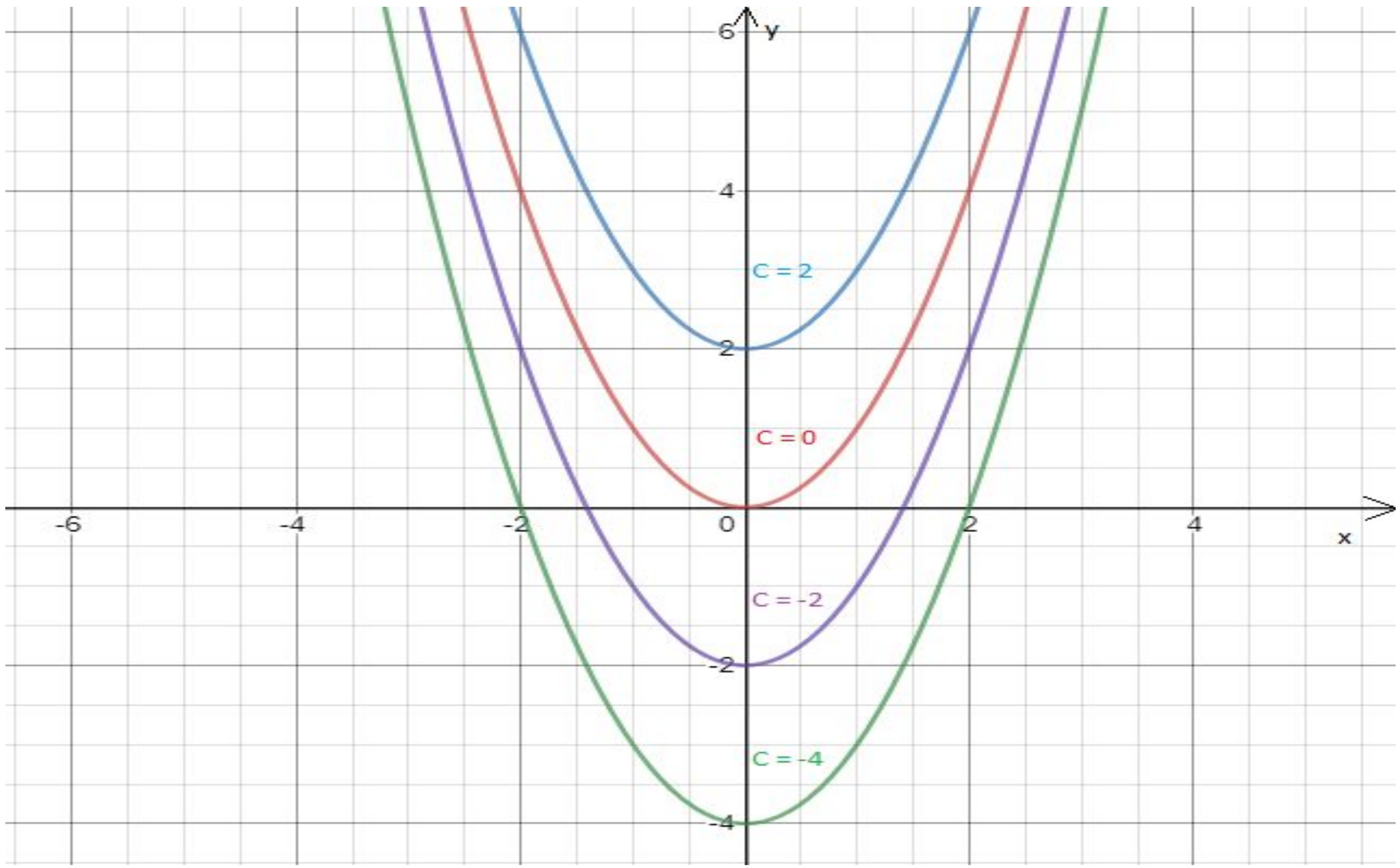


Из условия задачи получаем ДУ

$$y' = 2x$$

$$y = \int 2x dx + C$$

$$y = x^2 + C, \text{ где } C - \text{произвольная постоянная.}$$



# Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения 1-го порядка

- Пусть в некоторой области $D$ плоскости $Oxy$ задано дифференциальное уравнение

$\boldsymbol{y' = f(x, y)}$

$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}(x_0) = \mathbf{f}(x_0, y_0)}$ в любой точке $\boldsymbol{M(x_0, y_0) \epsilon D}$

В каждой точке $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ число $\mathrm{f}(x_0, y_0)$ выражает угловой коэффициент касательной к интегральной кривой $y = y(x)$ в этой точке.

Уравнение $\boldsymbol{y' = f(x, y)}$ определяет на множестве $D$ поле направлений.

**Определение 6.** Множество всех точек $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{D}$ , в которых $\boldsymbol{y' = k}$, где $k$ – константа (или, что то же самое $\boldsymbol{f(x, y) = k}$ – линии уровня функции $\boldsymbol{f(x, y)}$), называется **изоклиной** дифференциального уравнения.

В точках изоклины направление поля одинаково.

# Метод изоклин

- ***Метод изоклин*** - графический метод решения дифференциальных уравнений.

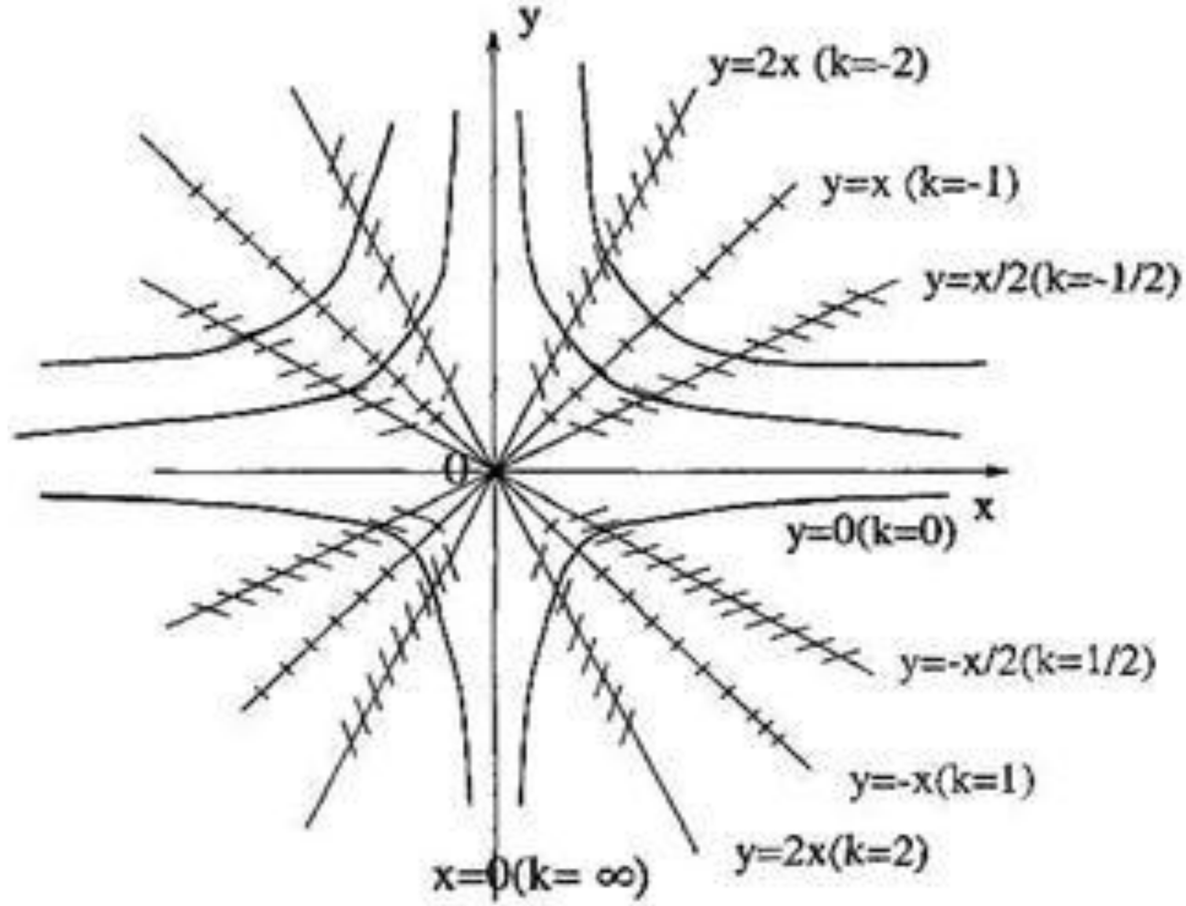
**Пример.** Решить уравнение методом изоклин

$$\boldsymbol{y}' = -\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}.$$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}$. Уравнения изоклин имеют вид: $-\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{k}$, или $y = -kx, x \neq 0$. Множество всех изоклин представляет собой пучок прямых с центром в точке О$(0,0)$, причём центр пучка – выколотая точка.

Например, на изоклине $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}$ , $\boldsymbol{k} = \mathbf{1}$ то есть касательные в точках этой изоклины наклонены к оси $\boldsymbol{Ox}$ **п**од углом **45**$^{0}$.

## Рисунок изоклин для уравнения $y' = -\frac{y}{x}$.



# Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными

**Определение 7.** Уравнение вида:

$$\boldsymbol{f(y)dy = g(x)dx} \qquad (5)$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*.

Функции $f(y)$ и $g(x)$ непрерывны на интервалах $(y_{1,}\, y_2)$, $(x_{1,}\, x_2)$ соответственно.

$dF(y) = dG(x)$, где $F(y), G(x)$ – некоторые первообразные для функций $f(y)$, $g(x)$ соответственно.

$F(y) = G(x) + \mathrm{C}, \qquad C \epsilon R$

или

$\int f(y)dy = \int g(x)dx + C$ – общий интеграл дифференциального уравнения $(5)$

Если можно общий интеграл разрешить относительно $y$, то получим:

$y = \varphi(x, C)$ – общее решение

**Пример.**

$$y^3 dy = x^2 dx,$$

Решение:

$$\int y^3 dy = \int x^2 dx,$$

$$\frac{y^4}{4} = \frac{x^3}{3} + C_1, \qquad 12 \cdot C_1 = C$$

$3y^4 = 4x^3 + C$ – *общий интеграл ДУ*

## Определение. Уравнения вида

$$y' = f(x) \cdot g(y) \qquad (6)$$

$$M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_2(x) \cdot N_2(y)dy = 0 \qquad (7)$$

называются *дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными.*

# Алгоритм решения уравнения (6)

1. Заменим в уравнении [illegible] $=$ [illegible]

$$[\text{illegible}] = [\text{illegible}]$$

2. Разделяем переменные, при условии [illegible] $\neq 0$.

$$\frac{[\text{illegible}]}{[\text{illegible}]} = [\text{illegible}]$$

– уравнение с разделёнными переменными.

3. Интегрируем уравнение с разделёнными переменными:

$$[\text{illegible}]\ \frac{[\text{illegible}]}{[\text{illegible}]} = [\text{illegible}] + [\text{illegible}], \qquad [\text{illegible}].$$

4. Решаем уравнение [illegible] $= 0$ и находим те решения ДУ, которые не могут быть получены из общего решения, – ***особые решения***.

# Алгоритм решения уравнения (7)

1. Разделяем переменные при условии $N_1(y) \neq 0,\ M_2(x) \neq 0$:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

– уравнение с разделёнными переменными.

2. Интегрируем уравнение с разделёнными переменными:

$$\underbrace{\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx}_{\Phi_1(x)} + \underbrace{\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy}_{\Phi_2(y)} = C,\quad C \in \mathbb{R}.$$

$\Phi_1(x) + \Phi_2(y) = C,\ C \in \mathbb{R}$ – общий интеграл.

3. К полученному интегралу могут быть добавлены решения уравнений $N_1(y) = 0,\ M_2(x) = 0,$ если они являются для заданного уравнения решениями.

## Пример.

$$y' = y \cdot tgx,$$

Решение:

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot tgx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int tgxdx, \qquad\qquad y \neq 0$$

$$\ln|y| = -\ln|\cos x| + \ln|C|,$$

$y = \frac{C}{\cos x}$ – общее решение

Функция $y \equiv 0$ является решением данного уравнения, но оно принадлежит полученному общему решению при $\mathrm{C} = 0$.

**Ответ:** $y = \frac{C}{\cos x}$ , $C \epsilon R$

Пример. Решить задачу Коши:

**Пример.** Решить уравнение:

$$x + xy + y' \cdot (y + xy) = 0$$

Решение.

$$x(1+y)dx + y(x+1)dy = 0,$$

$$(1+y)\cdot(x+1) \neq 0,$$

$$\frac{x}{(x+1)}dx + \frac{y}{(1+y)}dy = 0,$$

$$\int \frac{x}{(x+1)}dx + \int \frac{y}{(1+y)}dy = C\,,$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx + \int \left(1 - \frac{1}{y+1}\right)dy = C\,,$$

$x - ln|x+1| + y - ln|y+1| = C, C\epsilon R$,- общий интеграл.

$y = -1$ подставим в исходное уравнение:

$$x - x + 0(-1-x) = 0, \quad 0 = 0, \text{при } x\epsilon R,$$

следовательно, $y = -1$- решение ДУ

$x = -1$ подставим в исходное уравнение:

$$-1 - y + y' \cdot (y - y) = 0,$$

$-1 - y = 0$ – не является тождеством относительно $y$.

Следовательно, $x = -1$ не является решением ДУ.

**Ответ:** $x - ln|x + 1| + y - ln|y + 1| = C, C \epsilon R$, $y = -1$

**Пример**. Решить уравнение:

$$6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx.$$

*Решение.*

$$6xdx + 2xy^2dx = 3x^2ydy + 6ydy$$

$$2x(3 + y^2)dx = 3y(x^2 + 2)dy \quad (3 + y^2)(x^2 + 2) \neq 0$$

Разделим переменные:

$$\frac{2x}{x^2 + 2}dx = \frac{3y}{3 + y^2}dy$$

Интегрируя, получаем:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 2}dx = \int \frac{3y}{3 + y^2}dy \Rightarrow \int \frac{d(x^2 + 2)}{x^2 + 2} = \frac{3}{2}\int \frac{d(y^2 + 3)}{3 + y^2}$$

$$\ln\left|x^2 + 2\right| + \frac{1}{2}\ln|c| = \frac{3}{2}\ln\left|y^2 + 3\right| + \frac{1}{2}\ln|c|$$

$$\ln|c| + 2\ln\left|x^2 + 2\right| = 3\ln\left|y^2 + 3\right|$$

$c(x^2 + 2)^2 = (y^2 + 3)^3$ – это общий интеграл уравнения.

**Ответ**: $c(x^2 + 2)^2 = (y^2 + 3)^3$.

# Приведение к уравнениям с разделяющимися переменными

Уравнение вида:

$y' = f(ax + by + k)$ или

$M(ax + by + k)dx + N(ax + by + k)dy = 0$

С помощью замены

$ax + by + k = z \Longrightarrow$

$z' = a + by'$ (или $dz = adx + bdy$).

**Пример. Решить задачу Коши:** $y' = 2y + 4x - 1, \quad y(0) = \frac{1}{2}$

Решение: $z = 2y + 4x - 1$

$$z' = 2y' + 4, y' = \frac{z'-4}{2}$$

$$\frac{z' - 4}{2} = z,$$

$$\frac{dz}{dx} = 2z + 4,$$

$$\frac{dz}{z+2} = 2dx,$$

$$\ln|z+2| = 2x + \ln|C|,$$

отсюда получаем, что $z + 2 = C \cdot e^{2x},$

$$2y = Ce^{2x} - 4x - 1,$$

$$y = \frac{C}{2}e^{2x} - \frac{4x+1}{2}.$$

Подберем константу $C$ исходя из начального условия.

$$C = 2.$$

Отсюда находим искомое решение задачи Коши:

$$y = e^{2x} - \frac{4x+1}{2}.$$