

26.05.21.

Тема:

Скалярное произведение векторов.

Решение задач на вычисление скалярного произведения векторов.

.

Видео для усвоения материала:

<https://videouroki.net/video/28-skaliarnoie-proizviedi-eniie-viektorov.html>

<https://www.youtube.com/watch?v=hnldMyAhIJc>

*Учащиеся должны прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.*

Теоретическая часть.

Прочитать. Выучить определения, теоремы (то, что выделено жирным шрифтом.)

## § 2

### Скалярное произведение векторов

#### 50 Угол между векторами

Возьмем два произвольных вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Отложим от какой-нибудь точки  $O$  векторы  $\vec{OA} = \vec{a}$  и  $\vec{OB} = \vec{b}$ . Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не являются сонаправленными, то лучи  $OA$  и  $OB$  образуют угол  $AOB$  (рис. 133). Градусную меру этого угла обозначим буквой  $\alpha$  и будем говорить, что угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $\alpha$ . Если же векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены, в частности один из них или оба нулевые, то будем считать, что угол между ними равен  $0^\circ$ . Если угол между векторами равен  $90^\circ$ , то векторы называются **перпендикулярными**.

Угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначается так:  $\widehat{a b}$ .

На рисунке 134 изображено несколько векторов. Углы между ними таковы:  $\widehat{a b} = 30^\circ$ ,  $\widehat{a c} = 120^\circ$ ,  $\widehat{a d} = 60^\circ$ ,  $\widehat{b c} = 90^\circ$ ,  $\widehat{d f} = 0^\circ$ ,  $\widehat{d c} = 180^\circ$ . На этом рисунке  $\vec{b} \perp \vec{c}$ ,  $\vec{b} \perp \vec{d}$ ,  $\vec{b} \perp \vec{f}$ .

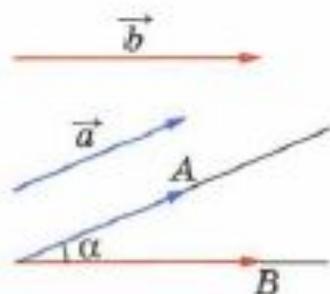


Рис. 133

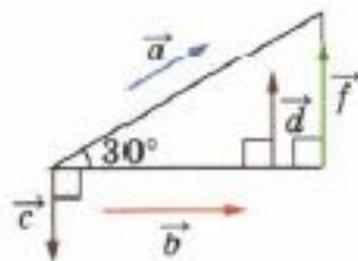


Рис. 134

#### 51 Скалярное произведение векторов

**Скалярным произведением** двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначается так:  $\vec{a} \vec{b}$ . Таким образом,

$$\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos (\widehat{a b}).$$

Как и в планиметрии, справедливы следующие утверждения:

**скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны;**

скалярный квадрат вектора (т. е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины.

Докажите эти утверждения самостоятельно.

Скалярное произведение двух векторов можно вычислить, зная координаты этих векторов: скалярное произведение векторов  $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$  и  $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$  выражается формулой  $\vec{a} \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ . Это утверждение доказывается точно так же, как в планиметрии.

Косинус угла  $\alpha$  между ненулевыми векторами  $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$  и  $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$  вычисляется по формуле

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (1)$$

В самом деле, так как

$$\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha,$$

то

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Подставив сюда выражения для  $\vec{a} \vec{b}$ ,  $|\vec{a}|$  и  $|\vec{b}|$  через координаты векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , получим формулу (1).

Сформулируем основные свойства скалярного произведения векторов.

Для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  и любого числа  $k$  справедливы соотношения:

1<sup>0</sup>.  $\vec{a}^2 \geq 0$ , причем  $\vec{a}^2 > 0$  при  $\vec{a} \neq \vec{0}$ .

2<sup>0</sup>.  $\vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{a}$  (переместительный закон).

3<sup>0</sup>.  $(\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} \vec{c} + \vec{b} \vec{c}$  (распределительный закон).

4<sup>0</sup>.  $k(\vec{a} \vec{b}) = (k\vec{a}) \vec{b}$  (сочетательный закон).

Утверждения 1<sup>0</sup>—4<sup>0</sup> доказываются точно так же, как в планиметрии.

Нетрудно доказать, что распределительный закон имеет место для любого числа слагаемых. Например,  $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \vec{d} = \vec{a} \vec{d} + \vec{b} \vec{d} + \vec{c} \vec{d}$  (см. задачу 458).

Ненулевой вектор называется направляющим вектором прямой  $a$ , если он лежит либо на прямой  $a$ , либо на прямой, параллельной  $a$ .

На рисунке 135 вектор  $\overrightarrow{AB}$  является направляющим вектором прямой  $a$ .

### Задача 1

Найти угол между двумя прямыми (пересекающимися или скрещивающимися), если известны координаты направляющих векторов этих прямых.

### Решение

Пусть  $\vec{p} \{x_1; y_1; z_1\}$  и  $\vec{q} \{x_2; y_2; z_2\}$  — направляющие векторы прямых  $a$  и  $b$ . Обозначим буквой  $\varphi$  искомый угол между этими прямыми. Для решения задачи достаточно найти  $\cos \varphi$ , так как значение  $\cos \varphi$  позволяет найти угол  $\varphi$ .

Введем обозначение:  $\theta = \widehat{\vec{p}\vec{q}}$ . Тогда либо  $\varphi = \theta$ , если  $\theta \leq 90^\circ$  (рис. 136, а), либо  $\varphi = 180^\circ - \theta$ , если  $\theta > 90^\circ$  (рис. 136, б).

Поэтому либо  $\cos \varphi = \cos \theta$ , либо  $\cos \varphi = -\cos \theta$ . В любом случае  $|\cos \varphi| = |\cos \theta|$ , а так как  $\varphi \leq 90^\circ$ , то  $\cos \varphi \geq 0$ , и, следовательно,  $\cos \varphi = |\cos \theta|$ . Используя формулу (1) п. 51, получаем

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (2)$$

### Задача 2

Найти угол между прямой и плоскостью, если известны координаты направляющего вектора прямой и координаты ненулевого вектора, перпендикулярного к плоскости.

### Решение

Пусть  $\vec{p} \{x_1; y_1; z_1\}$  — направляющий вектор прямой  $a$ ,  $\vec{n} \{x_2; y_2; z_2\}$  — ненулевой вектор, перпендикулярный к плоскости  $\alpha$ . Это означает, что прямая, на которой лежит вектор  $\vec{n}$ , перпендикулярна к плоскости  $\alpha$ . Обозначим буквой  $\varphi$  искомый угол между прямой  $a$  и плоскостью  $\alpha$ , а буквой  $\theta$  — угол  $\widehat{\vec{p}\vec{n}}$ .

Пользуясь рисунком 137, нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что  $\sin \varphi = |\cos \theta|$ . Поэтому для  $\sin \varphi$  получается такое же выражение, как и в правой части равенства (2). Зная  $\sin \varphi$  и учитывая, что  $\varphi \leq 90^\circ$ , можно найти угол  $\varphi$ .

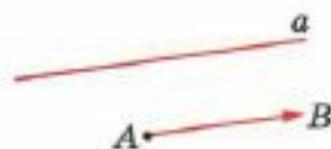
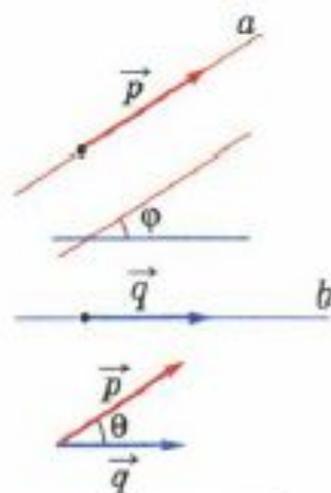
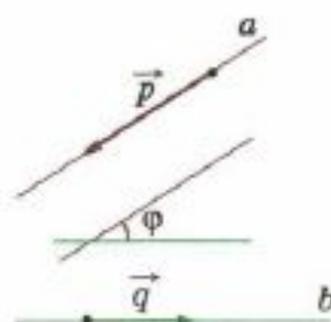


Рис. 135



$\varphi = \theta$

а)



$\varphi = 180^\circ - \theta$

б)

Рис. 136

## Практическая часть.

- 444 Даны векторы  $\vec{a} \{1; -1; 2\}$ ,  $\vec{b} \{-1; 1; 1\}$  и  $\vec{c} \{5; 6; 2\}$ . Вычислите  $\vec{a} \vec{c}$ ,  $\vec{a} \vec{b}$ ,  $\vec{b} \vec{c}$ ,  $\vec{a} \vec{a}$ ,  $\sqrt{\vec{b} \vec{b}}$ .
- 445 Даны векторы  $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{j} - 5\vec{k}$ . Вычислите: а)  $\vec{a} \vec{b}$ ; б)  $\vec{a} \vec{i}$ ; в)  $\vec{b} \vec{j}$ ; г)  $(\vec{a} + \vec{b}) \vec{k}$ ; д)  $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{k} + \vec{i} - 2\vec{j})$ .
- 446 Даны векторы  $\vec{a} \{3; -1; 1\}$ ,  $\vec{b} \{-5; 1; 0\}$  и  $\vec{c} \{-1; -2; 1\}$ . Выясните, какой угол (острый, прямой или тупой) между векторами: а)  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ; б)  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ ; в)  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$ .