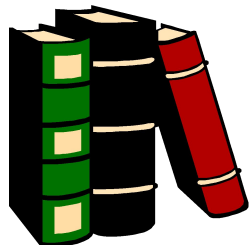




# КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ РХТУ имени Д. И. Менделеева



## Дифференциальные уравнения

### Лекция № 1

**Дифференциальные уравнения: основные понятия. Теорема существования и единственности решения. Задача Коши. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним.**



# Литература

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Конспект лекций по высшей математике (4782)
2. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы (примеры и задачи) (4912)
3. В.В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений.
4. Б.П. Демидович, В П. Моденов. Дифференциальные уравнения.
5. Д.Т Письменный. Сборник задач по высшей математике.

## Задача.

■ Скорость распада радия в каждый текущий момент времени  $t$  пропорциональна количеству нераспавшегося радия. Пусть коэффициент пропорциональности  $k$  известен ( $k > 0$ ). Требуется узнать какое количество нераспавшегося радия останется к моменту  $t$ , если в начальный момент (при  $t = 0$ ) количество радия было равно  $m_0$ .

Под скоростью изменения какой-либо величины понимается производная от этой величины по времени

Решение:  $m(t)$  – количество радия в момент  $t$ .

Согласно условию:

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

$$\frac{d(\ln m)}{dt} = -k$$

Или

$$\frac{d(\ln m + kt)}{dt} = 0$$

Отсюда

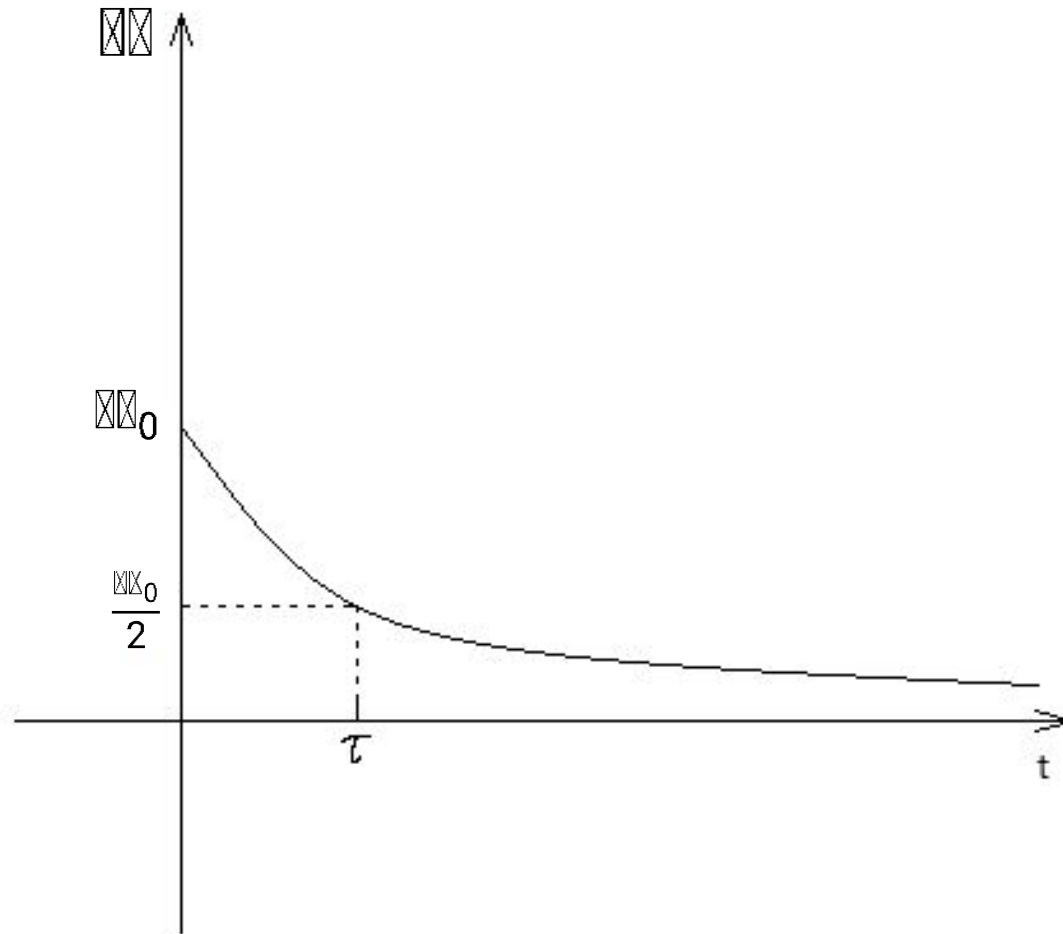
$$\ln m + kt = \ln|C|$$

$$m = Ce^{-kt}$$

Подставим начальные условия: при  $t = 0$   $m = m_0$ .

$$m_0 = Ce^{-k \cdot 0} \Rightarrow C = m_0; \quad m^* = m_0 e^{-kt}.$$

$$m^* = m_0 e^{-kt}$$



# Обыкновенные дифференциальные уравнения $n$ -го порядка

**Определение 1.** Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ)  $n$ -го порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную  $x$ , неизвестную функцию  $y(x)$  и её производные  $y'(x)$ ,  $y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ , то есть

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Если из уравнения (1) можно выразить  $y^{(n)}$  через  $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ , то такое уравнение называется разрешённым относительно  $y^{(n)}$  (или дифференциальным уравнением в нормальной форме):

$$y^{(n)} = \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

– дифференциальное уравнение в нормальной форме.

# Основные понятия теории дифференциальных уравнений

- **Порядком** дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.
- Дифференциальное уравнение называется **обыкновенным** (ОДУ), в том случае, если неизвестная функция, входящая в него, зависит от одной переменной.
- Если неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит от двух и более переменных, то дифференциальное уравнение называется **уравнением в частных производных**.

# Примеры дифференциальных уравнений

$$1) \dot{x} = 2x$$

$$2) \frac{1}{x+1} x'''' + x x' - x + 7 = 0$$

$$3) \frac{x^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} = 0, \text{ где } x = \sin x, \cos x$$

$$4) x^2 \sin x - \cos x + \sin x \cos x = 0$$



# Решение (интеграл) дифференциального уравнения

**Определение 2.** Функция  $y = \varphi(x)$  называется **решением** (или **интегралом**) дифференциального уравнения (1) на интервале  $(a, b)$ , если:

- 1)  $\varphi(x)$  определена и  $n$  раз дифференцируема на  $(a, b)$ ;
- 2) при подстановке  $\varphi(x)$  в дифференциальное уравнение (1) оно обращается в тождество относительно  $x \in (a, b)$ .

График решения  $y = \varphi(x)$  дифференциального уравнения называется **интегральной кривой**.

## Пример.

Проверить, что функция

$$y = \cos 2x$$

является решением дифференциального уравнения:

$$y'' + 4y = 0$$

Решение:

$$y' = -2 \sin 2x$$

$$y'' = -4 \cos 2x$$

$$-4 \cos 2x + 4 \cos 2x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

# Общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения

Множество всех (или почти всех) решений дифференциального уравнения (1) можно записать в виде явной функции, зависящей от  $n$  и  $n$  произвольных констант  $C_1, C_2, \dots, C_n$ :

- $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  – *общее решение* дифференциального уравнения  $n$ -ого порядка (1).
- $y(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = C$  – *общий интеграл* дифференциального уравнения  $n$ -ого порядка (1).

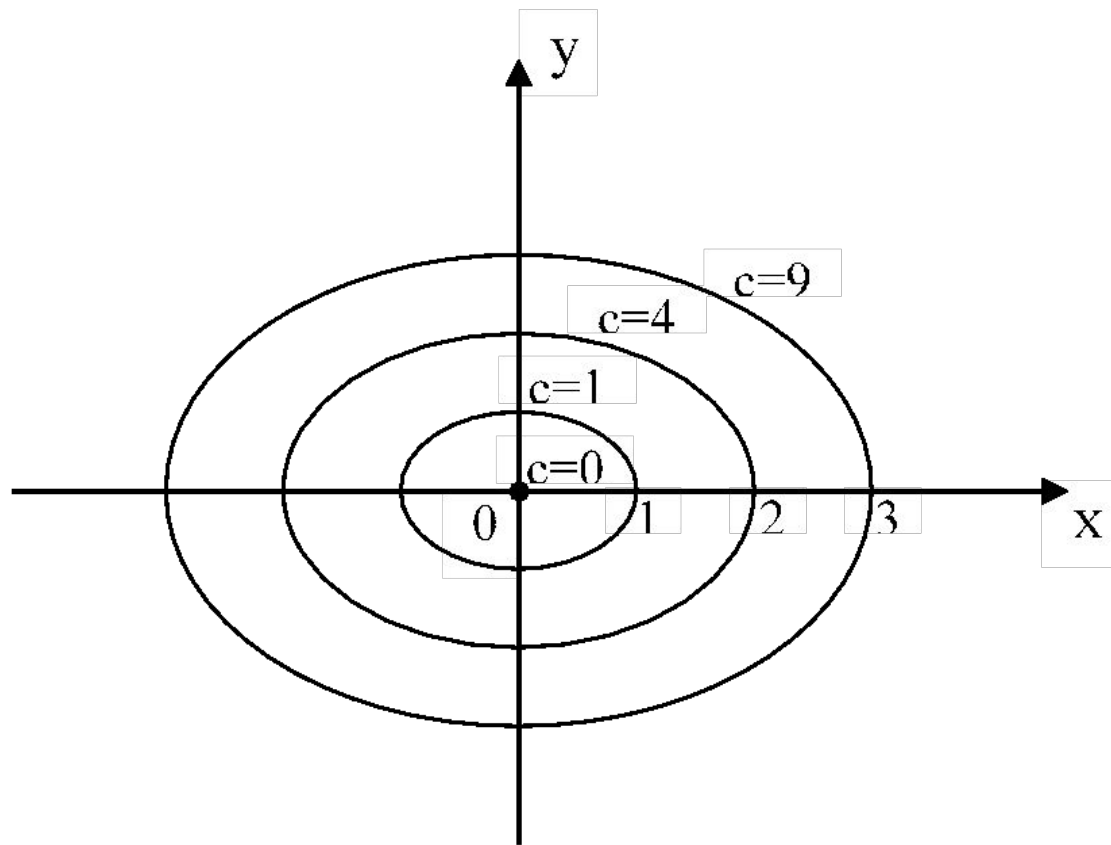
С геометрической точки зрения, общее решение или общий интеграл представляют собой бесконечное множество непересекающихся интегральных кривых на плоскости  $\square\square\square\square\square$


Например, для дифференциального уравнения  $2\square\square\square\square\square + 4\square\square\square\square\square = 0$  семейство интегральных кривых, задаваемых общим интегралом

$$\square^2 + 2\square^2 = \square, \square \geq 0,$$

это бесконечное семейство подобных эллипсов  $\frac{\square^2}{\square} + \frac{\square^2}{\square T^2} = 1$  с

полуосями  $\xi \overline{\square}$  и  $\square \overline{\square T^2}$  (при  $\square = 0$  получаем вырожденный случай – точку  $O(0,0)$ )




$$y = x^2 + C_1x + C_2$$

$$x^2 + y^2 = C$$

## Начальные условия для д.у. (1):

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \begin{matrix} \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} = \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \begin{matrix} \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} = \begin{matrix} \square \square \\ \square \square \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \begin{matrix} \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} = \begin{matrix} \square \square \square \\ \square \square \square \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix}
 \end{aligned}$$

где  $\square_0, \square_0, \square_0^1, \dots, \square_0^{\square-1}$  – конкретные числа. Систему равенств (5) называют *начальными условиями* (или *условиями Коши*).

# Задача Коши

Определение 3.

**Задачей Коши** для дифференциального уравнения

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

называется задача отыскания решения  $y = \varphi(x)$  этого уравнения, удовлетворяющего начальным условиям:

$$\begin{aligned} & y(x_0) = y_0 \\ & y'(x_0) = y_0' \\ & \dots \\ & y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$



# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА

## Определение 4.

Обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида:

или

Задача Коши для дифференциального  
уравнения 1-ого порядка

$$F(x, y, y') = 0,$$

$$y(x_0) = y_0$$

# Теорема Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка

Теорема Коши (теорема существования и единственности решения задачи Коши)

Пусть в дифференциальном уравнении  $y' = f(x, y)$  функция  $f(x, y)$  и её частная производная  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  непрерывны в некоторой области  $D$  плоскости  $Oxy$ . Тогда для любой точки  $M(x_0, y_0) \in D$  существует и при том единственное решение  $y = \varphi(x)$  этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию  $\varphi(x_0) = y_0$ .

**Особым решением** называется такое решение, во всех точках которого условие единственности не выполняется, т.е. в любой окрестности каждой точки  $(x, y)$  особого решения существует по крайней мере две интегральные кривые, проходящие через эту точку.

Особое решение в каждой своей точке касается какой-то другой интегральной кривой, то геометрически оно представляет собой **огibaющую** некоторого семейства интегральных кривых

Особые решения не получаются из общего решения ДУ ни при каких значениях произвольной постоянной  $C$ .

Например, общее решение уравнения  $y' = \mp\sqrt{1 - y^2}$  записывается в виде  $y = \sin(x + c)$ .

# Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

**Общим решением** дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$  называется функция  $y = \varphi(x, C)$ , содержащая одну произвольную константу и удовлетворяющая условиям:

1. При каждом фиксированном допустимом значении  $C = C_0$  функция  $y = \varphi(x, C_0)$  является решением дифференциального уравнения.

2. Для любого начального условия  $(x_0, y_0) \in D$  найдётся значение константы  $C = C_0$  такое, что функция  $y = \varphi(x, C_0)$  удовлетворяет начальному условию  $\varphi(x_0, C_0) = y_0$ . ( $D$  – множество, на котором выполняются условия теоремы Коши).

# Частное решение (частный интеграл) обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

**Определение 5.** Всякая функция  $y = \varphi(x, C_0)$ , полученная из общего решения при конкретном значении константы  $C = C_0$ , называется **частным решением** дифференциального уравнения 1-го порядка.

Если бесконечное множество решений дифференциального уравнения 1-го порядка задано с помощью уравнения  $\Phi(x, y, C) = 0$ , то такое уравнение называется **общим интегралом** дифференциального уравнения 1-го порядка, а уравнение, полученное из общего интеграла при конкретном значении  $C = C_0$ :  $\Phi(x, y, C_0) = 0$ , называется **частным интегралом**.

Найти  $y = y(x)$ , если  $y' = f(x)$ .

$$y = \int f(x)dx + C,$$

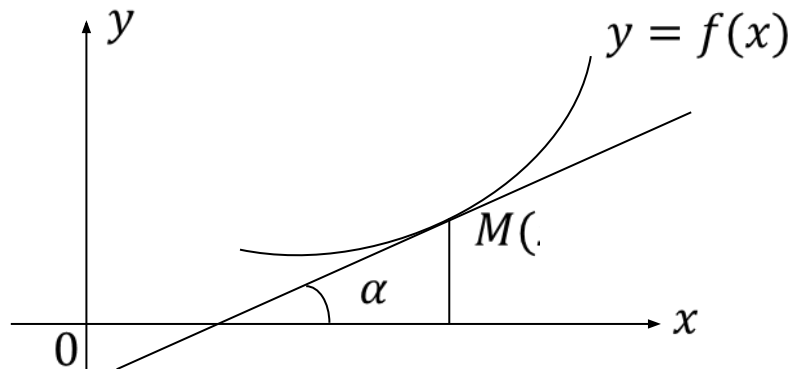
$y = F(x) + C$ , где  $F(x)$  – одна из первообразных функций  $f(x)$ .

### Задача.

Найти уравнение кривой, если известно, что угловой коэффициент ее касательной равен удвоенной абсциссе точки касания.

Решение:

Пусть  $y = f(x)$  – неизвестное уравнение кривой.

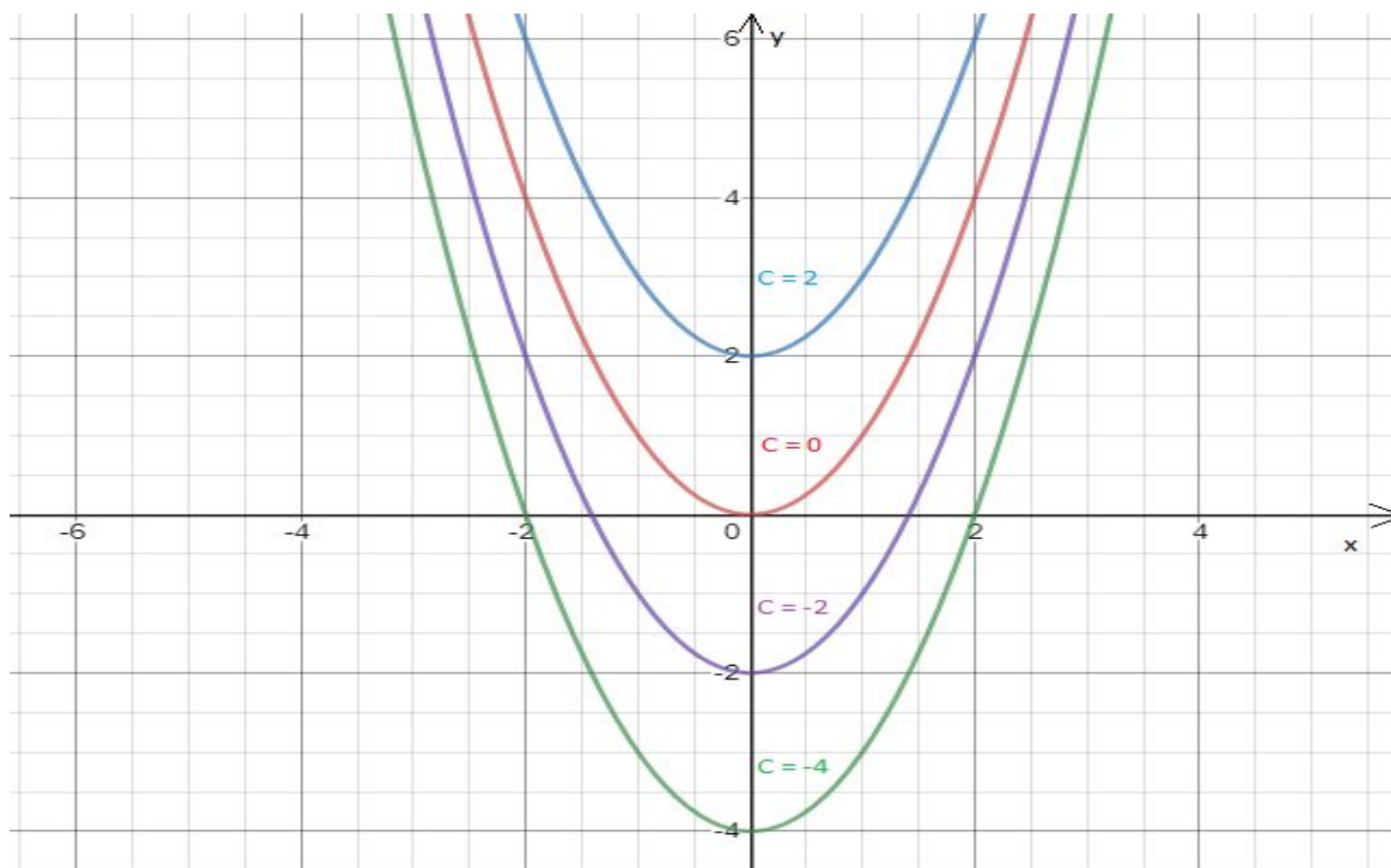


Из условия задачи получаем ДУ

$$y' = 2x$$

$$y = \int 2x dx + C$$

$y = x^2 + C$ , где  $C$  – произвольная постоянная.





# Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения 1-го порядка

■ Пусть в некоторой области  $D$  плоскости  $Oxy$  задано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = f(x_0, y_0) \text{ в любой точке } M(x_0, y_0) \in D$$

В каждой точке  $(x_0, y_0)$  число  $f(x_0, y_0)$  выражает угловой коэффициент касательной к интегральной кривой  $y = y(x)$  в этой точке.

Уравнение  $y' = f(x, y)$  определяет на множестве  $D$  поле направлений.

**Определение 6.** Множество всех точек  $(x, y) \in D$ , в которых  $y' = k$ , где  $k$  – константа (или, что то же самое  $f(x, y) = k$  – линии уровня функции  $f(x, y)$ ), называется **изоклиной** дифференциального уравнения.

В точках изоклины направление поля одинаково.

# Метод изоклин

■ **Метод изоклин** - графический метод решения дифференциальных уравнений.

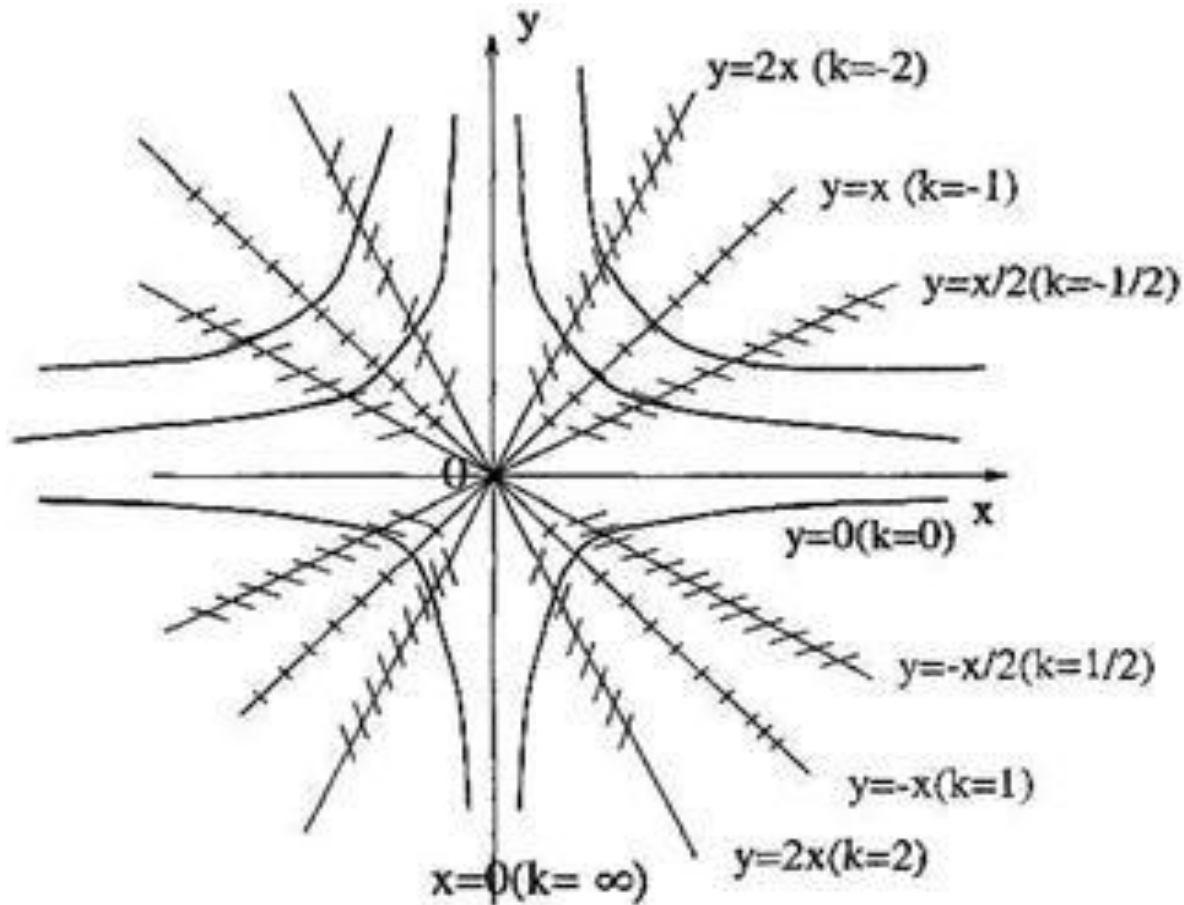
**Пример.** Решить уравнение методом изоклин

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

$f(x, y) = -\frac{y}{x}$ . Уравнения изоклин имеют вид:  $-\frac{y}{x} = k$ , или  $y = -kx, x \neq 0$ . Множество всех изоклин представляет собой пучок прямых с центром в точке  $O(0,0)$ , причём центр пучка – выколотая точка.

Например, на изоклине  $y = -x$ ,  $k = 1$  то есть касательные в точках этой изоклины наклонены к оси  $Ox$  под углом  $45^\circ$ .

# Рисунок изоклин для уравнения $y' = -\frac{y}{x}$ .



# Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными

**Определение 7.** Уравнение вида:

$$f(y)dy = g(x)dx \quad (5)$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

Функции  $f(y)$  и  $g(x)$  непрерывны на интервалах  $(y_1, y_2)$ ,  $(x_1, x_2)$  соответственно.

$dF(y) = dG(x)$ , где  $F(y)$ ,  $G(x)$  – некоторые первообразные для функций  $f(y)$ ,  $g(x)$  соответственно.

$$F(y) = G(x) + C, \quad C \in R$$

или

$\int f(y)dy = \int g(x)dx + C$  – общий интеграл  
дифференциального уравнения (5)

Если можно общий интеграл разрешить относительно  $y$ , то получим:

$y = \varphi(x, C)$  – общее решение

**Пример.**

$$y^3 dy = x^2 dx,$$

Решение:

$$\int y^3 dy = \int x^2 dx,$$

$$\frac{y^4}{4} = \frac{x^3}{3} + C_1, \quad 12 \cdot C_1 = C$$

$$3y^4 = 4x^3 + C - \text{общий интеграл ДУ}$$

## Определение. Уравнения вида

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad (6)$$

$$M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_2(x) \cdot N_2(y)dy = 0 \quad (7)$$

называются *дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными*.

# Алгоритм решения уравнения (6)

1. Заменяем в уравнении  $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$

$$g(x,y) dy = f(x,y) dx$$

2. Разделяем переменные, при условии  $g(x,y) \neq 0$ .

$$\frac{dy}{g(x,y)} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} dx$$

– уравнение с разделёнными переменными.

3. Интегрируем уравнение с разделёнными переменными:

$$\int \frac{dy}{g(x,y)} = \int \frac{f(x,y)}{g(x,y)} dx + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

4. Решаем уравнение  $F(x,y) = 0$  и находим те решения ДУ, которые не могут быть получены из общего решения, – *особые решения*.



# Алгоритм решения уравнения (7)

1. Разделяем переменные при условии  $\mu_1(x) \neq 0$ ,  $\mu_2(x) \neq 0$ :

$$\frac{\mu_1(x)}{\mu_2(x)} y' + \frac{\nu_2(x)}{\mu_1(x)} y = 0$$

– уравнение с разделёнными переменными.

2. Интегрируем уравнение с разделёнными переменными:

$$\underbrace{\int \frac{\mu_1(x)}{\mu_2(x)} dx}_{\Phi_1(x)} + \underbrace{\int \frac{\nu_2(x)}{\mu_1(x)} dx}_{\Phi_2(x)} = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$\Phi_1(x) + \Phi_2(x) = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$  – общий интеграл.

3. К полученному интегралу могут быть добавлены решения уравнений  $\mu_1(x) = 0$ ,  $\mu_2(x) = 0$ , если они являются для заданного уравнения решениями.

**пример.**

$$y' = y \cdot \operatorname{tg} x,$$

Решение:

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \operatorname{tg} x,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{tg} x dx, \quad y \neq 0$$

$$\ln|y| = -\ln|\cos x| + \ln|C|,$$

$$y = \frac{C}{\cos x} - \text{общее решение}$$

Функция  $y \equiv 0$  является решением данного уравнения, но оно принадлежит полученному общему решению при  $C = 0$ .

**Ответ:**  $y = \frac{C}{\cos x}, C \in \mathbb{R}$



Пример. Решить задачу Коши:

■ **Пример.** Решить уравнение:

$$x + xy + y' \cdot (y + xy) = 0$$

Решение.

$$x(1 + y)dx + y(x + 1)dy = 0,$$

$$(1 + y) \cdot (x + 1) \neq 0,$$

$$\frac{x}{(x + 1)} dx + \frac{y}{(1 + y)} dy = 0,$$

$$\int \frac{x}{(x + 1)} dx + \int \frac{y}{(1 + y)} dy = C,$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{x + 1}\right) dx + \int \left(1 - \frac{1}{y + 1}\right) dy = C,$$

$$x - \ln|x + 1| + y - \ln|y + 1| = C, C \in \mathbb{R}, - \text{общий}$$

интеграл.

$y = -1$  подставим в исходное уравнение:

$$x - x + 0(-1 - x) = 0, \quad 0 = 0, \text{ при } x \in \mathbb{R},$$

следовательно,  $y = -1$ - решение ДУ

$x = -1$  подставим в исходное уравнение:

$$-1 - y + y' \cdot (y - y) = 0,$$

$-1 - y = 0$  — не является тождеством относительно  $y$ .

Следовательно,  $x = -1$  не является решением ДУ.

**Ответ:**  $x - \ln|x + 1| + y - \ln|y + 1| = C, C \in \mathbb{R}, y = -1$

**Пример.** Решить уравнение:

$$6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx.$$

*Решение.*

$$6x^2y + 2xy^2 = 3x^2y + 6xy^2$$

$$2x(3 + y^2) = 3x(y^2 + 2) \quad \text{à} \quad (3 + y^2)(y^2 + 2) \neq 0$$

Разделим переменные:

$$\frac{2x}{y^2 + 2} = \frac{3y}{3 + y^2}$$

Интегрируя, получаем:

$$\int \frac{2x}{y^2 + 2} = \int \frac{3y}{3 + y^2} \quad \int \frac{y(y^2 + 2)}{y^2 + 2} = \frac{3}{2} \int \frac{y(y^2 + 3)}{3 + y^2}$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}y^2 + 3 + \frac{1}{2}x^2$$

$$x^2 + 2 = 3y^2 + 3$$

$c(x^2 + 2)^2 = (y^2 + 3)^3$  — это общий интеграл уравнения.

**Ответ:**  $c(x^2 + 2)^2 = (y^2 + 3)^3$ .

# Приведение к уравнениям с разделяющимися переменными

Уравнение вида:

$$y' = f(ax + by + k) \text{ или}$$

$$M(ax + by + k)dx + N(ax + by + k)dy = 0$$

С помощью замены

$$ax + by + k = z \Rightarrow$$

$$z' = a + by' \text{ (или } dz = adx + bdy).$$

**Пример. Решить задачу Коши:**

$$y' = 2y + 4x - 1, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

Решение:

$$z = 2y + 4x - 1$$

$$z' = 2y' + 4, \quad y' = \frac{z' - 4}{2}$$

$$\frac{z' - 4}{2} = z,$$

$$\frac{dz}{dx} = 2z + 4,$$

$$\frac{dz}{z + 2} = 2dx,$$

$$\ln|z + 2| = 2x + \ln|C|,$$

отсюда получаем, что

$$z + 2 = C \cdot e^{2x},$$

$$2y = Ce^{2x} - 4x - 1,$$

$$y = \frac{C}{2}e^{2x} - \frac{4x + 1}{2}.$$

Подберем константу  $C$  исходя из начального условия.

$$C = 2.$$

Отсюда находим искомое решение задачи Коши:

$$y = e^{2x} - \frac{4x + 1}{2}.$$